# Espaces de modules des variétés abéliennes

François Gatine

## Contents



## 1 Tores complexes et polarisations

Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $\Lambda$ un réseau de $\mathbb{C}^n$, où l'on entend par là un sous-$\mathbb{Z}$-module libre de type fini de $\mathbb{C}^n$ qui engendre $\mathbb{C}^n$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On peut alors considérer le quotient $\mathbb{C}^n/\Lambda$ de $\mathbb{C}^n$ par l'action de translation de $\Lambda$. Cette action étant libre et proprement discontinue, il existe une unique structure complexe sur $\mathbb{C}^n/\Lambda$ qui fait de la projection $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\Lambda$ une application holomorphe. Notons $T$ ce quotient, que l'on désigne par le nom *tore complexe*.

Observons tout d'abord que $T$ est compact. En effet, puisque une base $(e_1, \ldots, e_{2n})$ de $\Lambda$ est aussi une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}^n$, tout $z \in \mathbb{C}^n$ est dans l'orbite d'un complexe de la forme $\sum_{i=1}^{2n} x_i e_i$ avec $0 \leq x_i < 1$, ce qui signifie que le pavé fondamental

$$\left\{ \sum_{i=1}^{2n} x_i e_i : 0 \leq x_i \leq 1 \right\}$$

qui est compact, se surjecte continuement sur $T$. Observons ensuite que $T$ est *Kähler*. Cette propriété signifie que $T$ dispose d'une métrique bien particulière, dite de Kähler, et induit entre autre que la cohomologie de $T$ s'en retrouve équipée d'une symétrie bien particulière, étonamment indépendante du choix de la métrique en question.

Avant de rentrer dans les détails de ces dernières affirmations, venons-en au point qui motive cette section. La variété complexe $T$ est compacte Kähler, propriétés qu'elle partage avec une autre famille de variétés complexes: les variétés (algébriques) projectives. Par ailleurs, les variétés abéliennes, cas bien particulier de variétés projectives, sont des tores complexes. On est donc en droit de s'interroger sur la réciproque: à quelles conditions un tore complexe est projectif ?

## 1.1 Espace de module des tores complexes

Bien qu'un tore complexe soit entièrement déterminé par le choix d'un réseau, il arrive que plusieurs réseaux déterminent le même tore à isomorphisme près. Par "espace de module des tores complexes", on désigne un espace topologique (idéalement, muni d'une structure de variété différentielle, peut-être même complexe) dont les points s'identifieraient naturellement aux classes d'isomorphisme de tores complexes. Dans ce paragraphe, nous examinons comment exprimer de tels espaces. Pour la suite, on fixe $T = \mathbb{C}^n/\Lambda$ un tore complexe.

**Le cas** $n = 1$ Si l'on remplace $\Lambda$ par $\alpha\Lambda$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on obtient un tore $T'$ isomorphe à $T$ via la multiplication $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ par $\alpha$. Pour $n = 1$, c'est là la seule ambiguité que l'on peut s'autoriser sur le choix du réseau. En effet, si $T \simeq T'$ où $T' = \mathbb{C}/\Gamma$, l'isomorphisme se relève en une application holomorphe entre les revêtements universels

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

qui envoie $\Lambda$ dans $\Gamma$, et l'on peut composer par une translation pour supposer $f(0) = 0$. Si $\lambda \in \Lambda$, alors

$$z \mapsto f(z + \lambda) - f(z)$$

est une fonction continue de $z$ à valeurs dans $\Gamma$, elle est donc constante égale à $f(\lambda)$. On obtient alors que $f$ est à croissance polynomiale, et la théorie des fonctions holomorphes permet de conclure que $f$ est polynomiale. La propriété $f(n\lambda) = nf(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ force $f$ à être linéaire, ce qui conclut. L'espace des tores complexes de dimension 1 est donc égal à "l'espace des réseaux de $\mathbb{C}$ à homothétie complexe près".

Pour mieux comprendre ce dernier espace, observons qu'un réseau de $\mathbb{C}$ est déterminé par un élément $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, à savoir $\Lambda = g \cdot \mathbb{Z}^2$. Le stabilisateur de $\mathbb{Z}^2$ est par définition $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, donc l'ensemble des réseaux de $\mathbb{C}$ s'identifie au quotient

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

Par la suite, $\mathbb{C}^\times$ agit à gauche sur cet espace par l'action d'homothétie complexe. Matriciellement, le complexe $a + ib$ agit à droite par multiplication par la matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

L'espace des tores complexes de dimension 1 est alors donné par le double quotient

$$\mathbb{C}^\times \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

Si $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, alors en multipliant à gauche par la matrice correspondant à $\det(M)^{-1}$ on obtient que $M$ peut être représenté par une matrice de déterminant 1. Cela signifie que le double quotient est homéomorphe, via l'inclusion $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, au double quotient

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Ci-dessus, on voit $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ comme le sous-groupe (de Lie réel) de $\mathbb{C}^\times$ des matrices de déterminant 1. Nous allons identifier ce double quotient à un espace bien connu. Pour cela, observons que la transposition identifie ce double quotient à

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}).$$

Maintenant, rappelons que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit naturellement sur le demi-plan supérieur $\mathcal{H} = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ par la règle

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

C'est un exercice facile que de vérifier que cette action est transitive, et que le stabilisateur du point $i \in \mathcal{H}$ est le groupe compact $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. On peut donc identifier

$$\mathcal{H} \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}).$$

L'action à gauche de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est alors bien connu de quiconque a suivi un premier cours de théorie des formes modulaires, et il est classique que le quotient obtenu

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H} \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$$

s'identifie à $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Conclusion: l'espace des tores complexes de dimension 1 s'identifie à $\mathbb{C}$.

Cette conclusion est à rapprocher du fait que $\mathbb{C}$ est aussi l'espace des classes d'isomorphie de courbes elliptiques complexes (qui sont les variétés abéliennes en dimension 1) par l'intermédiaire du $j$-invariant. Ce fait reflète la surprenante coïncidence que tous les tores complexes de dimension 1 sont projectifs, et donc qu'un tore complexe de dimension 1 n'est rien d'autre qu'une courbe elliptique. Ceci n'est plus vrai dès $n = 2$.

**Le cas général** En dimension supérieure, deux tores complexes peuvent être isomorphes sans que leurs réseaux diffèrent d'une homothétie complexe. Par exemple, si $T_i = \mathbb{C}/\Lambda_i$ sont des tores en dimension 1, alors les réseaux $\Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ et $\alpha_1\Lambda_1 \oplus \alpha_2\Lambda_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^\times$, définissent des tores isomorphes à $T_1 \times T_2$ mais ne sont pas homothétiques.

Pour comprendre le cas général, procédons comme plus haut. Un réseau de $\mathbb{C}^n$ est déterminé par un élément $g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, à savoir $\Lambda = g \cdot \mathbb{Z}^n$. Le stabilisateur de $\mathbb{Z}^n$ est par définition $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Z})$, donc l'ensemble des réseaux de $\mathbb{C}^n$ s'identifie au quotient

$$\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) / \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Z}).$$

Il reste à comprendre à quelle condition deux réseaux donnés fournissent des tores isomorphes. Si $g : T \xrightarrow{\sim} T'$ où $T' = \mathbb{C}^n/\Gamma$, cet isomorphisme se relève à nouveau en une application holomorphe entre les revêtements universels

$$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n.$$

et, quitte à composer par une translation, on peut supposer $f(0) = 0$. On prétend que $f$ est linéaire. En effet, le revêtement universel de $T$ n'est rien d'autre que l'application exponentielle $\mathrm{Lie}(T) \to T$, où $\mathrm{Lie}(T)$ désigne l'algèbre de Lie en l'origine du groupe de Lie $T$. On peut donc écrire

$$f : \mathrm{Lie}(T) \to \mathrm{Lie}(T')$$

et puisque la différentielle en 0 $dg_0$ constitue un relèvement de $g$ nul en 0, on obtient $f = dg_0$ qui est bien linéaire. Elle est alors bijective car injective, d'où il découle que l'on a $f(\Lambda) = \Gamma$. Ainsi, deux réseaux définissant le même tore complexe sont envoyés l'un sur l'autre par un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. En conclusion, l'espace des tores complexes de dimension $n$ s'identifie au double quotient

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\backslash \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})/ \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Z}).$$

Avec le même argument que dans le cas $n = 1$, on peut simplifier les déterminants pour n'avoir que le quotient

$$(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R}))\backslash \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})/ \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{Z}).$$

Est-il possible d'identifier ce double quotient à un espace agréable, telle qu'une variété (complexe ?), comme ce fut le cas en dimension 1 ? Les choses ne sont plus aussi simple, puisque l'intersection $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ n'est plus compacte. D'après MathsOverflow question 126328, l'action de $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{Z})$ sur ce quotient n'est pas proprement discontinue, donc le quotient n'est pas Hausdorff. Ainsi, l'espace de module des tores complexes de dimension $n > 1$ n'est pas agréable à manipuler. A l'inverse, l'espace de modules des variétés abéliennes admettra une meilleure description.

