3M260 **2015-2016**
Université Paris 6

Topologie et calcul différentiel (3M260)

deuxième session

13 juin 2016

Durée : 2h. Sans documents. Téléphones portables éteints et rangés.

Exercice 1.— On considère un espace métrique compact X, et une fonction continue $f : X \to]0, +\infty[$.

1. Montrer la propriété suivante : (*) il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in X$, $f(x) > \varepsilon$.

Le but de la suite est d'écrire une deuxième démonstration de la propriété (*) en utilisant des recouvrements.

2. (Question de cours) Rappeler la propriété qui caractérise les espaces métriques compacts en termes de recouvrements.

3. On pose, pour tout entier $n > 0$,

$$I_n = \left] \frac{1}{n}, +\infty \right[.$$

La famille $\mathcal{I} = \{I_n \mid n > 0\}$ forme-t-elle un recouvrement de $]0, +\infty[$ par des ouverts ? Justifier votre réponse.

4. Soit

$$\mathcal{J} = \{f^{-1}(I_n) \mid n > 0\}.$$

Cette famille forme-t-elle un recouvrement de X par des ouverts ? Justifier votre réponse.

5. A l'aide des deux questions précédentes, rédiger la deuxième démonstration de la propriété (*).

Exercice 2.— On note $C([0,2], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme "sup" $\|.\|_\infty$.

1. Rappeler la définition de cette norme.

2. On considère l'application

$$\Phi : f \mapsto f(1)$$

qui va de $C([0,2], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

  a. Est-elle linéaire ? (Justifier.)

  b. Est-elle continue ? (Justifier.)

3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. L'ensemble

$$Y = \{f \in C([0,2], \mathbb{R}) \mid f(1) \in U\}$$

est-il une partie ouverte de $C([0,2], \mathbb{R})$? (Justifier.)

4. Soit $f \in C([0,2],\mathbb{R})$ et $t_0 \in [0,2]$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ et $g \in C([0,2],\mathbb{R})$ tels que

1. $g(t) = f(t_0)$ pour tout $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [0,2]$,
2. $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$

(on pourra s'aider d'un dessin pour faciliter la description de g).

5. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On suppose que U est contenu dans $]-1,1[$.

a. Soit t_0 un point de la frontière de U. Ce point appartient-il à U ? (Justifier.)

b. Montrer que la frontière de U est non vide.

6. L'ensemble

$$Z = \{f \in C([0,2],\mathbb{R}) \mid \forall x \in U, f(x) \in U\}$$

est-il une partie ouverte de $C([0,2],\mathbb{R})$? (Indication : on pourra considérer la fonction $f(x) = x$ et s'aider des points 4 et 5).

Exercice 3.—

1. (Question de cours) Etant donnée une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, à quelle condition dit-on que f est différentiable au point $(5,6)$?

On définit les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Etant donnée une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, on considère les deux propriétés suivantes :

(1) $f(5,6) = (7,8)$,

(2) $Df(5,6) = A$,

où $Df(5,6)$ désigne la matrice jacobienne de f au point $(5,6)$.

2. Donner un exemple d'une application de classe C^1 vérifiant ces deux propriétés.

3. Soit f une application de classe C^1 vérifiant les propriétés (1) et (2). Montrer la propriété (3) suivante : *pour toute suite* $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points du plan qui tend vers le point* $(7,8)$*, il existe un entier* N *et une suite* $(P_n)_{n\geq N}$ *de points du plan, qui tend vers le point* $(5,6)$*, et telle que* $f(P_n) = Q_n$ *pour tout* $n \geq N$*.*

4. Donner un exemple d'application f de classe C^1

— qui vérifie la propriété (1),

— qui vérifie la propriété (2') suivante : $Df(5,6) = B$,

— mais qui ne vérifie pas la propriété (3).
