Intégration des formes différentielles, théorème de Stokes

1 1-formes et 2-formes dans le plan $\mathbb{R}^2$

Exercice 1.— Formule de Green-Riemann

1. Rappeler la formule de Stokes pour l'intégrale d'une 1-forme le long d'une courbe fermée du plan.

2. Calculer les intégrales suivantes.

a. (2 méthodes) $\oint_{\partial D} x^2 y dx + xy^3 dy$, D étant le carré de sommets $(0,0),(2,0),(2,2),(0,2)$.

b. (2 méthodes) $\oint_C (x^2+y^2)dx + 2xydy$, C se compose de l'arc de parabole $y = x^2$ compris entre $(0,0)$ et $(2,4)$ et des segments qui vont de $(2,4)$ à $(0,4)$, et de $(0,4)$ à $(0,0)$.

c. $\oint_{\partial D} 2xydx + y^5 dy$, D étant le triangle de sommets $(0,0),(2,0),(2,1)$.

d. $\oint_{\partial D} x^2 ydx - xy^5 dy$, D le carré de sommets $(\pm 1, \pm 1)$.

e. $\oint_C x^2 dx + 3y^2 dy$, C définie par $x^6 + y^6 = 1$.

f. $\oint_C x^2 ydx - 6y^2 dy$, C le cercle unité.

g. (2 méthodes) $\iint_D xydxdy$, $D = \{(x,y),\ x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 2\}$.

h. $\iint_D \dfrac{dxdy}{(x+y)^2}$, $D = \{(x,y),\ x \geq 1, y \geq 1, x+y \leq 4\}$.

Exercice 2.—

1. Rappeler comment on déduit du théorème de Stokes que l'aire entourée par une courbe γ, orientée dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, est donnée par

$$S = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx.$$

2. Calculer l'aire comprise entre l'axe Ox et l'arche de la cycloïde d'équations $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$, avec $0 \leq t \leq 2\pi$.

2 Formes dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 3.— 2-formes dans $\mathbb{R}^3$

1. Soit S_1 le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1, \leq 0 \leq z \leq 1$. Soit $\alpha = z^2 xdy$.

a. Donner un paramétrage de S_1 à l'aide des coordonnées cylindriques.

b. Calculer $\omega = d\alpha$. **c.** Calculer l'intégrale $\iint_{S_1} \omega$.

2. Soit S_2 l'hémisphère Nord de la sphère unité.

a. Donner un paramétrage de S_2 à l'aide des coordonnées sphériques.

b. Calculer $\iint_{S_2} \omega$ à l'aide de ce paramétrage, où ω est la 2-forme $zdx \wedge dy$.

3. Soit S_3 la partie de la surface d'équation $z = \dfrac{x^2+y^2}{4}$ déterminée par $1 \leq z \leq 2$ et orientée suivant la normale qui pointe vers le haut. Calculer $\iint_{S_3} \frac{1}{x} dy \wedge dz$.

Exercice 4.—

1. Formule de Stokes-Ampère

a. Rappeler l'énoncé du théorème de Stokes pour une 1-forme α dans $\mathbb{R}^3$.

b. On reprend la question 1 de l'exercice 3. Retrouver par un autre calcul l'intégrale $\iint_{S_1} \omega$.

2. Formule de Green-Ostrogradski

a. Rappeler l'énoncé du théorème de Stokes pour une 2-forme ω dans $\mathbb{R}^3$.

b. Calculer $\iiint_B d\omega$, où B est la demi-boule d'équations $z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

c. On reprend la question 2 de l'exercice 3. Retrouver par un autre calcul l'intégrale $\iint_{S_2} \omega$.

Exercice 5.— Soit S la sphère unité orientée suivant la normale extérieure.

1. Calculer $\displaystyle\iint_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dz.$

2. Montrer que $\displaystyle\iint_S x^3 dy \wedge dz = \iint_S y^3 dz \wedge dx = \iint_S z^3 dx \wedge dz$. Que valent ces intégrales ?

3 Divergence et flux d'un champ de vecteurs

Exercice 6.—

1. Rappeler la formule du flux d'un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ à travers une surface paramétrée $(u, v) \mapsto M(u, v)$.

Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers la surface S où

2. $\overrightarrow{V} = (-2xz, 0, z^2)$, S_1 la surface de l'exercice 3 (comparer au résultat de cet exercice).

3. $\overrightarrow{V} = -e^y \overrightarrow{i} - ye^x \overrightarrow{j} - x^2 y \overrightarrow{k}$, S la partie du paraboloide $z = x^2 + y^2$ au-dessus du carré $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ orientée vers le haut.

4. $\overrightarrow{V} = -x^2 y \overrightarrow{i} + 3xy^2 \overrightarrow{j} - 4y^3 \overrightarrow{k}$, S la partie du paraboloide $z = x^2 + y^2 - 9$ au-dessous du rectangle $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$ orientée vers le bas.