## 1.2 Réalisation canonique du tore

Supposons donné un tore complexe $T$. Peut-on naturellement (c'est à dire ici, fonctoriellement) retrouver un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V$ de dimension $n$ ainsi, un réseau $\Lambda$ de $V$ et un isomorphisme $V/\Lambda \to T$ ? La réponse est oui: on sait déjà que $\exp : \mathrm{Lie}(T) \to T$ s'identifie au revêtement universel de $T$, le noyau de cette application est un réseau $\Lambda$, d'où l'isomorphisme canonique $\mathrm{Lie}(T)/ \ker \exp \simeq T$.

Cependant, lorsque nous passerons à l'étude des variétés abéliennes, cet argument ne sera pas accessible : bien que l'on puisse donner une définition algébrique de $\mathrm{Lie}(T)$, l'application exponentielle $\mathrm{Lie}(T) \to T$ n'est pas algébrique, son noyau n'admet donc pas a priori de description algébrique. Sur $\mathbb{C}$, ne pas s'autoriser des outils transcendentaux peut sembler relever du caprice ; en réalité, il y a une bonne raison à cela. Tout simplement, on cherche à développer une théorie des espaces de modules de variétés abéliennes valable sur un corps quelconque, indépendamment de plongements complexes s'ils existent. Il faudrait donc trouver une réponse à la question dans le cas complexe qui fasse intervenir seulement des outils algébriques, afin de généraliser au cas d'un corps quelconque. Cette réponse est fournie par la cohomologie.

**Homologie** Considérons l'homologie singulière $H_1(T, \mathbb{Z})$. On sait que ce groupe s'identifie canoniquement à l'abélianisé du groupe fondamental de $T$. Mais puisque $T \simeq \mathbb{C}^n/\Lambda$, ce groupe fondamental s'identifie à $\Lambda$ via cet isomorphisme, et en particulier est commutatif. Ainsi, $H_1(T, \mathbb{Z})$ est un candidat canonique de réseau définissant $T$, il ne reste plus qu'à trouver un espace complexe canonique dans lequel le plonger. On serait tenté de considérer

$$H_1(T, \mathbb{C}) = H_1(T, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$$

mais ce n'est pas la solution voulue. D'une part, il s'agit d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $2n$, le double de l'objectif, et d'autre part cet argument n'utilise pas la structure complexe sur $T$. Un bien meilleur candidat serait

$$H_1(T, \mathbb{R}) = H_1(T, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

qui a la bonne dimension réelle, mais il faut alors justifier que cet espace admet une structure canonique de $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et qu'alors le quotient par son réseau $H^1(T,\mathbb{Z})$ est bien isomorphe à $T$. La clé réside dans l'étude de la cohomologie de $T$.

**Cohomologie** Comme mentionné plus haut, $T$ est une variété Kählerienne. Cela signifie qu'elle est équipée d'une 2-forme fermée réelle non dégénérée $\omega$ (ce qui fait de $(T,\omega)$ une variété symplectique) compatible à la structure complexe au sens qui suit. Si $\mathcal{T}$ désigne le fibré tangent (réel) sur $T$, que $J:\mathcal{T}\to\mathcal{T}$ désigne la structure complexe sur $\mathcal{T}$ naturellement induite par la structure de variété complexe de $T$, alors

$$g(u,v) := \omega(u, Jv)$$

pour toutes sections locales $u$ et $v$, définit en tout point une forme bilinéaire symétrique définie positive. Pour justifier l'existence de $\omega$ pour le tore complexe $T$, on commence par considérer un revêtement universel

$$A = \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\Lambda \simeq T$$

et l'on définit sur $A$ la 2-forme non dégénérée $\omega_0 = \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^n d\overline{z_j}\wedge dz_j$, où $dz_j = dx_j + idy_j$ avec $x_j, y_j$ les coordonnées réelles sur $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Puisque $\omega_0$ est invariante par translation, elle descend en une 2-forme $\omega$ sur le quotient $\mathbb{C}^n/\Lambda \simeq T$. On vérifie sans problème la compatibilité à la structure complexe.

Les variétés Kähleriennes ont cette propriété que leur cohomologie singulière à coefficients complexes admet une décomposition canonique en terme de cohomologie des faisceaux. Dans le cadre particulier du tore complexe et du premier groupe de cohomologie, on peut écrire l'égalité de $\mathbb{C}$-espace vectoriels

$$H^1(T,\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = H^1(T,\mathbb{C}) = H^1(T,\mathcal{O}_T)\oplus H^0(T,\Omega_T).$$

où les deux facteurs de droite sont permutés par l'action de conjugaison issue de l'extension des scalaires à $\mathbb{C}$ à gauche. Cette factorisation porte le nom de *décomposition de Hodge*.

Il ne manque plus qu'un ingrédient pour munir $H_1(T,\mathbb{R})$ d'une structure complexe canonique: un lien entre homologie et cohomologie. Du moment que l'on travaille avec la cohomologie singulière à coefficients dans un corps, ce lien est aussi simple que possible: $H^i$ et $H_i$ sont duaux en tant qu'espaces vectoriels sur ce corps. On commence alors par le plongement

$$H_1(T,\mathbb{R}) \hookrightarrow H_1(T,\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(H^1(T,\mathbb{R}),\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^1(T,\mathbb{C}),\mathbb{C}).$$

Puisque le dual commute aux sommes directes,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^1(T,\mathbb{C}),\mathbb{C}) = H^1(T,\mathcal{O}_T)^\vee \oplus H^0(T,\Omega_T)^\vee$$

où l'exposant $(-)^\vee$ désigne le dual complexe. On peut donc composer avec une projection pour obtenir

$$H_1(T,\mathbb{R}) \hookrightarrow H^1(T,\mathcal{O}_T)^\vee \oplus H^0(T,\Omega_T)^\vee \twoheadrightarrow H^0(T,\Omega_T)^\vee.$$

Nous laissons en exercice la vérification que cette projection est un isomorphisme (utiliser la conjugaison complexe). Conclusion: la connaissance de la variété complexe abstraite $T$ permet de définir un second tore complexe $H^0(T,\Omega_T)^\vee/H_1(T,\mathbb{Z})$. Bien sûr, il faut encore vérifier que ce tore est isomorphe à $T$.

