Topologie et calcul différentiel (LM360) deuxième session
Eléments de corrigé

10 juin 2015

Durée : 3h. Sans documents. Téléphones portables éteints et rangés.

Exercice 1.—

1. L'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $[-1,1]$, muni de la "norme sup" définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)|,$$

est-il complet ? Justifier votre réponse en vous appuyant sur le cours.

Le cours dit que l'espace des fonctions continues bornées à valeurs dans un espace métrique complet est complet. L'espace $[-1,1]$, muni de la distance usuelle, est compact donc complet. Par compacité, toute fonction continue sur $[-1,1]$ est bornée. On conclut que l'espace X des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $[-1,1]$ est complet.

2. Soit $\Phi : [-1,1] \to [-1,1]$ une fonction de classe C^1 vérifiant $\forall t \in [-1,1], |\Phi'(t)| < 1$. Montrer qu'il existe un nombre $C \in [0,1[$ tel que, pour tous $x, y \in [-1,1]$,

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq C\,|x-y|\,.$$

Par hypothèse, la dérivée Φ' est continue. Par compacité, elle est donc bornée : soit $C = \sup|\Phi'|$; toujours par compacité le sup est atteint, et on a donc $C < 1$. On applique ensuite l'inégalité des accroissements finis.

3. Sous les mêmes hypothèses, montrer qu'il existe une unique fonction $f : [-1,1] \to [-1,1]$, continue, et telle que pour tout $t \in [-1,1]$,

$$f(t) = t\Phi(f(t)).$$

On considère la transformation

$$T : f \mapsto T(f) = (t \mapsto t\Phi(f(t)))$$

donc on vérifie qu'elle transforme un élément de l'espace complet X en un élément de X. La question revient à montrer que T a un unique point fixe. D'après le théorème de Banach-Picard, il suffit de montrer que T est contractante. On vérifie que c'est bien le cas à l'aide de la question précédente. [Remarquez qu'on a appliqué le théorème du point fixe dans un espace de fonctions, et non pas dans $\mathbb{R}$].

4. (Question optionnelle) Montrer que la fonction f trouvée à la question précédente vérifie

$$\|f\|_\infty \leq |\Phi(0)| \sum_{n\geq 0} C^n$$

où C est le nombre obtenu à la question 2.

D'après le théorème du point fixe de Banach-Picard, le point fixe f_∞ de T est la limite de toute suite définie par la relation de récurrence $f_{n+1} = T(f_n)$. Si l'on part de la fonction nulle f_0, la fonction f_1 est l'application affine $t \mapsto t\Phi(0)$, dont la norme sup est $|\Phi(0)|$. On majore ensuite la distance de f_0 à f_n comme dans la preuve du théorème, en appliquant n fois l'inégalité triangulaire et en utilisant la contraction. Par passage à la limite on obtient la majoration voulue.

Exercice 2.— Soit M un élement de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, où N est un entier strictement positif. Montrer que la formule

$$\Phi(M) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} M^{2n}$$

définit un autre élément de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. On pourra utiliser une norme particulière sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

On considère n'importe quelle norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^N$, et note $\|.\|$ la norme d'opérateur associée. Rappelons que cette norme fait de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ un espace vectoriel normé complet, et vérifie "l'inégalité d'algèbre" (la norme du produit est plus petite que le produit des normes). A l'aide de cette inégalité, on montre que la série proposée est absolument convergente :

$$\left\| \frac{(-1)^n}{(2n)!} M^{2n} \right\| \leq \frac{1}{(2n)!} \|M\|^{2n} < C \frac{1}{2^{n-n_0}}$$

dès que $n > n_0$ où n_0 est choisi de façon à ce que $\frac{\|M\|}{2n_0} < \frac{1}{2}$, et C est une constante à expliciter. Dans un evn complet toute série absolument convergente est convergente, ce qui montre l'existence de $\Phi(M)$.

Exercice 3.—

1. (Question de cours) Démontrer que dans un espace métrique la réunion de deux parties connexes par arcs, d'intersection non vide, est une partie connexe par arcs.

