27 novembre 25

Corps de modules
VS
Corps de définition

Dans cet exposé j'ai présenté la notion de **corps de modules** bien souvent moins connue que celle de **corps de définition**. L'objectif ayant été de :

- montrer le lien entre les deux notions,
- interpréter géométriquement la notion de corps de modules à travers l'exemple d'espaces de modules de courbes,
- donner des critères permettant de savoir si les deux notions coïncident,
- traiter un exemple explicite où les deux notions ne coïncident pas mais dont l'origine incite plutôt à considérer le corps de modules.

1 Introduction.

Soient k un corps et $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Je note $\Gamma := \mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$ et considère $\Gamma \curvearrowright A$ une action à orbites finies.

Définition 1. *Un sous-corps $k \subset K \subset \overline{k}$ est dit* ***corps de modules pour*** *$a \in A$ si pour tout $\gamma \in \Gamma$ fixant K, $a^\gamma = a$. On appelle* ***corps de modules universel*** *de a l'intersection de tous ses corps de modules, noté $\mathscr{M}(a)$.*

La correspondance de Galois assure que le corps de modules universel est déterminé par l'égalité

$$\mathrm{Gal}(\overline{k}|\mathscr{M}(a)) = \mathrm{Stab}_\Gamma(a)$$

qui est donc d'indice fini, en particulier $\mathscr{M}(a)|k$ est de degré fini.

Si $\mathscr{M}(a)|k$ est galoisienne alors l'image de l'action $\Gamma \curvearrowright \mathrm{Orb}_\Gamma(a)$ est $\mathrm{Gal}(\mathscr{M}(a)|k)$, et en général si $\mathscr{M}(a) = k(\alpha)$ alors

$$\Gamma \curvearrowright \{\text{conjugés de } \alpha\} \simeq \Gamma \curvearrowright \mathrm{Orb}_\Gamma(a)$$

En général pour disposer d'une action de Γ, faut que les éléments de A soient « définis » sur $\overline{k}$ et pour avoir des orbites finies faut qu'ils soient en fait « définis » chacun sur une extension finie de k. C'est ce que nous allons avoir dans la section suivante. Dans la suite on dit **corps de modules** pour dire **corps de modules universel**.

2 Géométrie algébrique.

Soit S un schéma sur k. Je note $\overline{S}$ le schéma obtenu après extensions des scalaires à $\overline{k}$. Nous allons considérer C une sous-catégorie de $\mathsf{Sch}_{/\overline{S}}$. En effet on dispose d'une action de Γ sur C donnée par les changements de base $\gamma : \mathrm{Spec}(\overline{k}) \to \mathrm{Spec}(\overline{k})$. C'est une action sur une catégorie au sens on où on dispose d'équivalences de catégories $X \mapsto X^\gamma$ qui sont compatibles par composition, autrement dit un morphisme $\Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathsf{C})$. S'en déduit une action ensembliste

$$\Gamma \curvearrowright \{\text{classes d'isomorphismes de } \mathsf{C}\}$$

Cette action est à orbites finies si on se restreint aux schémas de type fini. On peut toujours considérer le foncteur oubli $(X \to \overline{S}) \mapsto X$ (je dis qu'un $\overline{k}$–schéma est donné par un morphisme $X \to \mathrm{Spec}(\overline{k})$) qui induit une inclusion

$$\mathscr{M}(X) \subset \mathscr{M}(X \to \overline{S})$$

Définition 2. *Soit K une sous-extension de $\overline{k}|k$. On dit que K est* ***un corps de définition*** *pour $X \to \overline{S}$ ou que $X \to \overline{S}$* ***admet un modèle sur*** *K si existe $Y \to T$ un morphisme de K–schémas tel que $(\overline{Y} \to \overline{T}) \simeq (X \to \overline{S})$.*

En suit immédiatement la proposition suivante.

Proposition 1. *1)*

$$\mathscr{M}(X \to \overline{S}) \;\subset \bigcap_{K \text{ déf de } X \to \overline{S}} K$$

2) Dans le cas des courbes projectives lisses y a égalité dans l'inclusion.

En général le corps des modules n'est pas un corps de définition !

3 Courbes.

Dans la suite « courbe » signifie « courbe projective lisse ». On pose $k = \mathbb{Q}$ et $S = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Q}$, et C est la catégorie des courbes avec les morphismes entres courbes algébriques. Je note (en laissant de côté sa définition champêtre...) $\mathcal{M}_g(\overline{\mathbb{Q}})$ l'ensemble des courbes de genre g à isomorphisme près sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

$\boxed{g = 0}$. Dans ce cas $\mathcal{M}_0(\overline{\mathbb{Q}}) = \{\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}}\}$ et la droite projective est défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Donc tout courbe X de genre 0 vérifie $\mathscr{M}(X) = \mathbb{Q}$ et est un corps de définition pour X.