**Abel-Jacobi** Définissons un morphisme de groupes de Lie complexes

$$T \to H^0(T, \Omega_T)^\vee / H_1(T, \mathbb{Z}).$$

Tout d'abord, l'inclusion $H_1(T, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^0(T, \Omega_T)^\vee$ est encore assez formelle, commençons par en donner une interprétation concrète. A toute classe de 1-cycle $[\gamma] \in H_1(T, \mathbb{Z})$, on peut associer la forme linéaire complexe sur $H^0(T, \Omega_T)$

$$[\omega] \mapsto \int_\gamma \omega$$

et c'est un exercice que de vérifier que cette définition ne dépend d'aucun choix de représentant. On est alors tenté de définir

$$\begin{aligned} T &\to H^0(T, \Omega_T)^\vee / H_1(T, \mathbb{Z}) \\ P &\mapsto \left( [\omega] \mapsto \int_{0 \to P} \omega \right) \end{aligned}$$

où l'intégrale est parcourue sur un chemin fixé quelconque reliant le neutre 0 à $P$. Bien sûr, l'expression $\left([\omega] \mapsto \int_{0\to P} \omega\right)$ ne définit pas un élément de $H^0(T, \Omega_T)^\vee$, puisque la valeur de l'intégrale dépend du choix du chemin ; toutefois, changer de chemin revient à altérer la forme linéaire par une forme issue de $H_1(T, \mathbb{Z})$, ce qui assure la bonne définition après quotient. On montre sans grand souci que l'application est compatible aux lois de groupe. Par un calcul en coordonnées locales au voisinage du neutre, on se convainc que cette fonction est holomorphe, voire même un isomorphisme local. Enfin, puisqu'elle est injective (exercice), on obtient qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Le morphisme $T \to H^0(T, \Omega_T)^\vee / H_1(T, \mathbb{Z})$ porte le nom d'*application d'Abel-Jacobi*. Cette application montre qu'une réalisation canonique de $T$ comme quotient de l'espace affine par un réseau est possible à partir d'informations cohomologiques sur $T$. De plus, cette construction est fonctorielle, c'est à dire qu'étant donné un morphisme $T \to T'$ de tores complexes (c'est à dire un morphisme de groupes qui est une application holomorphe), on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & H^0(T, \Omega_T)^\vee / H_1(T, \mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T' & \longrightarrow & H^0(T', \Omega'_T)^\vee / H_1(T', \mathbb{Z}) \end{array}$$

justifiant le caractère "naturel" de cette réalisation. Notons au passage que l'application d'Abel-Jacobi a également un sens lorsque l'espace de départ est une surface de Riemann $C$, ce qui permet d'associer à toute courbe un tore complexe (et même mieux, une variété abélienne) qui, cette fois, ne lui est évidemment pas isomorphe.

**Matrice de périodes** A-t-on réussi notre objectif de construire une telle réalisation par des moyens purement algébriques ? La réponse est <u>non</u>, à cause de l'intervention de la décomposition de Hodge

$$H^1(T, \mathbb{C}) = H^1(T, \mathcal{O}_T) \oplus H^0(T, \Omega_T),$$

un outil particulièrement transcendental. On peut voir plus concrètement l'intervention d'objets transcendentaux de la façon suivante. Fixons une base $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n})$ de $H_1(T, \mathbb{Z})$ ainsi qu'une base $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ des 1-formes holomorphes, et considérons l'isomorphisme

$$\begin{aligned} H^0(T, \Omega_T)^\vee &\to \mathbb{C}^n \\ \lambda &\mapsto \begin{pmatrix} \lambda(\omega_1) \\ \vdots \\ \lambda(\omega_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On remarque que le réseau $H_1(T, \mathbb{Z})$ est envoyé sur $P\mathbb{Z}^{2n}$, où

$$P = \begin{pmatrix} \int_{\gamma_1} \omega_1 & \ldots & \int_{\gamma_{2n}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\gamma_1} \omega_n & \ldots & \int_{\gamma_{2n}} \omega_n \end{pmatrix}$$

est la *matrice des périodes*, de taille $n \times 2n$, dont les coefficients sont en général des nombres transcendants. On en déduit l'isomorphisme

$$T \simeq \mathbb{C}^g / P\mathbb{Z}^{2n}.$$

Si la base $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n})$ de $H_1(T, \mathbb{Z})$ est choisie de sorte que la restriction $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ soit une $\mathbb{C}$-base de $H^0(T, \Omega_T)^\vee$, et si l'on choisit la base $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ comme la duale de $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, alors la matrice $P$ est de la forme $(I_n \ Z)$ avec $Z$ une matrice complexe inversible $n \times n$. On obtient alors

$$T \simeq \mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^n + Z\mathbb{Z}^n).$$

## 1.3 Polarisations, tore dual

Venons-en à la question principale de cette section : à quelle condition un tore complexe est-il projectif ? Plus précisément, nous avons les formulations équivalentes

(i) le tore $T$ est projectif

(ii) le tore $T$ est algébrique

(iii) le tore $T$ est une variété abélienne

résultant du fait bien connu qu'une variété abélienne est une variété algébrique propre (comprendre compacte) munie d'une loi de groupe, et qu'elle est alors automatique projective.

Soit $T$ un tore que l'on suppose projectif. En tant que variété abélienne, il est alors équipé d'un fibré ample. Puisque nous savons que la donnée du tore complexe $T$ équivaut à la donnée de l'inclusion

$$H_1(T, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^0(T, \Omega_T)^\vee,$$

demandons-nous à quelle structure supplémentaire sur cette inclusion le fibré ample correspond-il.

**Plongements projectifs** Commençons par rappeler le cas d'une variété compacte Kähler quelconque $X$. Le théorème de Kodaira dit que $X$ est projective si et seulement s'il existe un fibré en droite holomorphe *positif*, c'est à dire un fibré holomorphe $L$ dont la *forme de courbure* $\Theta$ vérifie que $i\Theta$ est *positive*. Sans entrer dans les détails, la forme de courbure $\Theta$ est une 2-forme fermée sur $X$ construite à partir de trivialisations locales de $L$, et des calculs locaux révèlent que $i\Theta$ est en fait une $(1,1)$-forme réelle. On est alors ramenés à comprendre ce que signifie qu'une $(1,1)$-forme soit positive. Une $(1,1)$-forme réelle $\omega$ est positive si la forme bilinéaire

$$g(u,v) := \omega(u, Jv)$$

sur le fibré tangent réel $\mathcal{T}$ avec structure complexe $J : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, est définie positive. Par exemple, une forme de Kähler n'est rien d'autre qu'une $(1,1)$-forme réelle fermée positive. Le théorème de Kodaira se reformule en disant que $X$ est projective si et seulement si il existe une forme de Kähler issue d'un fibré en droite holomorphe.

Quelles sont donc les $(1,1)$-formes fermées issues de fibrés en droites holomorphes ? L'application qui associe à un fibré en droite holomorphe sa forme de courbure induit une application en cohomologie

$$\begin{aligned} c_1 : H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) &\to H^2_{dR}(X, \mathbb{R}) \\ [L] &\mapsto [i\Theta]. \end{aligned}$$

Remarquons que le théorème de de Rham fournit une identification avec la cohomologie singulière

$$H^2_{dR}(X,\mathbb{R}) \simeq H^2(X,\mathbb{R}).$$

De plus, la suite exacte exponentielle définit une application

$$\delta : H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \to H^2(X,\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(X,\mathbb{R}) \simeq H^2_{dR}(X,\mathbb{R}).$$

La question naturelle est donc de savoir si ces deux constructions coïncident. En s'armant de patience, les calculs en coordonnées locales fournissent la réponse: elles coïncident à $2\pi$ près,

$$\delta(L) = \left[\frac{i}{2\pi}\Theta\right].$$

Il reste à comprendre l'image de $\delta$. On plonge l'image dans la cohomologie singulière complexe,

$$\delta : H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \to H^2(X,\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(X,\mathbb{C}) = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$$

et puisque la forme de courbure est une $(1,1)$-forme l'image de $\delta$ vit dans $H^2(X,\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}$. Le théorème $(1,1)$ de Lefschetz affirme que réciproquement, toute classe de cette intersection est dans l'image de $\delta$. Ainsi une $(1,1)$-forme fermée est dans l'image de $\delta$ si et seulement si c'est une forme entière. Conclusion: $X$ est projective si et seulement s'il existe une forme de Kähler de classe de cohomologie entière.

