NOMBRE DE COMPOSANTES CONNEXES D'UNE VARIETE REELLE ET $\mathbb{R}$ – PLACES

Danielle GONDARD-COZETTE
danielle.gondard@imj-prg.fr

Abstract.

The purpose of this paper is to present results and open problems related to $R-$places. The first section recalls basic facts, the second introduces $R-$places and their relationship with orderings and valuations.

The third part involves Real Algebraic Geometry and gives results proved using the space of $R-$places. Theorem 14 gives explicitly, in terms of the function field of the variety, the number of connected components of a non-empty smooth projective real variety.

The fourth and fifth parts are devoted to the links with the real holomorphy rings and the valuation fans. Then we present an approach to abstract real places and conclude with some open questions.

—

Résumé.

Le but de cet article est de rassembler des résultats et des questions concernant un objet mal connu mais souvent utile, les $R-$places, et de fournir les références correspondantes.

Nous commençons par rappeler les notions de base, puis présentons quelques résultats de géométrie réelle obtenus grâce aux $R-$places. En particulier le théorème 14 donne explicitement, en termes de corps des fonctions de la variété, le nombre de composantes connexes d'une variété réelle projective lisse et non vide.

Nous montrons ensuite quels sont les liens entre les $R-$places et d'autres objets comme les ordres de niveau supérieur, les éventails valués et l'anneau d'holomorphie réel. Enfin nous passons au cas des $R-$places dans des espaces d'ordres abstraits et concluons par quelques questions ouvertes.

1 Rappels

1.1 Espaces des ordres d'un corps

Rappelons le résultat bien connu obtenu par Artin-Schreier en 1927 :

Theorem 1 *Un corps K commutatif ordonnable est caracterisé par $-1 \notin \sum K^2$, où $\sum K^2$ est l'ensemble des sommes finies de carrés d'éléments de K.*

Cet ensemble $\sum K^2$ est aussi égal à l'ensemble formé des éléments positifs dans tous les ordres du corps.

On sait qu'il existe alors $P \subset K$ tel que $P + P \subseteq P$, $P.P \subset P$, $-1 \notin P$, $P \cup -P = K$; P est un ordre total compatible avec la structure de corps de K.

Definition 2 *On désigne par $\chi(K)$ l'espace des ordres P de K. La topologie usuelle sur $\chi(K)$ est celle de Harrison engendrée par les ouverts-fermés*

$$H(a) = \{P \in \chi(K) \mid a \in P\}.$$

Muni de cette topologie $\chi(K)$ est un espace compact, totalement disconnexe.

Il a été montré par Craven [8] que tout espace compact totalement disconnexe était homéomorphe à l'espace $\chi(K)$ des ordres d'un corps K.

1.2 Les places réelles

Definition 3 *Une place sur un corps K est une application*

$$\varphi : K \to F \cup \{\infty\}$$

où F est un corps, telle que $\varphi(1) = 1$ et qui satisfait les règles d'homorphisme usuelles pour la somme et pour le produit.

Definition 4 *On appelle place réelle, une place telle que le corps F est ordonnable (ou réel-clos). Si $F = \mathbb{R}$, la place réelle est appelée une $\mathbb{R}-$place.*

Toutes les $\mathbb{R}-$places d'un corps peuvent être obtenues à partir de l'espace des ordres du corps $\chi(K)$ en utilisant certaines valuations réelles.

1.3 Les valuations réelles

Definition 5 *Une valuation, au sens de Krull, est une application surjective $v : K^* \twoheadrightarrow \Gamma$, où $\Gamma = (\Gamma, +, \leq)$ est un groupe abelien totalement ordonné, telle que*

$\forall x, y \in K^*$, $v(xy) = v(x) + v(y)$.

$\forall x, y \in K^*$, $x + y \neq 0$, $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$.