2. La réunion de deux parties connexes par arcs *disjointes* peut-elle être connexe par arcs ? On justifiera la réponse par une démonstration ou un exemple.

L'exemple le plus simple est obtenu en prenant la réunion de deux intervalle disjoints de $\mathbb{R}$ dont la réunion est un intervalle (Si, ça existe !). [Beaucoup de problèmes de logique dans les réponses à cette question. Donner un exemple de deux parties connexes et disjointes dont la réunion n'est pas *connexe ne répond pas à la question !]*

Exercice 4.— On considère une application $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. On suppose que $f(0) = 0$ et que f est différentiable en 0.

1. (Question de cours) Compléter la phrase suivante :

Puisque f est différentiable en 0 et $f(0) = 0$, on peut écrire, pour tout $\vec{h} \in \mathbb{R}^N$,

$$f(\vec{h}) = \text{...}$$

avec $o(\vec{h})$ négligeable devant $\vec{h}$, ce qui signifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{..} \quad .$$

On attendait ici la formulation en quantificateurs de $\lim o(h)/\|h\| = 0$.

Pour chaque entier $n > 0$, on définit une application $g_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ par la formule

$$g_n(x) = nf\left(\frac{x}{n}\right).$$

2. On se donne un point x de $\mathbb{R}^N$. Déterminer la limite de la suite $(g_n(x))_{n>0}$.

Le DL à l'ordre 1*, rappelé dans la question précédente, donne*

$$g_n(x) = nf\left(\frac{x}{n}\right) = nDf(0).\frac{x}{n} + n\ o\left(\frac{x}{n}\right) = Df(0).x + n\ o\left(\frac{x}{n}\right)$$

où la dernière inégalité vient de la linéarité de l'application $Df(0)$*. Il reste à vérifier que* x *étant fixé, la quantité* $no(\frac{x}{n})$ *tend vers* 0*, ce qui se fait à l'aide de la définition donnée en 1. On obtient que la suite converge vers* $Df(0).x$*.*

3. Soit $R > 0$. Montrer que la convergence de la question précédente est uniforme sur la boule $B(0,R)$ de $\mathbb{R}^N$.

Il s'agit donc de montrer que la suite de fonctions $x \mapsto n\ o(x/n)$ *converge uniformément vers* 0 *sur la boule* $B(0,R)$*. Soit* $\varepsilon > 0$*. D'apres la question précédente, il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \|o(h)\| < \frac{\varepsilon}{R}\|h\|.$$

Soit n_0 *un entier supérieur a* R/δ*. Soit* $n \geq n_0$ *et* x *un point de la boule* $B(0,R)$*. Alors* $\|x\|/n$ *est plus petit que* δ *(vérifier), on en déduit que*

$$\left\|o\left(\frac{x}{n}\right)\right\| < \frac{\varepsilon}{R}\frac{\|x\|}{n} < \frac{\varepsilon}{n}$$

et donc que $no(x/n) < \varepsilon$*, ce qu'on voulait.*

Exercice 5.—

1. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que la suite $(\|x_n\|)_{n\geq 0}$ ne tend pas vers $+\infty$.

a. Ecrire l'hypothèse à l'aide de quantificateurs.

On obtient

$$\exists M > 0\ \forall N > 0\ \exists n > N\ \ \|x_n\| < M.$$

b. Montrer qu'on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite bornée.

Il s'agit d'une construction classique de suite extraite. Soit M *donné par la phrase précédente. On construit par récurrence une suite strictement croissante d'entiers* (n_k) *telle que pour tout* k*,* $x_{n_k} < M$*. Soit* k *un entier, en supposant construits les* k *premiers termes* $n_1, ..., n_k$ *de la suite, on applique la propriété vérifiée par* M *avec* $N = n_k$*, on obtient un entier qu'on appelle* n_{k+1} *tel que* $x_{n_{k+1}} < M$*.*

c. Montrer qu'on peut extraire de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite convergente.