**Le cas du tore complexe** Si $X = T$ est un tore complexe, sa cohomologie (en tant qu'anneau gradué) est entièrement déterminée par $H^1(T,\mathbb{Z})$. En particulier, on a un isomorphisme canonique

$$H^2(T,\mathbb{Z}) \simeq \wedge^2 H^1(T,\mathbb{Z}) \simeq \wedge^2 H_1(T,\mathbb{Z})^\vee$$

où ici $(-)^\vee$ désigne le dual au sens des groupes abéliens libres. Autrement dit, une classe de $H^2(T,\mathbb{Z})$ définit naturellement une forme bilinéaire alternée entière sur $H_1(T,\mathbb{Z})$. Cette forme s'étend en une forme alternée réelle sur l'espace vectoriel $H_1(T,\mathbb{R})$ qui s'interprète comme le tangent réel $\mathcal{T}_0$ en 0 de $T$, que l'on sait être muni d'une structure complexe $J$. On peut étendre les scalaires à $\mathbb{C}$ et utiliser la décomposition en espaces propres pour $J$

$$\mathcal{T}_0 \otimes \mathbb{C} = \mathcal{T}_0^{1,0} \oplus \mathcal{T}_0^{0,1}$$

pour obtenir l'identification de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$H_1(T,\mathbb{R}) \simeq T_0^{1,0}.$$

Ce n'est en fait rien d'autre que l'identification $H_1(T,\mathbb{R}) \simeq H^0(T,\Omega_T)^\vee$ déjà établie, vue sous l'angle des fibrés tangents réels et holomorphes. Pour résumer, une classe de $H^2(T,\mathbb{Z})$ définit une forme $\mathbb{C}$-linéaire alternée sur le tangent holomorphe $\mathcal{T}_0^{1,0}$ qui est entière sur son réseau $H^1(T,\mathbb{Z})$.

Supposons $T$ projectif. Un fibré ample fournit alors une forme de Kähler entière, c'est à dire une $(1,1)$-forme fermée réelle positive $\omega$ sur le tangent réel $\mathcal{T}$. On étend les scalaires à $\mathbb{C}$ et on restreint la forme au tangent holomorphe $\mathcal{T}^{1,0}$. Ce qui précède montre donc que $\omega$ définit une forme alternée complexe $\omega_0$ sur $\mathcal{T}_0^{1,0}$ à valeurs entières sur le réseau $H^1(T,\mathbb{Z})$. La positivité de $\omega$ se traduit par (exercice) la propriété suivante: la forme hermitienne

$$\forall u,v \in \mathcal{T}_0^{1,0},\ h(u,v) = -i\omega_0(u,\overline{v})$$

est définie positive sur le tangent holomorphe en 0. Notons $E$ la partie imaginaire de $h$, c'est une forme alternée réelle sur $T_0^{1,0}$ satisfaisant

$$\forall u,v \in \mathcal{T}_0^{1,0},\ E(iu,iv) = E(u,v)$$

et est à valeurs entières sur le réseau $H^1(T,\mathbb{Z})$ puisque c'était le cas de $\omega$.

Inversement, supposons que $E$ est une forme alternée réelle sur $\mathcal{T}_0^{1,0}$ vérifiant l'égalité ci-dessus, entière sur $H^1(T,\mathbb{Z})$, et telle que la forme hermitienne

$$\forall u,v \in \mathcal{T}_0^{1,0},\ h(u,v) = E(iu,v) + iE(u,v)$$

est définie positive. Nous allons en déduire que $T$ est projectif. On définit

$$\forall (u,v) \in \mathcal{T}_0^{1,0} \times T_0^{0,1},\ \omega_0(u,v) = ih(u,\overline{v})$$

qui se prolonge de façon unique en une $(1,1)$-forme alternée sur le complexifié $\mathcal{T}_0 \otimes \mathbb{C}$, qui elle-même provient d'une forme réelle sur $\mathcal{T}_0$ (exercice). Cette forme alternée sur le tangent en l'origine du groupe de Lie $T$ s'étend en une unique $(1,1)$-forme fermée réelle invariante $\omega$. Puisque $E$ est à valeurs entières sur $H^1(T,\mathbb{Z})$, on trouve que la classe de cohomologie de $\omega$ est entière en remontant les raisonnements plus haut. Puisque $h$ est définie positive, cette $(1,1)-$forme réelle fermée $\omega$ est positive. C'est donc une forme de Kähler entière sur $T$, ce qui implique la projectivité de $T$.

**Formes de Riemann** Soit $V$ un espace vectoriel complexe muni d'un réseau $\Lambda$. Une *forme de Riemann* sur $(V, \Lambda)$ est la donnée d'une forme alternée entière

$$E : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$$

dont l'extension $\mathbb{R}$-linéaire $E : V \times V \to \mathbb{R}$ satisfait

$$\forall u, v \in v \; E(iu, iv) = E(u, v)$$

et telle que la forme hermitienne

$$\forall u, v \in v \; h(u, v) = E(iu, v) + iE(u, v)$$

est définie positive. On dira aussi que $E$ est une forme de Riemann sur le tore complexe $V/\Lambda$. Dans le paragraphe précédent, nous avons donc établi que le tore $T$ est projectif si et seulement s'il existe une forme de Riemann sur $(\mathcal{T}_0^{1,0}, H_1(T, \mathbb{Z}))$, ou, de façon équivalente, sur $(H^1(T, \mathcal{O}_T^\times)^\vee, H_1(T, \mathbb{Z}))$. Nous dirons d'un tore complexe admettant une forme de Riemann (c'est à dire, un tore projectif, ou encore une variété abélienne) qu'il est *polarisable*. Nous avons donc établi une équivalence de catégorie entre les variétés abéliennes complexes et les tores polarisables.

**Relations bilinéaires de Riemann** Fixons une base $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n})$ de $H_1(T, \mathbb{Z})$ ainsi qu'une base $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ des 1-formes holomorphes. On a vu plus haut qu'on avait un isomorphisme

$$T \simeq \mathbb{C}^n / P\mathbb{Z}^n.$$

Soit $E$ une forme alternée entière sur $P\mathbb{Z}^n$. Si $A$ désigne la matrice de la forme $E$ dans la base $(Pe_1, \ldots, Pe_{2n})$ du réseau (c'est à dire l'image de la base $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n})$), un calcul classique montre que $E$ est une forme de Riemann si et seulement si les *relations bilinéaires de Riemann* suivantes sont satisfaites:

$$PA^{-1}P^T = 0, \;\; -iPA^{-1}\overline{P}^T > 0.$$

En choisissant astucieusement la base du réseau $P\mathbb{Z}^n$, on peut davantage simplifier ces relations. Puisque $E$ est une forme alternée entière sur un réseau, il existe une base $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n})$ de ce réseau dans laquelle la matrice de $E$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$$

où $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ est une matrice diagonale à coefficients entiers positifs (non-nuls car $E$ est non dégénérée), unique si l'on ordonne les coefficients par taille. Soient $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ la $\mathbb{C}$-base des formes holomorphes satisfaisant

$$\forall 1 \leq j, k \leq n, \; \int_{\lambda_j} \omega_k = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ \delta_j & \text{si } j = k. \end{cases}$$

En résumé, pour les choix de bases $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n})$ et $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, les matrices $P$ et $A$ s'expriment

$$P = (\Delta \; Z), \;\; A = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Un rapide calcul montre que les relations bilinéaires de Riemann s'écrivent alors simplement

$$Z^T = Z, \ \ \mathrm{Im}(Z) > 0.$$

Ainsi un tore complexe est projectif si et seulement s'il est isomorphe au quotient $\mathbb{C}^n/(\Delta\mathbb{Z}^n + Z\mathbb{Z}^n)$ avec $\Delta$ une matrice diagonale à coefficients entiers strictement positifs, et $Z$ une matrice symétrique à partie imaginaire définie positive. Les calculs qui précèdent montrent que le tore $\mathbb{C}^n/(\Delta\mathbb{Z}^n + Z\mathbb{Z}^n)$ est muni d'une forme de Riemann canonique, dont la matrice dans la base $(e_1, \ldots, e_n, Ze_1, \ldots, Ze_n)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut donc conclure qu'un isomorphisme $T \simeq \mathbb{C}^n/(\Delta\mathbb{Z}^n + Z\mathbb{Z}^n)$ identifie une forme de Riemann sur $T$.

**Tore dual et polarisation** Soit $T$ un tore complexe, $V$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un réseau $\Lambda$ tel que $T \simeq V/\Lambda$ (on a vu qu'il existe des candidats $V$ et $\Lambda$ fonctoriels en $T$). Posons

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{C} \mid f(\alpha v) = \overline{\alpha} f(v), f(v+w) = f(v) + f(w), \ \forall v, w \in V\}$$

ainsi que

$$\Lambda^* = \{f \in V^* \mid \mathrm{Im}\, f(\Lambda) \subseteq \mathbb{Z}\}.$$

On vérifie que $\Lambda^*$ est un réseau du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V^*$, et on note $T^\vee := V^*/\Lambda^*$ le *tore dual* à $T$. Cette construction est fonctorielle (contravariante) en $T$.