L'anneau de la valuation v est défini par :

$$A = \{a \in K \mid a = 0 \text{ ou } v(a) \geqslant 0\},$$

et l'idéal maximal de A est donné par :

$$I = \{a \in K \mid a = 0 \text{ ou } v(a) > 0\};$$

le groupe des unités est

$$A^* = A \backslash I$$

et le corps résiduel

$$k_v = A/I$$

Definition 6 *La valuation v est réelle si et seulement si le corps résiduel k_v est ordonnable.*

Un corps commutatif K admet des valuations réelles si et seulement si il est ordonnable (on dit aussi formellement réel).

Plus précisément, si P est un ordre donné de K, alors l'enveloppe convexe de $\mathbb{Q}$ dans K
$$A(P) = \{a \in K \mid \exists r \in \mathbb{Q}, -r \leq_P a \leq_P r\}$$
est un anneau de valuation et
$$I(P) = \{a \in K \mid \forall r \in \mathbb{Q}^*, -r \leq_P a \leq_P r\}$$
est son idéal maximal ; P induit sur le corps résiduel $k_v = A(P)/I(P)$ un ordre archimédien $\overline{P}$.

2 Les $\mathbb{R}-$places

2.1 $\mathbb{R}-$place associée à un ordre

Pour une présentation très détaillée de ces notions on pourra consulter [14], et pour d'autres résultats [17].

Soit K un corps ordonnable, P un ordre de K ; on sait d'après ce qui précède que $(k_v,\overline{P})$ se plonge avec unicité dans $(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$; on note i ce plongement et π l'application canonique de K dans $k_v \cup \{\infty\}$ (où si $a \notin A(P)$, alors $\pi(a) = \infty$).

Definition 7 *La $\mathbb{R}-$place associée à P est $\lambda_P : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ définie par le diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "\lambda_P"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ & k_v \cup \{\infty\} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Explicitement : $\lambda_P(a) = \infty$ si $a \notin A(P)$, et si $a \in A(P)$, alors
$$\lambda_P(a) = \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid a \leq_P r\} = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq_P a\}.$$

2.2 L'espace des $\mathbb{R}-$places

Definition 8 *L'espace des $\mathbb{R}$-places d'un corps est $M(K) = \{\lambda_P \mid P \in \chi(K)\}$, où $\chi(K)$ désigne l'espace des ordres du corps K.*

L'espace $M(K)$ est muni de la topologie la plus grossière rendant continues les applications évaluations définies pour tout $a \in K$ par

$$e_a : M(K) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$\lambda \mapsto \lambda(a)$$

$M(K)$ muni de cette topologie est un espace compact séparé, et l'application

$$\Lambda : \chi(K) \longrightarrow M(K)$$

$$P \mapsto \lambda_P$$

est continue, fermée et surjective.

La topologie de $M(K)$ est aussi la topologie quotient héritée de $\chi(K)$.

2.3 Lien avec les ordres de niveau supérieur (Becker [3])

Definition 9 *Soit K un corps ordonnable commutatif. $P \subset K$ est un ordre de niveau exact n si $0, 1 \in P$, $-1 \notin P$, $P + P \subset P$, $P.P \subset P$, P^* est un sous-groupe de K^*, et $K^*/P^* \simeq \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$.*

Les ordres de niveau 1 sont les ordres totaux usuels.

Les ordres de niveau supérieur peuvent aussi être compris en utilisant des signatures : $P = \ker \sigma \cup \{0\}$, où $\sigma : K^* \to \mu_{2n}$ est un morphisme de groupes abéliens de noyau additivement fermé, et où μ_{2n} désigne l'ensemble des racines $2n$-ièmes de l'unité.

A tout ordre de niveau supérieur on associe, comme pour un ordre usuel, une unique $\mathbb{R}-$place ; un tel ordre étant un cas particulier d'éventail valué nous renvoyons le lecteur au §5 plus loin.

Ces ordres de niveau supérieur présentent des liens importants avec les sommes de puissances.

Dans toute la suite $\sum K^{2p}$ désigne l'ensemble des sommes finies de puissances $2p$-ièmes d'éléments de K.

