Topologie et calcul différentiel (LM360)

deuxième session

18 juin 2013

Durée : 3h. Sans documents.

Question de cours. Soit E un espace vectoriel normé. On suppose que toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente. Montrer que E est un espace de Banach.

Exercice 1.— Dans cet exercice, on note respectivement $B(a,r)$ et $B_f(a,r)$ les boules ouverte et fermée de centre a et de rayon r. Soient k et N deux entiers strictement positifs, on considère k points distincts $a_1, \ldots, a_k$ de $\mathbb{R}^N$. On définit, pour tout entier positif n, l'ensemble

$$K_n = B_f(0, n+1) \setminus \bigcup_{j=1}^{k} B\Big(a_j, \frac{1}{n+1}\Big) \cdot$$

1. Démontrer que, pour tout entier n, l'ensemble K_n est une partie compacte de $\mathbb{R}^N$.

2. Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0\,,\ \forall j \in \{1, \cdots, k\}\,,\ B_f\Big(a_j, \frac{1}{n+1}\Big) \subset B(0,n).$$

3. Démontrer qu'il existe un entier n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, l'ensemble K_n est non vide.

4. Démontrer que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \mathbb{R}^N \setminus \{a_1, \cdots, a_k\}$.

5. Démontrer qu'il existe un entier n_2 tel que

$$\forall n \geq n_2\,,\ \forall (j,j') \in \{1, \cdots, k\}^2 \,/\, j \neq j'\,,\ B_f\Big(a_j, \frac{1}{n+1}\Big) \cap B_f\Big(a_{j'}, \frac{1}{n+1}\Big) = \emptyset.$$

6. Démontrer qu'il existe un entier n_3 tel que, pour tout entier $n \geq n_3$, le complémentaire de K_n a exactement $k+1$ composantes connexes.

Exercice 2.— Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application de classe C^1, et U un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On suppose que 0 appartient à U, et que 0 est un point fixe de f.

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et telle que, pour chaque entier n, x_n est un point fixe de f distinct de 0.

a. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, x_n appartient à U.

b. Montrer qu'il existe une suite extraite $(x_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite

$$\left(\frac{x_{\phi(k)}}{\left\|x_{\phi(k)}\right\|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

soit convergente. On note v sa limite.

c. Ecrire le développement limité de f à l'ordre 1 au point 0.

d. Montrer que $Df(0) \cdot v = v$.

2. Dans cette question, on suppose que 1 n'est pas valeur propre de $Df(0)$.

a. Montrer qu'il existe deux ouverts V et W, contenant 0, tels que l'application

$$(f - \mathrm{Id})_{|V}$$

est un C^1-difféomorphisme entre V et W.

b. Montrer que 0 est le seul point fixe de f dans V.

3. Comparer les résultats obtenus dans la question 1 et dans la question 2.

4. *(Cette question est totalement indépendante des précédentes)* Exprimer la différentielle de $f \circ f$ à l'aide de Df, d'abord en un point quelconque de U, puis en 0.

> **Rappels d'algèbre linéaire.** Etant donnée une application linéaire $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, un réel λ est dit *valeur propre* de Φ s'il existe un vecteur v non nul tel que $\Phi(v) = \lambda v$. Les valeurs propres sont aussi les racines du polynôme caractéristique $P(X) = \mathrm{Det}(\Phi - X\mathrm{Id})$. L'application Φ est bijective si et seulement si son déterminant est non nul.

Exercice 3.— Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xe^y + ye^x$.

1. Montrer que f n'a pas d'extremum local en un point (x, y) tel que x ou y soit positif ou nul.

2. Trouver un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, dont les deux coordonnées sont égales, et tel que $Df(x_0, y_0) = 0$.

3. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de f en ce point.

4. En déduire un développement limité de $f(x_0 + h, y_0 + h)$, et un développement limité de $f(x_0 + h, y_0 - h)$.

5. Conclure quant à la nature de ce point critique.

6. Montrer que la différentielle de f ne s'annule en aucun autre point du plan. Finalement, quels sont les extrema locaux de f ?