Si $T$ est polarisable (donc si $T$ est une variété abélienne), il est possible de le relier à son dual. Considérons une forme de Riemann $E$ sur $T$, et plus particulièrement $h$ la forme hermitienne définie positive associée. Alors on a une application $\mathbb{C}$-linéaire

$$\begin{aligned} V &\to V^* \\ v &\mapsto h(v, -) \end{aligned}$$

qui, par définition d'une forme de Riemann, est injective et envoie $\Lambda$ dans $\Lambda^*$. On en déduit un morphisme de tores complexes

$$\lambda_E : T \to T^\vee$$

appelée *polarisation*. Il s'agit d'un morphisme surjectif à fibres finies, aussi appelé *isogénie*. Le *degré* de la polarisation $\lambda_E$ est le cardinal de son noyau (qui coïncide avec le cardinal de chaque fibre).

En général, $T$ et $T^\vee$ ne sont pas isomorphes. S'il existe une forme de Riemann $E$ telle que $\lambda_E$ est de degré 1, c'est à dire un isomorphisme, on dit que $\lambda_E$ est une polarisation *principale*, ou encore que $(T, \lambda_E)$ est une *variété abélienne principalement polarisée*. On se convainc sans trop de difficulté qu'une polarisation est principale si et seulement si le déterminant de sa forme de Riemann vaut $\pm 1$. C'est par exemple le cas des Jacobiennes de surfaces de Riemann: une polarisation est donnée par la forme d'intersection en homologie, et la dualité de Poincaré assure qu'il s'agit d'un accouplement parfait.

Dans le paragraphe précédent, on a vu que tout tore complexe était isomorphe à un quotient

$$T \simeq (\Delta\mathbb{Z}^n + Z\mathbb{Z}^n)$$

avec $\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ une matrice diagonale à coefficients entiers strictement positifs et $Z$ une matrice symétrique à partie imaginaire définie positive, et la forme de Riemann sur le réseau $\Delta\mathbb{Z}^n + Z\mathbb{Z}^n$ était donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base $(\delta_1 e_1, \ldots, \delta_n e_n) =: (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On voit que la polarisation associée est principale si et seulement si $\Delta = I_n$, i.e. $\delta_j = 1$ pour tout $j$. Ainsi, un tore complexe est une variété abélienne principalement polarisée si et seulement s'il est isomorphe au quotient $\mathbb{C}^n/(\mathbb{Z}^n + Z\mathbb{Z}^n)$ avec $Z$ une matrice symétrique à partie imaginaire définie positive. Pour $n = 1$, on sait que tout tore complexe peut s'écrire sous la forme $\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ avec $\mathrm{Im}(\tau) > 0$, d'où l'on déduit que les tores complexes de genre 1 sont des variétés abéliennes principalement polarisées.

# 2 Variétés abéliennes et structures de niveau

Désormais, nous nous intéresserons uniquement aux tores complexes polarisables, c'est à dire aux variétés abéliennes. Nous noterons $A$, plutôt que $T$, une telle variété (complexe, mais désormais également algébrique), dont la dimension sera notée $g$ plutôt que $n$.

## 2.1 Variétés abéliennes polarisées

Nous avons vu qu'un tore est une variété abélienne si et seulement si il est polarisé, c'est à dire si l'on peut l'exprimer comme un quotient de $\mathbb{C}^g$ par un réseau sur lequel existe une forme alternée bien particulière, appelée forme de Riemann. Si $A$ est une variété abélienne équipée d'une forme de Riemann $E$, on a trouvé un isomorphisme

$$A \simeq T_{\Delta,Z}$$

où $T_{\Delta,Z} = \mathbb{C}^g/(\Delta\mathbb{Z}^g + Z\mathbb{Z}^g)$ (voir les notations plus haut) qui identifie $E$ avec la forme de Riemann canonique sur le quotient de droite, de sorte que $A$ est principalement polarisée si et seulement si $\Delta = I_g$.

**Variétés abéliennes polarisées à base symplectique de l'homologie** Cette écriture laisse penser qu'il doit être possible de paramétrer les variétés abéliennes polarisées par les couples $(\Delta, Z)$. Ce n'est pas exactement le cas: deux tels couples distincts peuvent induire des variétés abéliennes polarisées isomorphes. Prenons le problème dans l'autre sens et demandons nous: quelle famille d'objets les couples $(\Delta, Z)$ paramètrent-ils ? La réponse est la suivante: l'application

$$(\Delta, Z) \mapsto (T_{\Delta,Z}, (e_1, \ldots, e_g, Ze_1, \ldots, Ze_g), \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix})$$

fait correspondre les couples $(\Delta, Z)$ aux triplets $(A, \underline{e}, M)$ formés des variétés abéliennes $A$ dont une base symplectique $\underline{e}$ de l'homologie $H_1(A, \mathbb{Z})$ est fixée pour la forme de Riemann $E$ dont la matrice relativement à $\underline{e}$ est $M$ (le tout étant considéré à isomorphisme près, pour la notion la plus évidente d'isomorphisme prenant en compte ces structures). Un tel triplet sera appelé une *variété abélienne polarisée (de type $\Delta$) à base symplectique.*

Cette correspondance est familière dans le cas $g = 1$ des courbes elliptiques. Dans ce cas, $\Delta = 1$ (toutes les courbes elliptiques sont principalement polarisées, c.f. plus haut), $Z = \tau$ est un point du demi-plan supérieur de Poincaré : on obtient que le demi-plan supérieur paramétrise les couples $(E, (e_1, e_2))$ de courbes elliptiques $E$ dont on a spécifié une base symplectique $(e_1, e_2)$ de l'homologie entière pour l'accouplement d'intersection.

**Demi-espace supérieur de Siegel** Posons une fois pour toutes

$$\mathcal{H}_g = \{Z \in M_g(\mathbb{C}) \mid Z^T = Z, \ \mathrm{Im}(Z) > 0\}$$

le *demi-espace supérieur de Siegel.* Par ce qui précède, dès que l'on fixe $\Delta$, alors la correspondance précédente définit une bijection

$$\mathcal{H}_g \xrightarrow{\sim} \{\text{variété abélienne polarisée de type } \Delta \text{ à base symplectique}\}/\sim .$$

En particulier pour $\Delta = I_g$, $\mathcal{H}_g$ est un *espace de modules* pour les variétés abéliennes principalement polarisées à base symplectique. On obtient un espace de module pour les variétés abéliennes à base symplectique en considérant la réunion disjointe de copies de $\mathcal{H}_g$, une pour chaque type $\Delta$ possible.

On peut définir au dessus de $\mathcal{H}_g$ une *famille universelle* de variétés abéliennes polarisées de type $\Delta$ à base symplectique. Il s'agit de la famille

$$(Z, T_{\Delta,Z}, (e_1, \dots, e_g, Ze_1, \dots, Ze_g), \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}) \mapsto Z$$

qui n'est rien d'autre que la famille dont la fibre au dessus de $Z$ est la variété abélienne $T_{\Delta,Z}$, avec base d'homologie et polarisation spécifiées comme indiqué.

**Variétés abéliennes polarisées** Nous cherchons désormais à nous débarrasser de la nécessité de spécifier une base symplectique de l'homologie. On appelle *variété abélienne polarisée (de type $\Delta$)* la donnée d'une variété abélienne $A$ et d'une forme de Riemann sur son homologie entière, on souhaite définir un espace de module des variétés abéliennes polarisées de type $\Delta$.

Fixons $\Delta$. Soient $Z, Z' \in \mathcal{H}_g$, on se donne un isomorphisme $\varphi : T_{\Delta,Z'} \to T_{\Delta,Z}$ compatible aux polarisations. Notre objectif est d'identifier $\varphi$ à un élément $g$ d'un groupe $G$ agissant transitivement sur $\mathcal{H}_g$, de sorte que $Z' = g \cdot Z$, auquel cas l'espace de modules recherché s'exprimerait $G \backslash \mathcal{H}_g$.