Theorem 10 *Sont équivalents (p premier) :*
(1) $\sum K^2 \neq \sum K^{2p}$
(2) K admet un ordre de niveau exact p.

Theorem 11 *Pour tout entier $n \geq 1$ on a*

$$\sum K^{2n} = \bigcap_{P \text{ ordre dont le niveau divise } n} P$$

Exemple : Si $K = \mathbb{R}((\mathbb{X}))$, les deux ordres usuels sont

$$P_+ = K^2 \cup XK^2 \text{ et } P_- = K^2 \cup -XK^2$$

et pour tout p premier il y a deux ordres de niveau p *:*

$$P_{p,+} = K^{2p} \cup X^p K^{2p} \text{ et } P_{p,-} = K^{2p} \cup -X^p K^{2p}$$

Tous ces ordres sont associés à l'unique $\mathbb{R}-$place de $\mathbb{R}((X))$, et pour la valuation associée, ils induisent tous sur le corps résiduel le même ordre archimédien.

Il résulte des travaux de Becker le théorème suivant :

Theorem 12 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(1) $\forall a \in K \quad a^2 \in \sum K^4$ *;*
(2) toute valuation réelle de K *a un groupe des valeurs 2-divisible ;*
(3) K *n'admet pas d'ordre de niveau exact* 2.

En corollaire nous obtenons que $\lambda_P = \lambda_Q$ si et seulement si P et Q sont le début d'une chaîne 2-primaire d'ordres de niveau supérieur (une telle chaîne a été définie par Harman [12] comme $(P_n) = (P_0, P_1, ..., P_n, ...)$, P_0 ordre usuel, P_n ordre de niveau exact 2^{n-1} tel que $P_n \cup -P_n = (P_0 \cap P_{n-1}) \cup -(P_0 \cap P_{n-1})$)

L'application $\Lambda : \chi(K) \longrightarrow M(K)$ est donc une bijection si et seulement si le corps K n'admet aucun ordre de niveau exact 2.

3 Une utilisation des $\mathbb{R}-$places en géométrie réelle

3.1 Un critère de séparation des composantes connexes dans $M(K)$

Theorem 13 *(Becker-Gondard [6]) : Les* $\mathbb{R}-$*places* λ_P *et* λ_Q *sont dans deux composantes connexes distinctes de* $M(K)$ *si et seulement si :*

$$\exists b \in K^* \ (b \in P \cap -Q \text{ et } b^2 \in \sum K^4).$$

Preuve :

Ce critère est obtenu par la théorie des ordres de niveau supérieur, plus précisément des ordres de niveau 2.

On a $\chi(K) = H(a) \cup H(-a)$ et $H(a) \cap H(-a) = \varnothing$, mais $\Lambda(H(a)) \cap \Lambda(H(-a))$ peut ne pas être vide.

Cependant, s'il existe $b \notin \sum K^2$ et tel que $b^2 \in \sum K^4$, alors il n'existe pas $P \in H(b)$ et $Q \in H(-b)$ tels que $\lambda_P = \lambda_Q$.

Sinon $b \notin (P \cap Q) \cup -(P \cap Q)$ et $\lambda_P = \lambda_Q$ impliquent, comme il a été dit en fin de § 2, qu'il existe un ordre de niveau 2, P_2, tel que

$$P_2 \cup -P_2 = (P \cap Q) \cup -(P \cap Q)$$

avec $b \notin P_2 \cup -P_2$, d'où $b^2 \notin P_2$, et donc $b^2 \notin \sum K^4 = \cap P_{2,i}$, où $P_{2,i}$ parcourt l'ensemble des ordres dont le niveau divise 2.

Supposons alors que λ_P et λ_Q sont dans la même composante connexe C de $M(K)$ (avec $P \neq Q$), et qu'il existe $b \in P \cap -Q$ avec $b^2 \in \sum K^4$; Λ étant fermée $C \cap \Lambda(H(b))$, et $C \cap \Lambda(H(-b))$ forment une partition de C en deux fermés non vides, impossible.