5. $\overrightarrow{V} = y \overrightarrow{i} - x \overrightarrow{j} - 3z \overrightarrow{k}$, S la demi-sphère $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ orientée vers le bas.

Exercice 7.— Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers la surface S en utilisant la formule de Green-Ostrogradski.

1. $\overrightarrow{V} = 3x^2 z^3 \overrightarrow{i} + 9x^2 yz^2 \overrightarrow{j} - 4xy^2 \overrightarrow{k}$, S le bord du cube de sommets $(\pm 1, \pm 1)$.

2. $\overrightarrow{V} = x^2 y \overrightarrow{i} - x^2 z \overrightarrow{j} + z^2 y \overrightarrow{k}$, S le bord du parallélipipède rectangle formé par les plans $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$

3. $\overrightarrow{V} = xz \overrightarrow{i} + yz \overrightarrow{j} - z^2 \overrightarrow{k}$, S l'ellipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.

4. $\overrightarrow{V} = 2x^3 \overrightarrow{i} + 2y^3 \overrightarrow{j} + 2z^3 \overrightarrow{k}$, S la sphère unité.

5. $\overrightarrow{V} = (x^3 + y \sin z) \overrightarrow{i} + (y^3 + z \sin x) \overrightarrow{j} + 3z \overrightarrow{k}$, S le bord du domaine limité par les demi-sphères supérieures de centre 0 et de rayon 1, 2, et par le plan $z = 0$.

Exercice 8.— Soit $\vec{V} = (x/r^3, y/r^3, z/r^3)$, avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1. Calculer directement le flux de $\vec{V}$ à travers la sphère S de rayon r et de centre $O = (0, 0, 0)$.

2. Calculer également div$\vec{V}$. Que constatez-vous ? Expliquer pourquoi la formule de Green-Ostrogradski ne s'applique pas.

3. Que vaut le flux de $\vec{V}$ à travers une surface n'entourant pas O ? Et à travers une surface entourant O ?

Exercice 9.—
1. a. Rappeler la formule pour le flux d'un champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers une surface S donnée par un paramétrage $(s,t) \mapsto M(s,t)$. **b.** Rappeler la formule pour l'aire de cette surface. **c.** Qu'obtient-on lorsqu'on calcule le flux du vecteur unitaire normal à la surface ?

2. Application **a.** Soit S une partie de la sphère de centre 0 et de rayon R orientée suivant la normale extérieure. Montrer que

$$\text{Aire}(S) = \frac{1}{R}\iint_S xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

b. Calculer l'aire découpée sur la demi-sphère supérieure par le cylindre $x^2 + y^2 - Rx = 0$.

---

4 Rotationnel et circulation d'un champ de vecteurs

Exercice 10.— On considère le champ de vecteurs $\vec{V} = (-y^3, x^3 + z, xz^3)$.

1. Calculer le champ $\vec{W} = \operatorname{rot} \vec{V}$.

2. Que vaut le flux de $\vec{W}$ à travers une surface fermée ?

3. En déduire une façon simple de calculer le flux $\vec{W}$ à travers la surface S définie comme l'hémisphère "nord" $z > 0$ de la sphère unité.

4. Exprimer la circulation de $\vec{V}$ sur le bord de S par une intégrale simple. Donner sans calcul la valeur de cette intégrale.

Exercice 11.— On considère la 1-forme $\alpha = -y^3dx + (x^3 + z)dy + xz^3dz$.

1. Calculer $d\alpha$.

2. Que vaut l'intégrale de $d\alpha$ à travers une surface fermée ?

3. En déduire une façon simple de calculer $\int_S d\alpha$, où la surface S est définie comme l'hémisphère "nord" $z > 0$ de la sphère unité.

4. Exprimer l'intégrale de α sur le bord de S par une intégrale simple. Donner sans calcul la valeur de cette intégrale. Texte

---

Exercice 12.— Soit $\vec{V} = (yz, zx, xy)$.

1. Calculer $\operatorname{rot} \vec{V}$. Qu'en déduit-on sur $\vec{V}$?

2. Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long d'une courbe reliant deux points quelconques (a,b,c) et (a',b',c'). *On pourra utiliser la question précédente.*

Exercice 13.— Calculer le travail de $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe C, orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, vue d'en haut. On pourra utiliser la formule de Stokes.

1. $\overrightarrow{V} = xz\overrightarrow{i} + 2xy\overrightarrow{j} + 3xy\overrightarrow{k}$, C le bord de la partie du plan $3x + y + z = 6$ située dans le premier octant.

2. $\overrightarrow{V} = 2z\overrightarrow{i} + 4x\overrightarrow{j} + 5y\overrightarrow{k}$, C la courbe d'intersection du plan $z = x + 8$ et du cylindre $x^2 + y^2 = 16$.

3. $\overrightarrow{V} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + (x^2 + y^2)\overrightarrow{k}$, C la frontière de la partie du paraboloïde $z = 1 - x^2 - y^2$ dans le premier octant.