Nous reprenons ici le raisonnement de [BL13], §8.1. Notons $\Lambda_Z$ et $\Lambda'_Z$ les réseaux définissant $T_{\Delta,Z}$ et $T_{\Delta,Z'}$. L'isomorphisme $\varphi$ provient d'un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire $u$

de $\mathbb{C}^g$ qui envoie $\Lambda_{Z'}$ sur $\Lambda_Z$, notons $M \in \mathrm{GL}_g(\mathbb{C})$ sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^g$, et $R \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{C})$ sa matrice dans les bases symplectiques de $\Lambda_{Z'}$ et $\Lambda_Z$ spécifiées par $Z'$ et $Z$. On a alors la relation (attention, on considère e.g. la matrice $(Z\ \Delta)$ au lieu de $(\Delta\ Z)$ comme plus tôt, car cela facilite les calculs pour la suite)

$$M(Z'\ \Delta) = (Z\ \Delta)R,$$

en effet $(Z\ \Delta)$ esprime la base réelle symplectique de $\Lambda_Z$ dans la base complexe canonique de $\mathbb{C}^g$, et de même pour $(Z'\ \Delta)$, donc ces deux matrices représentent l'action de $u$ de la base symplectique de $\Lambda_{Z'}$ vers la base canonique de $\mathbb{C}^g$. Remarquons que cette expression se transforme en

$$M(Z'\ I_g) = (Z\ I_g)\begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}^{-1}.$$

Notons alors

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}^{-1},$$

on en déduit les égalités

$$MZ' = Z\alpha^T + \beta^T, \quad M = Z\gamma^T + \delta^T.$$

Puisque $M$ est inversible, on peut exprimer $Z'$ en fonction de $Z$ comme suit:

$$Z' = (Z\gamma^T + \delta^T)^{-1}(Z\alpha^T + \beta^T)$$

et puisque $Z'$ est symétrique, on peut écrire

$$Z' = (\alpha Z + \beta)(\gamma Z + \delta)^{-1}.$$

Remarquons de plus que puisque $u$ est compatible aux formes symplectiques, on a

$$R^T \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui se traduit, en terme de $N$, par

$$N^T \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $N \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$. Mais rappelons nous que $R$ est à coefficients entiers, puisqu'elle définit le morphisme de $\mathbb{Z}$-modules $\Lambda_{Z'} \to \Lambda_Z$ dans leurs bases respectives, donc $N$ est à coefficients rationels. Plus précisément, si l'on pose

$$\Lambda_\Delta := \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \mathbb{Z}^{2n}$$

alors la définition de $N$ signifie que $N\Lambda_\Delta \subseteq \Lambda_\Delta$. La matrice $N^T$ est donc un élément du groupe

$$G_\Delta = \{Q \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Q}) \mid Q^T\Lambda_\Delta \subseteq \Lambda_\Delta\}.$$

On définit alors l'action de $Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G_\Delta$ sur $\mathcal{H}_g$ par

$$\forall Z \in \mathcal{H}_g,\ Q \cdot Z := (\alpha Z + \beta)(\gamma Z + \delta)^{-1}.$$

Nous avons donc montré que deux points de $\mathcal{H}_g$ correspondants à des variétés abéliennes polarisées isomorphes sont dans une même orbite par l'action de $G_\Delta$. Il n'est pas difficile de se convaincre que réciproquement, une orbite sous l'action de $G_\Delta$ est composée de variétés abéliennes polarisées isomorphes. L'espace de modules des variétés abéliennes polarisées de type $\Delta$ est donc donné, ensemblistement, par

$$G_\Delta \backslash \mathcal{H}_g.$$

En dernière remarque, assurons-nous que l'espace $G_\Delta \backslash \mathcal{H}_g$ a bien une structure de variété complexe. Le groupe $G_\Delta$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. L'action de $G_\Delta$ sur $\mathcal{H}_g$ est héritée d'une action de $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}_g$ (par exactement la même formule) qui est transitive: en effet, on peut montrer que tout point peut être atteint à partir de $Z = iI_g \in \mathcal{H}_g$. Le stabilisateur de $Z = iI_g$ s'identifie à $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R})$ qui est compact, ce qui garantit que l'action de $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}_g$ est propre. Il n'est alors pas difficile de montrer que les sous-groupes discrets de $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ agissent proprement discontinuement sur $\mathcal{H}_g$, et donc que le quotient

$$G_\Delta \backslash \mathcal{H}_g$$

admet une unique structure complexe canonique (au sens où la projection depuis $\mathcal{H}_g$ est holomorphe), qui en fait une variété analytique complexe de dimension $\dim \mathcal{H}_g = g(g+1)/2$. Pour $\Delta = I_g$, on a $G_\Delta = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$, on obtient l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées. En dimension $g = 1$, on obtient le quotient du demi-plan supérieur par $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, qui est isomorphe à $\mathbb{C}$.

**Espace de modules fin** Concentrons-nous désormais sur les variétés abéliennes principalement polarisées. Soit $B$ est une variété complexe connexe et soit $f : A \to B$ une famille holomorphe de variétés abéliennes polarisées de dimension relative $2g$. Par le théorème d'Erhesmann, les fibres de $f$ sont localement homéomorphes, ce qui permet d'identifier $H_1(A_b, \mathbb{Z})$ et $H_1(A_{b'}, \mathbb{Z})$ si $b, b' \in B$ sont assez proches. Autrement dit, on définit un faisceau localement constant en groupes abéliens $\mathcal{H}_1(-, \mathbb{Z})$ (aussi appelé un *système local*) qui recolle les groupes d'homologie des fibres. Il est sous-entendu que les polarisations définissent une "forme symplectique sur $\mathcal{H}_1(-, \mathbb{Z})$", c'est à dire que la forme symplectique $E_b$ sur chaque $H_1(A_b, \mathbb{Z})$ provient d'un morphisme de faisceaux (que l'on désignera encore par *polarisation*)

$$\mathcal{H}_1(-, \mathbb{Z}) \times \mathcal{H}_1(-, \mathbb{Z}) \to \underline{\mathbb{Z}}.$$

Soit $b_0 \in B$ et $U$ un voisinage simplement connexe de $b_0$. Le système local $\mathcal{H}_1(-, \mathbb{Z})$ se trivialise au dessus de $U$, on peut donc choisir une base $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2g})$ de sections, de sorte qu'en chaque $b \in U$, $\lambda^b = (\lambda_1^b, \ldots, \lambda_{2g}^b)$ est une base symplectique de $H_1(A_b, \mathbb{Z})$ pour la polarisation $E_b$. On en déduit une application (a priori ensembliste)

$$\begin{aligned} U &\to \mathcal{H}_g \\ b &\mapsto (A_b, \lambda^b, E_b) \end{aligned}$$

où l'on a identifié le demi-espace de Siegel $\mathcal{H}_g$ avec les triplets qu'il paramétrise. En revenant à la définition de cette paramétrisation, on observe que cette application associe essentiellement à $b$ la matrice des périodes de la fibre $A_b$ (étant fixées des bases), et c'est un fait (à ma connaissance non trivial, dû à Griffith) que cette fonction est holomorphe. Pour le démontrer, on voudrait se ramener à la question d'une intégrale à paramètre holomorphe, mais tant la forme que le cycle sur lequel on intègre dépendent de $b$, ce qui rend l'étude beaucoup plus difficile.

On aimerait uniformiser cette application définie localement. Seulement, la monodromie est susceptible d'agir pour changer la base $\lambda^b$ au voisinage de $b$. Le mieux que l'on puisse faire est d'en déduire une application holomorphe

$$\tilde{B} \to \mathcal{H}_g$$

définie sur un revêtement universel de $B$. De plus, cette application dépend du choix initial de la base $\lambda^{b_0}$, elle n'a donc rien de canonique en la donnée de seulement $f$ et de la polarisation (relative). Cette dernière observation nous met sur la bonne voie.