Réciproquement :

Si λ_P et λ_Q sont dans C et C', deux composantes connexes distinctes de $M(K)$, $M(K)$ étant compact séparé il existe un ouvert-fermé $U \supset C$ et $U^c = M(K) \backslash U \supset C'$.

Soient $X = \Lambda^{-1}(U)$ et $Y = \Lambda^{-1}(U^c)$; X et Y forment une partition de $\chi(K)$; Λ étant surjective on a :

$$\Lambda^{-1}(\Lambda(\Lambda^{-1}(U))) = \Lambda^{-1}(U)$$

donc $\Lambda^{-1}(\Lambda(X)) = X$, et de même $\Lambda^{-1}(\Lambda(Y)) = Y$.

Le lemme ci-après de Harman donne alors l'existence de b tel que $X = H(b)$ et $Y = H(-b)$ avec $b^2 \in \sum K^4$, donc on a $b \in P \cap -Q$ avec $b^2 \in \sum K^4$.

Lemme de Harman ([12]) : Si $\chi(K) = \chi_1 \cup \chi_2$, où χ_1 et χ_2 sont des ouverts-fermés disjoints tels que $\Lambda^{-1}(\Lambda(\chi_1)) = \chi_1$ *et* $\Lambda^{-1}(\Lambda(\chi_2)) = \chi_2$, alors il existe a tel que $\chi_1 = H(a)$ et $\chi_2 = H(-a)$.

3.2 Nombre de composantes connexes d'une variété réelle

Theorem 14 *(Becker-Gondard [6]) : Soit Y une variété projective lisse non vide sur $\mathbb{R}$, de corps des fonctions $K = \mathbb{R}(Y)$. Alors $\mid \pi_0(Y(\mathbb{R})) \mid$, le nombre de composantes connexes de $Y(\mathbb{R})$, est donné par :*

$$\mid \pi_0(Y(\mathbb{R})) \mid = 1 + \log_2[(K^{*2} \cap \sum K^4) : (\sum K^{*2})^2]$$

Remarques :

Ce résultat est dans l'esprit de celui de Harnack qui majore le nombre de composates connexes d'une courbe projective lisse $V(\mathbb{R})$ par $g+1$, où g est le genre de V ; mais ici nous avons une formule avec égalité. Le théorème met bien en évidence le fait connu que le nombre de composantes connexes est un invariant birationnel parmi les variétés lisses.

La première preuve de ce résultat peut être trouvée dans [6].

Deux nouvelles preuves de ce théorème ont été trouvées en 2003-2004 par Jean-Louis Colliot-Thélène [7] et par Claus Scheiderer [16].

Dans la preuve originelle, le théorème résulte des deux lemmes ci-dessous qui utilisent les composantes connexes de l'espace des $\mathbb{R}-$places $M(K)$.

Lemma 15 *Soit Y une variété projective lisse non vide sur $\mathbb{R}$, de corps des fonctions $K = \mathbb{R}(Y)$. Alors $\mid \pi_0(Y(\mathbb{R})) \mid$ le nombre de composantes connexes de Y est égal à :*

$$\mid \pi_0(Y(\mathbb{R})) \mid = \mid \pi_0(M(\mathbb{R}(Y))) \mid .$$

Lemma 16 *Pour tout corps ordonnable K :*

$$|\ \pi_0(M(K))\ | = 1 + \log_2[(K^{*2} \cap \sum K^4) : (\sum K^{*2})^2].$$

Preuve du lemme 15.

On utilise l'application centre $c : M(K) \to Y(\mathbb{R})$, définie par $x = c(\lambda) = c(V_\lambda)$ l'unique point (Y projective) dont l'anneau local $\mathfrak{o}_x$ est dominé par V_λ, l'anneau de valuation associée à la $\mathbb{R}-$place λ.

