LM360 **2014-2015**
Université Paris 6

Topologie et calcul différentiel (LM360)

deuxième session

10 juin 2015

Durée : 3h. Sans documents. Téléphones portables éteints et rangés.

Exercice 1.—
1. L'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $[-1,1]$, muni de la "norme sup" définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)|\,,$$

est-il complet ? Justifier votre réponse en vous appuyant sur le cours.
2. Soit $\Phi : [-1,1] \to [-1,1]$ une fonction de classe C^1 vérifiant $\forall t \in [-1,1], |\Phi'(t)| < 1$. Montrer qu'il existe un nombre $C \in [0,1[$ tel que, pour tous $x, y \in [-1,1]$,

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq C\,|x-y|\,.$$

3. Sous les mêmes hypothèses, montrer qu'il existe une unique fonction $f : [-1,1] \to [-1,1]$, continue, et telle que pour tout $t \in [-1,1]$,

$$f(t) = t\Phi(f(t)).$$

4. (Question optionnelle) Montrer que la fonction f trouvée à la question précédente vérifie

$$\|f\|_\infty \leq |\Phi(0)| \sum_{n\geq 0} C^n$$

où C est le nombre obtenu à la question 2.

Exercice 2.— Soit M un élement de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, où N est un entier strictement positif. Montrer que la formule

$$\Phi(M) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} M^{2n}$$

définit un autre élément de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. On pourra utiliser une norme particulière sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

Exercice 3.—
1. (Question de cours) Démontrer que dans un espace métrique la réunion de deux parties connexes par arcs, d'intersection non vide, est une partie connexe par arcs.
2. La réunion de deux parties connexes par arcs *disjointes* peut-elle être connexe par arcs ? On justifiera la réponse par une démonstration ou un exemple.

Exercice 4.— On considère une application $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. On suppose que $f(0) = 0$ et que f est différentiable en 0.

1. (Question de cours) Compléter la phrase suivante :
Puisque f est différentiable en 0 et $f(0) = 0$, on peut écrire, pour tout $\vec{h} \in \mathbb{R}^N$,

$$f(\vec{h}) = \text{...}$$

avec $o(\vec{h})$ négligeable devant $\vec{h}$, ce qui signifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{...} \quad .$$

Pour chaque entier $n > 0$, on définit une application $g_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ par la formule

$$g_n(x) = nf\left(\frac{x}{n}\right).$$

2. On se donne un point x de $\mathbb{R}^N$. Déterminer la limite de la suite $(g_n(x))_{n>0}$.

3. Soit $R > 0$. Montrer que la convergence de la question précédente est uniforme sur la boule $B(0, R)$ de $\mathbb{R}^N$.

Exercice 5.—

1. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que la suite $(\|x_n\|)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers $+\infty$.

a. Ecrire l'hypothèse à l'aide de quantificateurs.

b. Montrer qu'on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite bornée.

c. Montrer qu'on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite convergente.

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ une application continue. On dit que f est *propre* si l'image réciproque par f de toute partie compacte de $\mathbb{R}^M$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^N$.

2. On suppose que pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}^N$, si la suite $(\|x_n\|)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$, alors la suite $(\|f(x_n)\|)_{n\geq 0}$ tend aussi vers $+\infty$. Montrer que f est propre.

3. Enoncer et montrer la réciproque de la question précédente.

4. On suppose que f est propre. Montrer que son image $f(\mathbb{R}^N)$ est fermée dans $\mathbb{R}^M$.

5. On suppose de plus que f est de classe C^1 et que pour tout x de $\mathbb{R}^N$, $Df(x)$ est une application linéaire inversible. Montrer que $N = M$ et que $f(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$.

6. Donner un exemple d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas propre.

Exercice 6.— (Question de cours)

1. Énoncer et démontrer le théorème donnant la condition d'ordre 1 sur les extrema d'une fonction de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$.

2. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $Df(0) = 0$, $D^2f(0)(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ pour tout vecteur $\vec{v}$, $D^2f(0)((1,0),(1,0)) > 0$ et f n'a pas de minimum local en 0.

3. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui admet un minimum local strict en 0, et pour laquelle il existe un vecteur $\vec{v} \neq 0$ tel que $D^2f(0)(\vec{v}, \vec{v}) = 0$.

4. Enoncer les deux théorèmes donnant des conditions d'ordre 2 sur les extrema locaux.