La suite précédente (x_{n_k}) est à valeurs dans l'intervalle compact $[-M, M]$, on peut donc en extraire une suite convergente, cette suite répond à la question car toute suite extraite d'une suite extraite de (x_n) est elle-même une suite extraite de (x_n).

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ une application continue. On dit que f est *propre* si l'image réciproque par f de toute partie compacte de $\mathbb{R}^M$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^N$.

2. On suppose que pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbb{R}^N$, si la suite $(\|x_n\|)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$, alors la suite $(\|f(x_n)\|)_{n\geq 0}$ tend aussi vers $+\infty$. Montrer que f est propre.

Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^M$, il s'agit de montrer que $f^{-1}(K)$ est compact. On prend donc une suite (x_n) d'éléments de $f^{-1}(K)$, il s'agit d'en extraire une suite convergente. Par définition de $f^{-1}(K)$, la suite $f(x_n)$ est dans K. En particulier elle est bornée, donc elle ne tend pas vers l'infini. Par contraposée de l'hypothèse, on en déduit que la suite $(\|x_n\|)$ ne tend pas non plus vers $+\infty$. D'après la question précédente, on peut donc en extraire une suite convergente, ce qui conclut.

3. Enoncer et montrer la réciproque de la question précédente.

Cette fois-ci on suppose que f est propre, on prend une suite (x_n) dont la suite des normes tend vers $+\infty$, il s'agit de montrer que la suite $(\|f(x_n)\|)$ tend aussi vers $+\infty$. Soit $M > 0$. Puisque f est propre et la boule fermée $B_f(0, M)$ est compacte, l'ensemble $f^{-1}(B_f(0, M))$ est aussi compact, donc borné, donc inclus dans une boule $B(0, M')$. Puisque la suite (x_n) tend vers l'infini, à partir d'un certain rang tous ses termes sont hors de $B(0, M')$, et en particulier en dehors de $f^{-1}(B_f(0, M))$. A partir de ce même rang, par définition de l'image réciproque, les termes de la suite $(f(x_n))$ sont donc en dehors de la boule $B_f(0, M)$. Ceci montre que la suite tend vers l'infini.

4. On suppose que f est propre. Montrer que son image $f(\mathbb{R}^N)$ est fermée dans $\mathbb{R}^M$.

On considère une suite d'éléments de l'image convergeant vers un point ℓ', il s'agit de voir que ℓ' est dans l'image. Par définition de l'image d'un ensemble, la suite s'écrit $(f(x_n))$. Puisqu'elle converge, elle ne tend pas vers l'infini ; puisque f est propre, d'après les questions précédentes, la suite (x_n) ne tend pas non plus vers l'infini, et on peut en extraire une suite (x_{n_k}) convergeant vers ℓ. Par continuité de f, la suite $(f(x_{n_k}))$ converge vers $f(\ell)$; d'autre part, en tant que suite extraite d'une suite convergente, elle converge aussi vers ℓ'. Par unicité de la limite, on en déduit $f(\ell) = \ell'$, ce qui montre que ℓ' est dans $f(\mathbb{R}^N)$, comme voulu.

5. On suppose de plus que f est de classe C^1 et que pour tout x de $\mathbb{R}^N$, $Df(x)$ est une application linéaire inversible. Montrer que $N = M$ et que $f(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^N$.

D'après le théorème d'inversion locale, l'application f est un difféomorphisme local, et l'image de tout ouvert de $\mathbb{R}^N$ est un ouvert de $\mathbb{R}^M$. En particulier, $f(\mathbb{R}^N)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^M$. D'autre part, on a vu à la question précédente que c'est aussi un fermé, et il n'est évidemment pas vide (il contient $f(0)$, par exemple). Par connexité de $\mathbb{R}^M$, on en déduit $f(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^M$.

6. Donner un exemple d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas propre.

N'importe quelle application bornée convient, par exemple l'application $x \mapsto 0$, ou bien l'application arctan.