Chapitre 4 : champs de vecteurs et formes différentielles

Exercice 1.— Calculer

a) $(x^2dx + z^2dy + dz) \wedge (dx - 2dy - x^2dz)$.
b) $(e^z dx - e^y dz) \wedge (xdy + ydz)$.
c) $(-y^2dx + dy + 2ydz) \wedge (zdx \wedge dy + xdz \wedge dx)$.
d) $(xdy + ydz) \wedge (zdy + xdz) \wedge (xdz - zdx)$.
e) $d(x^3 + e^z) \wedge (2dx \wedge dy - xdy \wedge dz)$.
f) $df \wedge df$ où f est une fonction de classe C^1.
g) $dx \wedge dy$ où $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, en fonction des formes dr et $d\theta$.
h) $dx \wedge dy \wedge dz$ où x, y, z sont les coordonnées sphériques, en fonction des formes $dr, d\theta, d\phi$.

Exercice 2.— Calculer les différentielles des formes suivantes :

a) $\omega = xyz^2$.
b) $\omega = 2ydx + 3xdy$.
c) $\omega = 2xydx + x^2dy$.
d) $\omega_3 = 2xe^{x^2-y}dx - 2e^{x^2-y}dy$
e) $\omega_4 = yz^2dx + (xz^2 + z)dy + (2xyz + 2z + y)dz$.
f) $\omega = 3xydx \wedge dy$.
g) $\omega = zxdx \wedge dy$
h) $\omega = e^{x+y+z}[dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx]$.
i) [Cours] Calculer ddf où f est une fonction de classe C^2.

Exercice 3.—[Cours] On va montrer par un calcul, et en utilisant les relations entre formes différentielles et champs de vecteurs, que les opérateurs gradient noté $\overrightarrow{\text{grad}}$, rotationnel (noté rot en dimension 2 et $\overrightarrow{\text{rot}}$ en dimension 3) et divergence (noté div en dimension 3) sont induits par la différentielle extérieure.

a) Calculer la différentielle d'une fonction f. A quel opérateur vectoriel correspond-elle ?
b) Calculer la différentielle d'une 1-forme $\omega = fdx + gdy$ sur $\mathbb{R}^2$. A quel opérateur vectoriel correspond-elle ?
c) Calculer la différentielle d'une 1-forme $\omega = fdx + gdy + hdz$ sur $\mathbb{R}^3$. A quel opérateur vectoriel correspond-elle ?
d) Calculer la différentielle d'une 2-forme $\omega = fdy \wedge dz + gdz \wedge dx + hdx \wedge dy$ sur $\mathbb{R}^3$. A quel opérateur vectoriel correspond-elle ?

Exercice 4.—[Cours] Calculer le tiré en arrière $\Phi^*\omega$ de la forme différentielle $\omega = dx \wedge dy$ le long d'un changement de variables

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u, v) \mapsto \Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

(on remplacera simplement x et y par leur valeur en fonction de u et v).

Exercice 5.— Déterminer si les formes différentielles de l'exercice 2 ci-dessus sont exactes, et trouver une primitive si elles en ont.

Exercice 6.—[Difficile] On considère la forme différentielle $\omega = (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy$.

a) Montrer que ω n'est pas exacte.

b) Trouver une fonction $\psi(x)$, non nulle, telle que $\psi(x)\omega$ soit exacte. Trouver alors une fonction f telle que $df = \omega$. (On dit que ψ est un facteur intégrant.) Texte

Exercice 7.— Quel est le champ vectoriel qui dérive du potentiel

$$U(x, y, z) = 1 + x + xy + xyz?$$

Exercice 8.— On considère le champ vectoriel $\vec{V}(x, y) = (1+2xy, x^3 - 3)$. Ce champ est-il un champ de gradient ?

Exercice 9.— Calculer la circulation du champ vectoriel $\vec{V}(x, y) = (3x, x + y)$ le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct (indication : on pourra poser $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$, et calculer l'intégrale de la forme $\omega_{\vec{V}} := 3xdx + (x + y)dy$ sur le cercle en remplaçant x et y par leur valeur dépendant de t pour obtenir une 1-forme $f(t)dt$ sur $[0, 2\pi]$).

Exercice 10.— Calculer le travail W de la force $\vec{F}(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ le long de l'hélice H paramétrée par $x = \cos t$, $y = \sin t$ et $z = t$ où t varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 11.— On donne le champ vectoriel

$$\vec{V}(x, y, z) = (y^2 \cos x, 2y \sin x + e^{2z}, 2ye^{2z}).$$

a) Montrer que ce champ est un champ de gradient.

b) Déterminer le potentiel $U(x, y, z)$ dont dérive ce champ sachant qu'il vaut 1 à l'origine.

c) Quelle est la circulation de ce champ de $A(0, 1, 0)$ à $B(\frac{\pi}{2}, 3, 0)$?

Exercice 12.— On considère la forme différentielle

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy.$$

a) Dans quel domaine cette forme différentielle est-elle définie ?

b) Calculer l'intégrale curviligne $\int_C \omega$ où C est le cercle de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.

c) La forme ω est-elle exacte ?