Supposons qu'en plus de $f : A \to B$ et de la polarisation, on dispose de la donnée d'un point $b_0$ et du choix d'une base $\lambda^{b_0}$ de l'homologie de $A_{b_0}$. Si l'on veut que l'application

$$\tilde{B} \to \mathcal{H}_g$$

se factorise par $B$, il est nécessaire et suffisant que la monodromie agisse trivialement sur cette base $\lambda^{b_0}$, ce qui est équivalent à demander à ce que ces sections soient globales ! Sous cette hypothèse, la donnée de $b_0$ et $\lambda^{b_0}$ équivaut finalement à la donnée d'une base $\lambda$ de sections globales de $\mathcal{H}_1(-, \mathbb{Z})$. A leur tour, cette donnée équivaut à celle d'un isomorphisme

$$\mathcal{H}_1(-, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{Z}}^{2g}$$

autrement dit, il s'agit de la donnée d'une trivialisation globale de l'homologie. Sous ces conditions, on dispose bien d'une application holomorphe

$$B \to \mathcal{H}_g.$$

Le fait que $\mathcal{H}_g$ soit un *espace de modules fin* signifie que ce morphisme est en fait totalement équivalent à la donnée initiale ($f$, la polarisation et la trivialisation de l'homologie). En effet, étant donné $B \to \mathcal{H}_g$, on peut tirer en arrière à $B$ la famille universelle des variétés abéliennes principalement polarisées, on vérifie que l'on obtient une donnée isomorphe à celle de départ. En conclusion:

$$\left\{\begin{matrix} \text{Familles de var. ab. principalement polarisées} \\ f : A \to B \text{ avec trivialisation } \mathcal{H}_1(-, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbb{Z}}^{2g} \end{matrix}\right\} \leftrightarrow \{\text{Morphismes } B \to \mathcal{H}_g\}.$$

Donc $\mathcal{H}_g$ ne paramétrise pas seulement chaque variété abélienne principalement polarisée avec base symplectique, mais aussi les familles de tels objets.

**Espace de modules grossier** On peut se demander si le quotient $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}_g$ ($G_\Delta\backslash\mathcal{H}_g$ pour les variétés abéliennes principalement polarisées) satisfait une propriété similaire. Cet espace complexe paramétrise les variétés abéliennes principalement polarisées, qu'en est-il des familles ? Cette fois, la réponse est négative.

En effet, considérons la courbe elliptique $E = C/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$, munie de la forme de Riemann telle que $E(1, i) = 1$. Cette courbe admet des automorphismes non-triviaux compatibles à la polarisation, par exemple la multiplication par $i$. L'existence de cet isomorphisme constitue une obstruction à ce que $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}_g$ soit un espace de modules fin. Il suffit en effet de considérer une famille isotriviale $A \to \mathbb{C}^\times$, c'est à dire dont toutes les fibres sont isomorphes à la courbe elliptique ci-dessus, mais qui ne soit pas triviale pour autant (au sens où cette famille n'est pas $E \times \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ avec la projection sur le second facteur). Si cette famille correspondait à un morphisme $\mathbb{C}^\times \to \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}_g$, ce morphisme serait constant par isotrivialité, mais tirer en arrière l'application constante fournit une famille triviale, donc distincte de $A \to \mathbb{C}^\times$.

L'espace analytique $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}_g$ est donc un *espace de modules grossier* pour les variétés abéliennes principalement polarisées, c'est à dire que ses points paramétrisent les classes d'isomorphies de ces objets. Nous venons de voir que ce n'est pas un espace de module fin pour autant, car il ne permet pas de paramétrer les familles de tels objets.

## 2.2 Structure de niveau

Nous disposons donc de deux espaces de modules pour comprendre les variétés abéliennes principalement polarisées: le demi-espace $\mathcal{H}_g$ et son quotient $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}_g$. Le premier est un espace de module fin, le second n'est qu'un espace de modules grossier. Cependant $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}_g$ dispose d'un avantage considérable : il est algébrique, là où $\mathcal{H}_g$ n'est qu'un espace analytique.

Bien que nous travaillions dans un contexte analytique complexe, disposer d'un espace de module algébrique est souhaitable: on veut paramétrer les familles $A \to X$ *algébriques* par des morphismes $X \to \mathcal{M}$ *algébriques*, où $\mathcal{M}$ serait une certaine variété *algébrique*. Si de plus la variété $\mathcal{M}$ s'avère être définie sur un corps de nombre, cela permet d'ouvrir la porte à l'étude de problèmes de modules de nature arithmétiques. Mieux encore, si $\mathcal{M}$ est de type fini sur un corps de nombre, peut-être existe-t-il un modèle entier qui paramétriserait les familles ayant bonne réduction. Pour ces raisons, il est souhaitable de disposer d'un espace de modules fin qui soit algébrique.

**Transcendance du revêtement universel** Puisque ni $\mathcal{H}_g$ ni $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}_g$ ne satisfont ces deux conditions simultanément, il est naturel de chercher un intermédiaire, par exemple en quotientant $\mathcal{H}_g$ par un sous-groupe bien choisi de $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$. En choisissant un sous-groupe d'indice fini, on peut s'attendre à obtenir encore une variété algébrique. En effet, $\mathcal{H}_g$ est le revêtement universel de $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}_g$ de groupe fondamental $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$, tout quotient $G\backslash\mathcal{H}_g$ par $G$ un sous-groupe d'indice fini définira un revêtement fini

$$G\backslash\mathcal{H}_g \to \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}_g$$

à but algébrique, ce qui laisse espérer que la source soit algébrique également. La situation est à comparer avec le revêtement universel $\mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times$, qui n'est pas un morphisme algébrique, alors que les revêtements intermédiaires finis, $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^n$, le sont.

**Le juste milieu** Comparons les problèmes de modules que $\mathcal{H}_g$ et $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}_g$ classifient. Dans le premier cas, on classifie les variétés abéliennes principalement polarisées en spécifiant une base de l'homologie, ce qui a pour conséquence de totalement rigidifier la situation: aucun automorphisme n'est possible, car il devrait agir trivialement sur l'homologie, donc sur le réseau du tore sous-jacent, donc sur le tore lui-même. Mais déterminer toutes ces bases fait intervenir des conditions de positivité qui éliminent l'algébricité de l'espace des modules. Dans le second cas, aucune base n'est spécifié, le problème se formule de façon purement algébrique, mais la situation n'est pas assez rigide et des automorphismes apparaissent.

Il faut donc trouver une donnée moins spécifique qu'une base de l'homologie, mais assez contraignante pour empêcher les automorphismes. Puisque l'homologie est un $\mathbb{Z}$-module, l'idée est de remplacer la donnée d'une $\mathbb{Z}$-base par la donnée de sa réduction modulo $N$ où $N \geq 2$ est un entier a priori quelconque. Ainsi, deux points de $\mathcal{H}_g$ seront identifiés s'ils définissent la même variété abélienne polarisée et que les bases symplectiques coïncident modulo $N$, et l'espace obtenu sera bien de la forme $G\backslash\mathcal{H}_g$ pour $G$ un certain sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$.

En quoi peut-on s'attendre à ce que ce remplacement élimine les automorphismes ? Le fait clé est le suivant: à $g$ fixé, il existe une borne uniforme sur le cardinal du groupe des automorphismes d'une variété abélienne $A$ de dimension $g$ (sans même spécifier de polarisation). En effet, la 2-torsion de $A$ est un groupe fini, il n'y a donc qu'un nombre fini de façon d'agir dessus. De plus, il n'y a qu'un nombre fini d'automorphismes de $A$ fixant la 2-torsion puisqu'alors si $A \simeq \mathbb{C}^g/\Lambda$ tout élément $\lambda$ d'une base de $\Lambda$ doit être envoyé sur $\pm\lambda$. En combinant ces deux assertions, on obtient le fait énoncé. On peut alors espérer qu'en choisissant $N$ assez grand, la donnée de la réduction modulo $N$ d'une base symplectique de l'homologie soit suffisante pour n'être préservée par aucun automorphisme de n'importe quelle variété abélienne.

