Université Pierre et Marie Curie — Année 2015-2016
Licence $3^{\text{ème}}$ année : 3M260 — Examen du 6 janvier 2016 de 11h00 à 13h00

Aucun document ni machine électronique n'est autorisé. **Les téléphones portables doivent impérativement être éteints**. Veillez à la clarté de votre rédaction ainsi qu'à la justification soigneuse de vos affirmations.

Exercice 1 Soit (X,d) un espace métrique. Etant donné un sous-ensemble non vide quelconque A de X, on définit la fonction h_A sur X par

$$h_A(y) := \inf_{x\in A} d(x,y).$$

1. Pour $r>0$, écrire de manière équivalente l'affirmation $h_A(y) \leqslant r$, sans plus utiliser la notion d'infimum mais en termes de quantificateurs, d'ε et de boules ouvertes uniquement.
2. Que peut-on déduire de l'égalité $h_A(y)=0$? (on rappelle que A est quelconque !)
3. Montrer que si $y,z\in E$,
$$h_A(z) \leqslant h_A(y) + d(y,z).$$
4. Déduire que la fonction h_A est continue et même lipschitzienne sur X (rappeler au passage les définitions de chacune de ces notions).

Si A et B sont deux compacts non vides dans X, on pose

$$h(A,B) := \sup_{y\in B} h_A(y).$$

5. Montrer qu'il existe au moins un point $y_0\in B$ tel que $h(A,B)=h_A(y_0)$ et ensuite qu'il existe aussi au moins un point $x_0\in A$ tel que $h(A,B)=d(x_0,y_0)$.

On admet pour la suite que la relation

$$d_{\mathcal{H}}(A,B) := \max(h(A,B),h(B,A))$$

définit une distance sur l'espace $\mathcal{K}(X)$ de tous les compacts non vides de X. Reformulée de manière plus explicite, cette définition signifie donc que pour tout $r>0$, $d_{\mathcal{H}}(A,B)\leqslant r$ si et seulement si les deux affirmations suivantes sont vérifiées :
- pour tout point x de A il existe un point y de B tel que $d(x,y)\leqslant r$,
- pour tout point y de B il existe un point x de A tel que $d(x,y)\leqslant r$.

6. Dans le cas particulier où (X,d) correspond à $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne, A_0 est la boule fermée centrée en l'origine et de rayon 1, B_1 un carré centré en l'origine et de côté 1/2 et B_2 un carré centré à l'origine et de côté 2, que valent respectivement $d_{\mathcal{H}}(A_0,B_1)$ et $d_{\mathcal{H}}(A_0,B_2)$? (faire un dessin et indiquer des points réalisant la distance pourra aider)
7. Montrer qu'étant donnés 4 ensembles $A_1,A_2,B_1,B_2\in\mathcal{K}(X)$,
$$d_{\mathcal{H}}(A_1\cup A_2, B_1\cup B_2) \leqslant \max\left(d_{\mathcal{H}}(A_1,B_1), d_H(A_2,B_2)\right).$$
(la reformulation explicite de la définition de $d_{\mathcal{H}}$ ci-dessus est le moyen le plus élémentaire pour y arriver)

Si $T : X \to X$ est une application, on notera $T(A)$ l'ensemble $T(A) := \{T(x),\ x \in A\}$.

8. Justifier le fait que si $A \in \mathcal{K}(X)$ et si T est continue, alors $T(A) \in \mathcal{K}(X)$. Dans la suite on note $\mathcal{T}$ l'application $\mathcal{T} : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$, $A \mapsto T(A)$.
9. Montrer que si T est k-lipschitzienne (pour d) alors $\mathcal{T}$ l'est aussi (pour $d_{\mathcal{H}}$).

On fait l'hypothèse supplémentaire que (X, d) est complet, et on admet que dans ce cas l'espace $(\mathcal{K}(X), d_{\mathcal{H}})$ l'est aussi.

10. Si T_1 et T_2 sont deux contractions (c'est-à-dire deux applications k-lipschitziennes avec $k < 1$) de X dans lui-même, que peut-on conclure concernant l'application $\mathcal{T}_{1,2} : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$, $A \mapsto T_1(A) \cup T_2(A)$? (on se basera pour cela sur les affirmations des points 7, 8 et 9)

Exercice 2 Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés réels, Ω un ouvert de E, et $f : \Omega \to F$ une fonction.

1. Donner une définition explicite et détaillée de la proposition : f est différentiable en un point x_0 de Ω.
2. A quelle condition dit-on que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω ? On prendra soin ici aussi de bien indiquer les normes impliquées.
3. A quelle condition dit-on que f est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ entre Ω et $f(\Omega)$?
4. Si f est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ entre Ω et $f(\Omega)$, à quoi peut-on identifier la différentielle de l'application réciproque f^{-1} en un point $b \in f(\Omega)$?
5. Enoncer le théorème des accroissements finis concernant f, après avoir indiqué des hypothèses additionnelles suffisantes pour cela (au choix).
6. La fonction réelle définie sur l'intervalle ouvert $(-1, 1)$ par $f(x) = x^3 \sin(1/x^2)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est-elle a) différentiable b) de classe $\mathcal{C}^1$ c) un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $(-1, 1)$?
7. On suppose que $\Omega = E = F = \mathcal{M}_n(R)$ est l'espace des matrices carrées réelles de taille n et que f est l'application qui, à une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe le cube de celle-ci. Calculer la différentielle de f en une matrice quelconque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en prenant bien garde au fait que le produit matriciel n'est pas une opération commutative.