Chapitre 1 : fonctions d'une variable

1 Fonctions, dérivées, différentielles

Exercice 1.— **1.** A l'aide des différentielles de Leibniz, calculer la dérivée de $\ln(u)$ où u est une fonction de x. **2.** Calculer la dérivée de $a^x = e^{x\ln(a)}$. **3.** Calculer la dérivée de de x^α.

Exercice 2.— Calculer de même les dérivées de $\sqrt{x^2+a^2}$, e^{-x^2}, x^x.

Exercice 3.—

1. Calculer la dérivée des fonctions réciproques suivantes : arcsin, arccos et arctan. Pour la première, on pourra différencier la relation $y = \sin(x)$.

2. Calculer de même la dérivée de la fonction racine carrée.

3. Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition et calculer la dérivée :

(a) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x$

(c) $f(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ (d) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$

(f) $f(x) = \arctan(\ln x)$

Exercice 4.— Evaluer les limites
a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x}$,
b. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^2}$,
c. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$.

Texte

Exercice 5.— Une masse m_1 est suspendue à une corde enroulée autour d'une poulie de poids M. Lorsque la masse m_1 tombe avec l'accélération a_y, la poulie tourne.
Montrer que les formules suivantes ne sont pas plausibles :
a. $a_y = Mg/(m_1 - M)$
b. $a_y = Mg/(m_1 + M)$
c. $a_y = m_1 g/M$.
On ne cherchera pas à déterminer la formule correcte.

---

2 Intégrales

Exercice 6.— Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1. $x\sqrt{x^2+1},\ \tan(2x)$

2. $\dfrac{6x-7}{3x^2-7x+11},\ \dfrac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2},\ \dfrac{1}{\sqrt{16-9x^2}}$

3. $\dfrac{x}{x^4+16},\ \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}},\ \dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$

4. $xe^x,\ x\sin x,\ \ln x,\ x^n \ln x,\ x\cos^2 x,\ \ln(x^2+1)$

5. $\sin^3 x,\ \tan^3 x,\ \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}$
6. $\cos^{10} x \sin x,\ (\sin^3 x)(\cos^3 x),\ \cos^5 x,\ x^2\cos^3 x,\ e^x\cos^3 x,\ e^x \cos^3 x \sin x.$

Exercice 7.—
1. Calculer une primitive de x^2e^{-x}.
2. En modélisant l'air de l'atmosphère comme un gaz parfait de température constante, on obtient que la densité de l'air à l'altitude z est donnée par $\rho(z) = \rho(0)e^{-\frac{z}{H}}$ avec $H \simeq 7,4km$ (source Wikipedia, masse volumique de l'air). On mesure $\rho(0) = 1,2kg/m^3$. Exprimer la masse totale de l'atmosphère par une intégrale.
3. En déduire une évaluation numérique de la masse de l'atmosphère.
4. Quel est, dans ce modèle, le centre de gravité de l'atmosphère ?

Exercice 8.— Calculer les intégrales suivantes :
1.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{3+\sin^2 t},\quad \int_8^3 \frac{dt}{t\sqrt{1+t}}$$

2.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$$ (On pourra procéder au changement de variables $t = tan(x/2)$)

Exercice 9.— Calculer l'aire des domaines suivants :

1. $\{\ (x,y) \mid 0 \le x,\ 0 \le y \text{ et } 1 \le x+y \le 2\}$

2. $\{\ (x,y) \mid 1 \le x \le 2 \text{ et } x \le y \le \mathrm{sh}x\}$

3. $\{\ (x,y) \mid 0 \le x \le \pi \text{ et } \sin^2 x \le y \le \sin x\}$

4. $\{\ (r,\theta) \mid \dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{3\pi}{2} \text{ et } r \le 1\}$

Exercice 10.— Dériver la fonction de x définie par

$$f(x) = \int_0^{x^2} \sin(t)dt.$$

Exercice 11.— On considère une plaque homogène, de densité constante 1, située entre la parabole d'équation $y = x^2$ et l'axe des abscisse :

$$P = \{(x,y) \mid x \in [0,L], 0 \leq y \leq x^2\}.$$

1. Fare un dessin.

2. Calculer la masse totale de la plaque.

3. Calculer l'abscisse du centre de gravité de la plaque (moyenne pondérée des absisses).

4. Calculer l'ordonnée du centre de gravité. *On pourra "retourner la plaque" et utiliser le graphe de la fonction racine carrée.*

5. (sans calcul) Que vaut

$$\int_0^{L^2} (L - \sqrt{x})dx \quad ?$$

---

3 Courbes paramétrées

Exercice 12.—

1. Soit $t \mapsto (R\cos(t), R\sin(t))$ le paramétrage habituel du cercle de rayon R.

2. Calculer le vecteur vitesse au temps t. Calculer le vecteur accélération. Représenter ces vecteurs sur un dessin.

3. Calculer la longueur du cercle.

4. On voudrait tester que la longueur ne dépend pas du paramétrage. Calculer à nouveau cette longueur en utilisant un paramétrage issu de l'équation $x^2 + y^2 = R^2$.

Exercice 13.— Tracer l'allure de la courbe paramétrée $M : t \mapsto (x(t), y(t))$ dont le tableau de variation conjoint est le suivant :

t	-2		-1		0		1		2
$x'(t)$	-4	$-$	-2	$-$	0	$+$	2	$+$	4
$x(t)$	4	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	4
$y(t)$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2
$y'(t)$	9	$+$	0	$-$	-3	$-$	0	$+$	9

On tracera notamment les vecteurs vitesse donnés par le tableau.

Exercice 14.— La courbe cycloide a pour équation paramétrique $x(t) = t + \cos(t), y(t) = 1 - \sin(t)$.

1. Déterminer les tableaux de variations des fonctions x et y, et dessiner la courbe.

2. Expliquer pourquoi cette équation représente le mouvement de la valve d'un pneu de vélo lorsque le vélo roule à vitesse constante.