$\boxed{g = 1}$. Y a un isomorphisme $\mathcal{M}_1(\overline{\mathbb{Q}}) \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}$ donné par le j–invariant, si E est une courbe elliptique donnée par l'équation $y^2 = x^3 + ax + b$ alors

$$j(E) = 1728 \frac{4a^3}{4a^3 + 27b^2} \in \mathbb{Q}(a, b)$$

En suit que $\forall \gamma \in \Gamma, j(E^\gamma) = j(E)^\gamma$, et donc $\mathrm{Stab}_\Gamma(E) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}(j(E)))$, c'est-à-dire

$$\mathscr{M}(E) = \mathbb{Q}(j(E))$$

et est un corps de définition pour E car $E \simeq E'$ où E' est donnée par l'équation

$$y^2 = 4x^3 - \frac{27j(E)}{j(E) - 1728}(x - 1)$$

$\boxed{g = 2}$. Toutes les courbes de genre 2 sont hyperelliptiques et on a un revêtement

$$(\mathbb{P}^1 \backslash \{0, 1, \infty\})^3 \backslash \{\exists i \neq j | \alpha_i = \alpha_j\} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\overline{\mathbb{Q}})$$

qui envoie un triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sur la courbe donnée par l'équation

$$y^2 = x(x - 1)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$$

La fibre est donnée par les triplets obtenus par les six transformations engendrées par $\alpha_i \mapsto 1/\alpha_i$, $\alpha_i \mapsto 1 - \alpha_i$ ainsi que les permutations des α_i. En genre 2 le corps de modules d'au moins une courbe n'est pas un corps de définition. Par exemple la courbe X donnée par le triplet $(-1, \zeta t, \zeta/t)$, où $\zeta = \exp(2i\pi/3)$ et $t \in \mathbb{Q}\backslash\{0, 1\}$. En effet y a au plus un conjugé par Galois, le conjugué complexe $\overline{X}$ dont le triplet est donné par

$$(-1, \zeta^2 t, \zeta^2/t) = ((-1)^{-1}, (\zeta/t)^{-1}, (\zeta t)^{-1})$$

qui est donc dans la même fibre que $(-1, \zeta/t, \zeta t)$ qui lui est dans la même fibre que $(-1, \zeta t, \zeta/t)$. En suit que $X \simeq \overline{X}$ et donc que $\mathscr{M}(X) = \mathbb{Q}$, mais Earle a donné un argument de géométrie projective pour démontrer que si $t > 0$ alors X n'admet pas de modèle sur $\mathbb{Q}$.

Comme dans le cas de genre 1 on peut se demander si en fait n'existeraient pas des quantités qui génèreraient $\mathscr{M}(X)$. En fait, leur nom l'indiquant, les corps de modules doivent être considérés comme des corps résiduels sur des espaces de modules grossiers des objets étudiés ($\mathbb{A}^1$ pour $\mathcal{M}_1$) et donc générés par des coordonnées sur l'espace (comme j pour $\mathcal{M}_1$).

Igusa a construit un espace de modules grossier pour les courbes de genre 2, qui sont toutes hyperelliptiques, comme le quotient d'un schéma affine sur

$\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Et on peut en effet définir 4 nombres, appelés invariants d'Igusa, $i_1(X), i_2(X), i_3(X), i_4(X)$ vérifiant

$$i_1 i_3 - i_2^2 - 4 i_4 = 0$$

qui sont des expressions polynomiales à coefficients entiers des coefficients du polynôme de droite dans une équation pour X donnée par

$$y^2 = x^5 + \cdots$$

Théorème 1. (Igusa) *Considérons la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par*

$$(j_1, j_2, j_3, j_4) \sim (\xi j_1, \xi^2 j_2, \xi^3 j_3, \xi^4 j_4) \quad (\xi \in \mu_5)$$

Alors les invariants d'Igusa induisent une bijection entre $\mathcal{M}_2(\overline{\mathbb{Q}})$ et

$$\{(j_1, j_2, j_3, j_4) \in \overline{\mathbb{Q}}^4, j_1 j_3 - j_2^2 - 4 j_4 = 0\}/\sim$$

Il en suit que

$$\mathscr{M}(X) \subset I(X) := \mathbb{Q}(i_1(X), i_2(X), i_3(X), i_4(X))$$

Réciproquement, notons L la clôture galoisienne de $I(X)$. Si les invariants sont $\neq 0$ alors on peut en déduire qu'existe un cocycle $\theta : \mathrm{Gal}(L|\mathscr{M}(X)) \longrightarrow \mu_5$ tel que

$$i_k(X)^\gamma / i_k(X) = \theta(\gamma)^k$$

En supposant que $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L|\mathscr{M}(X)), \mu_5) = 0$ on obtient l'inclusion

$$\mathbb{Q}(i_1(X)/\xi, i_2(X)/\xi^2, i_3(X)/\xi^3, i_4(X)/\xi^4) \subset \mathscr{M}(X)$$

où $\xi \in \mu_5$. Il en suit que $\xi \in \mathscr{M}(X)$ et donc finalement $I(X) = \mathscr{M}(X)$.

