3M260 **2015-2016**
Université Paris 6

Topologie et calcul différentiel (3M260)

DEUXIÈME SESSION

13 juin 2016

Eléments de corrigé

Exercice 1.— On considère un espace métrique compact X, et une fonction continue $f : X \to]0, +\infty[$.

1. Montrer la propriété suivante : (*) il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in X$, $f(x) > \varepsilon$.

D'après le cours, la fonction f est bornée et atteint ses bornes. Notons x_0 un élément de X en lequel f atteint sa borne inférieure. On a $f(x_0) > 0$ par hypothèse sur f, et $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout x dans X. Définissons ε comme la moitié de $f(x_0)$, c'est bien un réel strictement positif qui vérifie l'inégalité voulue.

2. (Question de cours) Rappeler la propriété qui caractérise les espaces métriques compacts en termes de recouvrements.

3. On pose, pour tout entier $n > 0$,

$$I_n = \left]\frac{1}{n}, +\infty\right[.$$

La famille $\mathcal{I} = \{I_n \mid n > 0\}$ forme-t-elle un recouvrement de $]0, +\infty[$ par des ouverts ? Justifier votre réponse.

Chaque I_n est un ouvert de $\mathbb{R}$ inclus dans $]0, +\infty[$, donc c'est aussi un ouvert de $]0, +\infty[$. Pour tout réel $t > 0$, choisissons $n > 1/t$. Alors $1/n < t$ et $t \in I_n$, ce qui montre que la famille $\mathcal{I}$ recouvre $]0, +\infty[$.

4. Soit

$$\mathcal{J} = \{f^{-1}(I_n) \mid n > 0\}.$$

Cette famille forme-t-elle un recouvrement de X par des ouverts ? Justifier votre réponse.

L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert, or chaque I_n est un ouvert de $]0, +\infty[$ et f est continue, donc $\mathcal{J}$ est une famille d'ouverts. Montrons qu'elle recouvre X (c'est-à-dire vérifions, dans ce cas particulier, le fait général que "l'image réciproque d'un recouvrement par une application est un recouvrement"). On prend un élément x de X, il s'agit de trouver un ensemble de la famille $\mathcal{J}$ qui contient x. Puisque $\mathcal{I}$ est un recouvrement de l'espace d'arrivée, il existe n tel que $f(x)$ appartient à I_n. Par définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application, le point x appartient alors à $f^{-1}(I_n)$, ce qu'on voulait.

5. A l'aide des deux questions précédentes, rédiger la deuxième démonstration de la propriété (*).

D'après ce qui précède, la famille $\mathcal{J}$ forme un recouvrement de l'espace compact X par des ouverts. D'après la caractérisation des espaces compacts en termes de recouvrement par des ouverts, il existe un sous-recouvrement fini $\mathcal{J}_0$ de $\mathcal{J}$ qui recouvre encore X. Notons

$$\mathcal{J}_0 = \{f^{-1}(I_{n_1}), \ldots, f^{-1}(I_{n_k})\}.$$

Choisissons i tel que n_i est le plus grand des entiers $n_1, \ldots, n_k$. On vérifie alors que pour tout point x de X, on a $f(x) > 1/n_i$, autrement dit le nombre $\varepsilon = 1/n_i$ convient.

Exercice 2.— On note $C([0,2],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme "sup" $\|.\|_\infty$.

1. Rappeler la définition de cette norme.

2. On considère l'application

$$\Phi : f \mapsto f(1)$$

qui va de $C([0,2],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

a. Est-elle linéaire ? (Justifier.)

b. Est-elle continue ? (Justifier.)

On a, pour toutes $f, g \in C([0,2],\mathbb{R})$,

$$|f(1) - g(1)| \le \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - g(t)| = \|f - g\|_\infty .$$

Cette inégalité montre que l'application Φ est 1-lipschitzienne de $C([0,2],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Elle est donc en particulier continue.

3. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. L'ensemble

$$Y = \{f \in C([0,2],\mathbb{R}) \mid f(1) \in U\}$$

est-il une partie ouverte de $C([0,2],\mathbb{R})$? (Justifier.)

L'ensemble Y n'est rien d'autre que l'image réciproque de l'ouvert U par l'application Φ. Puisque Φ est continue, c'est donc un ouvert de $C([0,2],\mathbb{R})$.

4. Soit $f \in C([0,2],\mathbb{R})$ et $t_0 \in [0,2]$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ et $g \in C([0,2],\mathbb{R})$ tels que

1. $g(t) = f(t_0)$ pour tout $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [0,2]$,
2. $\|f - g\|_\infty \le \varepsilon$

(on pourra s'aider d'un dessin pour faciliter la description de g).

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit pour δ le tiers du nombre donné par la continuité de l'application f au point t_0, autrement dit on a, pour tout $t \in]t_0 - 3\delta, t_0 + 3\delta[\cap [0,2]$,

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

On définit ensuite g de la façon suivante : jusqu'à $t_0 - 2\delta$, g coincide avec f ; entre $t_0 - \delta$ et $t_0 + \delta$, g est constante et vaut $f(t_0)$, comme imposé par la condition 1 de l'énoncé ; sur chacun des deux intervalles restant, on prolonge g par une fonction affine : comme on a déjà défini g aux bornes de l'intervalle, il y a un unique prolongement affine qui fait de g une application continue. On vérifie enfin que cette application g convient, c'est-à-dire qu'elle vérifie bien la condition 2 de l'énoncé ; ceci utilise le choix de δ.

5. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On suppose que U est contenu dans $]-1,1[$.

a. Soit t_0 un point de la frontière de U. Ce point appartient-il à U ? (Justifier.)

Soit t_0 un point de la frontière, montrons que t_0 n'est pas dans U. L'une des définitions de la frontière est (cf exercice 8 du memo)

$$\mathrm{Fr}(U) = \mathrm{Adh}(U) \setminus \mathrm{Inte}(U).$$

Ici U étant ouvert, il est égal à son intérieur, et donc

$$\mathrm{Fr}(U) = \mathrm{Adh}(U) \setminus U.$$

Un point de la frontière n'est donc pas dans U.

b. Montrer que la frontière de U est non vide.

Si la frontière de U est vide, c'est que les deux fermés $\mathrm{Adh}(U)$ *et* $\mathrm{Adh}(\mathbb{R} \setminus U)$ *sont disjoints. Or on voit facilement que ces deux fermés ne sont pas vides et recouvrent $\mathbb{R}$. Mais puisque $\mathbb{R}$ est connexe, on aboutit à une contradiction.*

6. L'ensemble
$$Z = \{f \in C([0,2], \mathbb{R}) \mid \forall x \in U, f(x) \in U\}$$
est-il une partie ouverte de $C([0,2], \mathbb{R})$? (Indication : on pourra considérer la fonction $f(x) = x$ et s'aider des points 4 et 5).

Cette fonction f appartient clairement à l'ensemble Z. Nous allons montrer qu'elle n'est pas dans l'intérieur de Z, ce qui nous dira que Z n'est pas ouvert. Pour ceci, on se donne un $\varepsilon > 0$, il s'agit de trouver une fonction g, à distance de f plus petite que ε, et qui n'est pas dans Z. D'après les questions précédentes, il existe un point t_0 de la frontière de U (5.b) et ce point n'est pas dans U (5.a). Soit g la fonction donnée par la question 4. Elle est bien à distance de f plus petite que ε, il nous reste à vérifier qu'elle n'appartient pas à Z. Puisque t_0 est dans la frontière de U, il est en particulier dans son adhérence, donc il existe un réel $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ qui appartient à U. D'après les propriétés de g, on a $g(t) = f(t_0) = t_0$ qui n'est pas dans U. Ceci conclut.

Exercice 3.—

1. (Question de cours) Etant donnée une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, à quelle condition dit-on que f est différentiable au point $(5, 6)$?

On définit les deux matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Etant donnée une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, on considère les deux propriétés suivantes :

(1) $f(5, 6) = (7, 8)$,

(2) $Df(5, 6) = A$,

où $Df(5, 6)$ désigne la matrice jacobienne de f au point $(5, 6)$.

2. Donner un exemple d'une application de classe C^1 vérifiant ces deux propriétés.

Le plus simple est de prendre une application affine : l'application
$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} + A. \begin{pmatrix} x - 5 \\ y - 6 \end{pmatrix}$$
convient.

3. Soit f une application de classe C^1 vérifiant les propriétés (1) et (2). Montrer la propriété (3) suivante : *pour toute suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points du plan qui tend vers le point $(7, 8)$, il existe un entier N et une suite $(P_n)_{n \geq N}$ de points du plan, qui tend vers le point $(5, 6)$, et telle que $f(P_n) = Q_n$ pour tout $n \geq N$.*

La différentielle de f au point $(5, 6)$ a pour matrice A, qui est inversible (ce qu'on vérifie en calculant par exemple son déterminant). On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale :

il existe un voisinage U de $(5,6)$ et un voisinage V de $(7,8)$ tels que la restriction $f_{|U}$ de f à U est un difféomorphisme de U sur V. En particulier, c'est une bijection. Soit (Q_n) une suite qui tend vers $(7,8)$, comme dans l'énoncé. Puisque V est un ouvert contenant $(7,8)$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, Q_n appartient à V. Pour chaque entier $n \geq N$, on peut alors définir P_n comme $f_{|U}^{-1}(Q_n)$. Puisque $f_{|U}$ est un difféomorphisme, son inverse est en particulier continue au point $(7,8)$, et on en déduit que la suite (P_n) converge vers $(5,6)$ en appliquant le critère séquentiel de continuité.

4. Donner un exemple d'application f de classe C^1

- — qui vérifie la propriété (1),
- — qui vérifie la propriété (2') suivante : $Df(5,6) = B$,
- — mais qui ne vérifie pas la propriété (3).

Ici encore, on peut prendre pour f une application affine : il y en a une seule qui vérifie les conditions données. Comme la matrice B n'est pas inversible, l'image de $\mathbb{R}^2$ par f est une droite. Il suffit alors de prendre une suite (Q_n) de points hors de cette droite, et convergeant vers $(7,8)$, pour contredire la propriété (3). Les détails sont laissés au lecteur.
