# Chapitre 3 : intégrales multiples

**Exercice 1.—** Calculer

$$\int_0^1 dy \int_0^y x^2 dx, \quad \int_0^1 dy \int_0^y y^2 dx$$

$$\int_0^1 dx \int_0^x -\sin(x^2) dy, \quad \int_0^1 dx \int_{1-x}^{1+x} (2x+3y^2) dy$$

$$\int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^y 2xyz dx, \quad \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_0^{x+y} 3xy dz$$

$$\int_0^{\pi} dy \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} 2z \sin y dx, \quad \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^x -yz dz.$$

A l'aide du théorème de Fubini, interpréter chacun des calculs comme une intégrale double sur un domaine à déterminer. Dessiner les quatre premiers domaines.

**Exercice 2.—** Calculer les intégrales suivantes en utilisant le théorème de Fubini

$$\iint_D 2xy dx dy, \quad D = \{(x,y),\ 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}.$$

$$\iint_D (x+2y) dx dy, \quad D = \{(x,y),\ 1 \le x \le 3, 1+x \le y \le 2x\}.$$

$$\iint_D e^{x/y} dx dy, \quad D = \{(x,y),\ 1 \le y \le 2, y \le x \le 2y^3\}$$

$$\iint_D \frac{2}{x} dx dy, \quad D = \{(x,y),\ 1 \le y \le e, y^2 \le x \le y^4\}.$$

$$\iint_D x \cos y dx dy, \quad D \text{ borné par } y = 0, y = x^2, x = 2.$$

$$\iint_D 2xy dx dy, \quad D \text{ le premier quadrant du disque unité}$$

$$\iint_D y e^{2x} dx dy, \quad D \text{ le triangle de sommets } (0,0), (2,4), (6,0).$$

$$\iint_D xy dx dy, \quad D = \{(x,y),\ x \ge 0, y \ge 0, x+y \le 2\}.$$

$$\iint_D (x+2y) dx dy, \quad \text{où } D \text{ est le triangle de sommets } (0,0), (2,2), (4,0).$$

$$\iint xy dx dy, \quad D = \{(x,y),\ x \ge 0, y \ge 0, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\}$$

$$\iint \frac{dx dy}{(x+y)^2}, \quad D = \{(x,y),\ x \ge 1, y \ge 1, x+y \le 4\}.$$

$$\iint e^{2x+2y} dx dy, \quad \text{où } D \text{ est le triangle de sommets } (0,0), (1,1), (1,-1).$$

**Exercice 3.**— En utilisant un changement de variables, calculer

$$\iint_D x dx dy, \quad \text{où } D \text{ est le disque de centre 0 et de rayon 5.}$$

$$\iint_D y dx dy, \quad \text{où } D \text{ est le domaine dans le premier quadrant borné par le cercle}$$

$$x^2 + y^2 = 9 \text{ et les droites } y = x, y = 0.$$

$$\iint_D xy dx dy, \quad \text{où } D \text{ est le domaine dans le premier quadrant et compris}$$

$$\text{entre les cercles } x^2 + y^2 = 4 \text{ et } x^2 + y^2 = 25.$$

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad \text{où } D \text{ est l'anneau } 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16.$$

$$\iint_D \frac{dx dy}{1 + x^2 + y^2}, \quad \text{où } D \text{ est le disque unité.}$$

$$\iint \frac{dx dy}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}, \quad D \text{ étant la partie du plan comprise}$$

$$\text{entre les ellipses d'équations} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 16.$$

$$\iiint_D z dx dy dz, \quad \iiint_D z^2 dx dy dz \quad \text{et} \quad \iiint_D (x + y - z)^2 dx dy dz,$$

$$\text{où } D = \{(x, y, z),\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

---

**Exercice 4.**— Calculer le jacobien de la transformation donnée et calculer l'intégrale donnée en utilisant cette transformation.

a) $x = \frac{1}{3}(u + v)$, $y = \frac{1}{3}(v - 2u)$, $\iint_D (3x + y) dx dy$ où $D$ est le domaine borné par les droites $y = x - 2$, $y = x$, $y = -2x$ et $y = 3 - 2x$.

b) $x = 2u + 3v$, $y = 3u - 2v$, $\iint_D (2x + y) dx dy$ où $D$ est le carré de sommets $(0, 0)$, $(2, 3)$, $(5, 1)$, $(3, -2)$.

c) $x = u/v$, $y = v$, $\iint_D -xy dx dy$ où $D$ est dans le premier quadrant et borné par les droites $y = x$, $y = 3x$ et les hyperboles $xy = 1$, $xy = 3$.

---

**Exercice 5.**— Déterminer le jacobien de la transformation $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$. Calculer le volume du domaine limité par les plans de coordonnées et la surface $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 2$.

**Exercice 6.**— En utilisant les coordonnées cylindriques
a) Calculer
$$\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz$$
où $D$ est borné par le cylindre $x^2+y^2=4$ et les plans $z=-2$ et $z=2$.
b) Calculer
$$\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$$
où $D$ est borné par le paraboloide $z=16-x^2-y^2$ et le plan $Oxy$.
c) Calculer
$$\iiint_D xzdxdydz$$
où $D$ est borné par les plans $z=0$, $z=y$ et le cylindre $x^2+y^2=4$, dans le demi-espace $y\geq 0$.

**Exercice 7.**— En utilisant les coordonnées sphériques.
a) Calculer
$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$
où $D$ est la boule de centre 0 et de rayon 2.
b) Calculer
$$\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz$$
où $D$ est la demi-sphère unité supérieure.
c) Calculer
$$\iiint_D y^2dxdydz$$
où $D$ est la partie dans le premier octant de la boule de centre 0 et de rayon 2.

**Exercice 8.**— Caculer le volume compris entre
a) la surface d'équation $z=x^2+y^2$ et le plan $z=4$.
b) les surfaces d'équation $z=x^2+y^2-1$ et $z=1-x^2-y^2$.
c) la surface d'équation $z=x^2+4y^2$ et le plan $z=4$.

**Exercice 9.**— Trouver le centre de gravité de la plaque homogène limitée par la parabole $y=2x^2$ et la droite $y=2$.

**Exercice 10.**— Déterminer le centre de gravité du volume homogène défini par $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ et $x^2+y^2+z^2\leq 9$.

**Exercice 11.**— Calculer l'aire de la surface d'équation $z=xy$ qui se projette horizontalement sur le disque $x^2+y^2\leq 4$ dans le plan $Oxy$.

**Exercice 12.**— Calculer l'aire découpée sur le cône d'équation $z^2=x^2+y^2$ par le cylindre d'équation $x^2+y^2=4x$ et telle que $z\geq 0$.