On peut également dès le début adjoindre les éléments de μ_5. Soit $\xi \in \mu_5$. Si le groupe de cohomologie à coefficients triviaux $\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L|\mathscr{M}(X)(\xi)), \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ s'annule alors on a

$$\mathscr{M}(X)(\mu) = I(X)(\mu)$$

$\boxed{g \geqslant 3}$. Les courbes ne sont pas toutes hyperelliptiques et même pour celles-ci l'étude devient difficile, par exemple $\mathcal{M}_3$ est de dimension 6 mais les courbes hyperlliptiques forment une sous-variété de dimension 5 pour lesquelles on peut définir 9 invariants, dits de Shioda, avec 4 relations algébriques.

4 Obstructions.

On possède un théorème très général sur les variétés quasi-projectives.

Théorème 2. *Soit X une variété quasi-projective définie sur un corps de nombres F. Soit $F|M$ une extension galoisienne. Alors l'action de Γ se factorise par $\mathrm{Gal}(F|M)$, et X admet un modèle sur M si et seulement si existe une famille d'isomorphismes $(\rho(g) : X^g \to X)_{g \in \mathrm{Gal}(F|M)}$ vérifiant la condition de cocycle donnée par la commutativité du diagramme*

$$\begin{tikzcd} X^{gh} \arrow[r] \arrow[dr] & X^h \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

Soit G le groupe de monodromie de $X \to \overline{S}$ un revêtement de courbes. On note $\mathscr{M} = \mathscr{M}(X \to \overline{S})$. Dans [1] on montre le théorème suivant

Théorème 3. *Existe une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathscr{M})$ sur G stabilisant son centre et une famille $(\Omega_\delta)_{\delta\in\Delta}$ de classes de $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathscr{M}), Z(G))$ vérifiant la propriété que $\mathscr{M}$ est un corps de définition pour $X \to \overline{S}$ si et seulement si une des classes Ω_δ est nulle.*

Dans [2] on a un critère plus simple mais moins général

Proposition 2. *Supposons que $A := \mathrm{Aut}(X \to \overline{S})$ soit abélien et que $X \to \overline{S}$ admette un modèle sur F extension galoisienne de $\mathscr{M}$. Alors $X \to \overline{S}$ admet un modèle sur $\mathscr{M}$ si et seulement si $\mathrm{H}^2(\mathrm{Gal}(F|\mathscr{M}), A) = 0$.*

5 Exemple.

Traitons l'exemple du revêtement $\beta : E \to \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}}$ donné par $E : y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, où $\lambda = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, et

$$\beta = \frac{v(1-v)}{4} \qquad v = 2x(x-1) + \frac{1}{2}$$

Ici on a donc $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Comme β ne dépend que de x le revêtement admet l'involution elliptique $(x, y) \mapsto (x, -y)$ comme automorphisme, et on vérifie que c'est le seul automorphisme. Donc $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et est un module trivial sous $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})|\mathbb{Q})$. Par ailleurs on vérifie que $\mathscr{M}(E \to \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}}) = \mathbb{Q}$ car E et son conjugé par $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})|\mathbb{Q})$ sont isomorphes via

$$(x, y) \mapsto (1 - x, \sqrt{-1}y)$$

Or $\mathrm{H}^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0$ donc d'après la proposition 2 le revêtement n'admet pas de modèle sur $\mathbb{Q}$. Remarquons que E admet un modèle sur $\mathbb{Q}$ car

$$j(E) \in \mathscr{M}(E) \subset \mathscr{M}(E \to \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}}) = \mathbb{Q}$$

(ou plus simplement car $j(E) = 8000\ldots$) Par conséquent si on choisit un modèle sur $\mathbb{Q}$ pour E alors le modèle pour β sera nécessairement à coefficients irrationnels !

Pourquoi cet exemple ? On peut définir la classe d'isomorphisme sur $\overline{\mathbb{Q}}$ de $E \to \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}}$ par un objet combinatoire (un dessin d'enfant, voir [3]) pour lequel aucun *corps de définition* n'est privilégié : seul fait sens son *corps de modules*.

6 Références.

[1] : Algebraic covers : field of moduli versus field of definition, Pierre Dèbes, Jean-Claude Douai, Annales scientifiques de l'É.N.S., 1997.

[2] : On the fields of definition of genus-one covers of $\mathbb{P}^1$, Alexander Molyakov, Bulletin of the London Mathematical Society, 2023.

[3] : Dessins d'Enfants on Riemann Surfaces, Gareth Jones, Jürgen Wolfart, Springer, 2016.