LM360 **2013-2014**
Université Paris 6

Topologie et calcul différentiel (LM360)

deuxième session

2 juin 2013

Durée : 3h. Sans documents. Téléphones portables éteints et rangés.

Exercice 1.—(Question de cours) Voici un extrait du poly de cours :

> **Théorème. 5.5.1** *Soit E un espace de Banach ; l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui sont à distance strictement inférieure à 1 de* Id *sont inversibles dans $\mathcal{L}(E)$. Dit autrement,*
>
> $$\forall \ell \in B_{\mathcal{L}(E)}(\mathrm{Id}, 1)\,,\ \exists!\, \ell^{-1} \in \mathcal{L}(E)\ /\ \ell \circ \ell^{-1} = \ell^{-1} \circ \ell = \mathrm{Id}.$$
>
> *Démonstration.* Posons
> $$S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n (\ell - \mathrm{Id})^n.$$
>
> D'après la proposition 5.1.6, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément ℓ^{-1} de $\mathcal{L}(E)$ dès que $\|\ell - \mathrm{Id}\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$. Par ailleurs, on a
>
> $$\begin{aligned} S_N\ell &= S_N(\mathrm{Id} + \ell - \mathrm{Id}) \\ &= \mathrm{Id} - (-1)^{N+1}(\ell - \mathrm{Id})^{N+1} \\ &= \ell S_N. \end{aligned}$$
>
> En passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on conclut la démonstration de ce théorème. □

1. Que désigne $\mathcal{L}(E)$ dans ce texte ?

2. Donner deux exemples d'éléments de $B_{\mathcal{L}(E)}(\mathrm{Id}, 1)$.

3. À quel espace appartient S_N ?

4. Énoncer la proposition 5.1.6 dont il est question.

5. Détailler l'égalité entre $S_N\ell$ et $\mathrm{Id} - (-1)^{N+1}(\ell - \mathrm{Id})^{N+1}$ (on pourra poser $u = \ell - \mathrm{Id}$).

6. Détailler le passage à la limite évoqué par la dernière ligne.

Exercice 2.— On considère dans cet exercice une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pour tout nombre positif R, on note B_R la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon R dans le plan $\mathbb{R}^2$, et A_R son complémentaire.

1. Montrer que pour tout nombre $R \geq 0$, il existe un nombre $M \geq 0$ tel que $f(B_R) \subset [-M, M]$.

2. Montrer que pour tout nombre $R \geq 0$, l'ensemble A_R est connexe par arcs.

Pour la fin de l'exercice, on suppose que l'ensemble $f^{-1}(0)$ est compact. On veut montrer que f n'est pas surjective.

3. Montrer qu'il existe un nombre $R_0 \geq 0$ tel que $0 \notin f(A_{R_0})$.

4. Montrer que, pour le nombre R_0 donné par la question précédente, on a l'alternative suivante : ou bien $f(A_{R_0}) \subset]-\infty, 0[$, ou bien $f(A_{R_0}) \subset]0, +\infty[$.

5. Conclure.

Exercice 3.— Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (xe^y + 2y, 1 + \sin(3x + 4y))$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout point (a,b) à distance inférieure à ε du point $(0,1)$, il existe (x,y) tel que $f(x,y) = (a,b)$. *On pourra remarquer que* $f(0,0) = (0,1)$.

Exercice 4.— Soit d_1 un entier strictement positif, on note $\|.\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^{d_1}$. On se donne un ouvert U de $\mathbb{R}^{d_1}$.

1. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On considère une boule fermée $B_f(a,r)$, de centre a et de rayon r, incluse dans U. *Le but de cette partie est de montrer que f est lipschitzienne sur $B_f(a,r)$.* On note N la norme d'opérateur sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{d_1}, \mathbb{R})$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^{d_1}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$N(\ell) = \sup_{x \neq 0} \frac{|\ell(x)|}{\|x\|}.$$

On considère deux points x, y dans $B_f(a,r)$.

a. Montrer que la fonction $z \mapsto N(Df(z))$ est bornée sur $B_f(a,r)$.

b. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, le point $(1-t)x + ty$ est dans $B_f(a,r)$. *On pourra commencer par le cas où $a = 0$.*

c. On pose $\gamma(t) = f((1-t)x + ty)$. Exprimer $\gamma'(t)$ à l'aide de la différentielle de f.

d. En déduire une majoration de $|\gamma'(t)|$ pour t dans $[0,1]$.

e. En déduire une majoration de $|f(x) - f(y)|$ *(on pourra remarquer que $f(x) - f(y) = \gamma(1) - \gamma(0) = \int_0^1 \gamma'(t)dt$)*. Conclure.

2. On considère maintenant un entier d_2 strictement positif et une fonction $F = (f_1, \ldots, f_{d_2}) : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ de classe C^1.

a. Montrer que F est lipschitzienne sur $B_f(0,1)$ lorsqu'on munit $\mathbb{R}^{d_2}$ de la norme $\|.\|_\infty$ *(on pourra utiliser le résultat de la partie 1)*.

b. Montrer que F est lipschitzienne sur $B_f(0,1)$ lorsqu'on munit $\mathbb{R}^{d_2}$ de la norme euclidienne.

3. On considère à nouveau une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1, et une partie compacte C de U. Le but de cette partie est de montrer que f est lipschitzienne sur C.

a. Soit $r > 0$. Montrer que l'ensemble $\{(x,y) \in C \times C$ tels que $\|x - y\| \geq r\}$ est compact.

b. Montrer qu'il existe un nombre M_r tel que, pour tous points x, y de C tels que $\|x - y\| \geq r$, $|f(x) - f(y)| \leq M_r \|x - y\|$.

c. Montrer qu'il existe un nombre $r_0 > 0$ et des points $x_1, \ldots, x_n$ de C tels que

– les boules $B(x_1, r_0), \ldots, B(x_n, r_0)$ sont incluses dans U,

– les boules $B(x_1, r_0/2), \ldots, B(x_n, r_0/2)$ recouvrent C.

d. Montrer que pour tous points x et y de C qui sont à une distance plus petite que $r_0/2$ l'un de l'autre, l'une des boules $B(x_i, r_0)$ trouvées à la question précédente contient à la fois x et y.

e. Déduire de ce qui précède que f est lipschitzienne sur C. *On pourra utiliser la question 1.*

4. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$.