La conclusion est que le problème de modules adapté semble être la classification des variétés abéliennes principalement polarisées avec la réduction modulo $N$ d'une base symplectique de l'homologie. En reprenant le raisonnement pour la détermination de $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{H}_g$, on obtient que l'espace de modules recherché s'écrit $\Gamma(N)\backslash\mathcal{H}_g$, avec

$$\Gamma(N) = \{Q \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) \mid Q \equiv I_g \mod N\}.$$

Bien heureusement, la variété $\Gamma(N)\backslash\mathcal{H}_g$ est algébrique et il s'agit effectivement d'un espace de modules fin dès que $N$ est assez grand.

**Interlude sur** $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ Un représentant d'une classe d'isomorphie du problème précédent est constitué de

$$(A, \underline{e} \mod N, E)$$

avec $A$ une variété abélienne principalement polarisée, $E$ une forme de Riemann sur l'homologie, et $\underline{e}$ une base de l'homologie symplectique. A priori, les notions suivantes ne sont pas interchangeables:

- la réduction modulo $N$ d'une base symplectique de $H_1(A, \mathbb{Z})$, et
- une base symplectique de $H_1(A, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

En effet, il n'est pas clair a priori qu'une base symplectique de $H_1(A, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ se relève toujours en une base symplectique de $H_1(A, \mathbb{Z})$. De façon surprenante, c'est en fait le cas. Pour s'en convaincre, observons que cette question est en fait équivalente à la surjectivité du morphisme de réduction

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

En effet, il est toujours possible, par un changement de base, d'exprimer un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini $\Lambda$ avec forme symplectique comme $\mathbb{Z}^{2n}$ muni de la forme symplectique usuelle. Dans ce contexte, toute base symplectique de $\Lambda$ (resp. $\Lambda/N\Lambda$) correspond à une matrice de $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ (resp. $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$) en exprimant ses vecteurs dans la base canonique.

A ma connaissance, il existe deux manières de prouver la surjectivité de

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}).$$

La première est la suivante: il s'agit de montrer que $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ est engendré par des matrices de transvections bien particulières, et que ces matrices se relèvent à $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$. Il est étonnamment difficile de trouver une référence pour ce fait, citons par exemple [NS64], Theorem 1.

La second méthode prend un détour par la théorie des groupes algébriques (ce qu'est $\mathrm{Sp}_{2n}$). Si $G$ est un groupe algébrique lisse sur $\mathbb{Z}$, la question est de savoir si la réduction

$$G(\mathbb{Z}) \to G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

est surjective. Si $\widehat{\mathbb{Z}}$ désigne la complétion profinie des entiers, la lissité de $G$ et le lemme de Hensel impliquent la surjectivité de

$$G(\widehat{\mathbb{Z}}) \to G(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$$

dont les fibres sont ouvertes (car le noyau l'est). On est donc ramenés à montrer que $G(\mathbb{Z})$ est dense dans $G(\widehat{\mathbb{Z}})$. Or, $G(\widehat{\mathbb{Z}})$ est un compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$, où $\mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{Z}$ désigne l'anneau des adèles finies, et son intersection avec $G(\mathbb{Q})$ donne $G(\mathbb{Z})$. On en déduit qu'il suffit finalement de montrer que $G(\mathbb{Q})$ est dense dans $G(\mathbb{A}_f)$ : c'est un énoncé d'approximation forte pour les groupes algébriques.

Pour quels groupes $G$ peut-on espérer cette densité ? L'énoncé d'approximation forte usuel, $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{A}_f$, n'est rien d'autre que le cas $G = \mathbb{G}_a$ du groupe additif. En revanche, le cas $G = \mathbb{G}_m$ constitue un contre-exemple, puisque $\mathbb{Q}^\times$ n'est pas dense dans les idèles finies $\mathbb{A}_f^\times$ (rappelons que la topologie des idèles n'est pas induite par son plongement dans les adèles). Plutôt que de s'en convaincre par un raisonnement sur les adèles, observont plutôt que si c'était le cas, alors par ce qui précède,

$$\mathbb{G}_m(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\} \to \mathbb{G}_m(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$$

serait surjective pour tout $N$, ce qui n'est pas le cas dès que $N \geq 5$.

L'approximation forte pour les groupes algébriques est valable pour les $\mathbb{Q}$-groupes algébriques connexes, semi-simples, simplement connexes et déployés sur $\mathbb{Q}$ (on ne définira pas ces termes ici), c'est donc le cas de $\mathrm{SL}_n$ et de $\mathrm{Sp}_{2g}$. Ces conditions sont suffisantes sans être nécessaires : $\mathbb{G}_a$ n'est pas semi-simple. Pour prouver cet énoncé, on commence par traiter le cas de $\mathrm{SL}_2$ à la main, notamment grâce au fait qu'il soit engendré par les matrices unipotentes

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$$

puis on montre que tout groupe algébrique comme ci-dessus est essentiellement engendré par des sous-groupes isomorphes à $\mathrm{SL}_2$. On pourra se référer aux notes [Rap12] pour plus de détails sur le sujet.

La conclusion de cet interlude est que le problème de module considéré, prendre une base symplectique de l'homologie $H_1(A, \mathbb{Z})$ puis la réduire modulo $N$, est en fait équivalent au problème de prendre une base symplectique de $H_1(A, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

**Structure de niveau et torsion** Fixons $A_0$ une variété abélienne de dimension $g$ principalement polarisée, et $N$ un entier assez grand. Se donner une base symplectique de $H_1(A_0, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ revient à se donner un isomorphisme

$$H_1(A_0, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g}$$

compatible à la structure symplectique. On peut donc conclure sur la nature d'espace de module de la variété algébrique $\Gamma(N)\backslash\mathcal{H}_g$:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Familles de var. ab. princ. pol. } A \to B \\ \text{avec trivialisation } \mathcal{H}_1(-, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})^{2g} \end{matrix} \right\} \leftrightarrow \{\text{Morphismes } B \to \Gamma(N)\backslash\mathcal{H}_g\}$$

et lorsque la base $B$ et la famille $A \to B$ sont algébriques, le morphisme $B \to \Gamma(N)\backslash\mathcal{H}_g$ est algébrique[1]. L'étude des familles de variétés abéliennes principalement polarisées avec structure de niveau se ramène donc à l'étude des variétés algébriques $\Gamma(N)\backslash\mathcal{H}_g$.

La structure de niveau sur $A_0$ admet une reformulation en terme de points de torsion de $A_0$. En effet puisque la cohomologie singulière de $A_0$ est sans torsion, on a les isomorphismes canoniques

$$H_1(A_0, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = H_1(A_0, \mathbb{Z})/NH_1(A_0, \mathbb{Z}) = \frac{1}{N}H_1(A_0, \mathbb{Z})/H_1(A_0, \mathbb{Z}).$$

Le quotient de droite s'identifie au sous-groupe $A_0[N]$ de $N$-torsion de $A_0$, par l'intermédiaire de l'isomorphisme canonique

$$A_0 \simeq H^0(A, \Omega_A)^\vee / H_1(A_0, \mathbb{Z}).$$

On en déduit deux choses. La première, c'est que le choix d'une polarisation induit une forme symplectique sur la $N$-torsion de $A_0$, pour tout $N$, de manière compatible aux projections. La seconde, c'est que le choix d'une structure de niveau $N$ revient au choix d'un isomorphisme symplectique

$$A_0[N] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{2g}.$$

[1] En fait [Bor72] montre que $N$ assez grand de sorte que $\Gamma(N)$ soit sans torsion, il suffit que la base $B$ soit algébrique pour que la famille $A \to B$ le soit aussi.

On peut donc reformuler le problème de modules pour $\Gamma(N)\backslash\mathcal{H}_g$:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Familles de var. ab. princ. pol. } A \to B \\ \text{avec trivialisation } A[N] \xrightarrow{\sim} (\underline{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}})^{2g}\end{array}\right\} \leftrightarrow \{\text{Morphismes } B \to \Gamma(N)\backslash\mathcal{H}_g\}$$

La variété $\Gamma(N)\backslash\mathcal{H}_g$ est appelée *variété modulaire de Siegel de niveau $N$*. C'est une variété algébrique quasi-projective, qui peut être compactifiée en une variété projective.