- Dans ce cas il est connu [par ex. Bochnak-Coste-Roy, Géométrie Algébrique Réelle, Prop. 7.6.2 (ii), p. 133] que c est surjective, les points centraux étant l'adhérence des points réguliers. Et on peut montrer que c est continue.

- Bröcker a montré (non publié) que la fibre d'un point central a un nombre fini de composantes connexes, et que si x est régulier alors elle est connexe.

Enfin on utilise le lemme suivant : si une application entre deux espaces compacts X et Y est continue surjective et que chaque fibre est connexe alors elle induit une bijection entre $\pi_0(X)$ et $\pi_0(Y)$.

Esquisse de preuve du lemme 16.

On montre comme dans [2] que $|\ \pi_0(M(K))\ | = \log_2[E : E^+]$ où E est le groupe des unités de l'anneau d'holomorphie réel $H(K)$ et $E^+ = E \cap \sum K^2$.

Ensuite, on peut facilement prouver que le groupe quotient $(K^{*2} \cap \sum K^4)/(\sum K^{*2})^2$ est isomorphe à $E/(E^+ \cup -E^+)$.

4 Les $\mathbb{R}-$places et l'anneau d'holomorphie réel

Definition 17 *On appelle anneau d'holomorphie réel, et on note $H(K)$, l'anneau intersection de tous les anneaux de valuation réelle sur K.*

On a aussi $H(K) = \bigcap_{P \in \chi(K)} A(P)$, *et*

$$H(K) = A(\sum K^2) = \{a \in K \mid \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \text{ tel que } n \pm a \in \sum K^2\}.$$

$H(K)$ est un anneau de Prüfer (anneau $R \subset K$ tel que pour tout idéal premier p le localisé R_p est un anneau de valuation de K), de corps des quotients K.

On notera dans la suite

$$Sper(H(K)) = \{\alpha = (p, \overline{\alpha}),\ p \in spec(H(K)),\ \overline{\alpha} \text{ ordre de } quot(H(K)/p)$$

le spectre réel de l'anneau d'holomorphie réel de K.

Theorem 18 *(Becker-Gondard [6]) : On a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccccc} \chi(K) & & \xrightarrow{speri} & & MinSperH(K) \\ \downarrow \Lambda & & & & \downarrow sp \\ M(K) & \xrightarrow{res} & Hom(H(K), \mathbb{R}) & \xrightarrow{j} & MaxSperH(K) \end{array}$$

où les applications horizontales sont des homéomorphismes, et les verticales des surjections continues.

Les applications du diagramme ci-dessus sont définies comme suit :

$\Lambda : \chi(K) \longrightarrow M(K)$ est donnée par $P \mapsto \lambda_P$;

$speri : \chi(K) \longrightarrow MinSperH(K)$ est donnée par $P \mapsto P \cap H(K)$;

$sp : MinSperH(K) \longrightarrow MaxSperH(K)$ est donnée par $\alpha \longmapsto \alpha^{\max}$ (où $\alpha^{\max}$ est l'unique spécialisation maximale de α) ;

$res : M(K) \longrightarrow Hom(H(K), \mathbb{R})$ est donnée par $\lambda \mapsto \lambda_{|H(K)}$;

$j : Hom(H(K), \mathbb{R}) \longrightarrow MaxSperH(K)$ est donnée par $\varphi \mapsto \alpha_\varphi$ (où, selon la notation adoptée pour le spectre réel, $\alpha_\varphi = \varphi^{-1}(\ \mathbb{R}^2)$, ou $\alpha_\varphi = (\ker \varphi, \overline{\alpha})$ avec $\overline{\alpha} = \mathbb{R}^2 \cap quot(\varphi(H(K))$.

Tous ces espaces sont compacts et les topologies de $M(K)$ et $MaxSperH(K)$ sont les topologies quotients issues de Λ et *sp*.

L'espace $\chi(K)$ des ordres d'un corps est donc homéomorphe à $MinSperH(K)$, et l'espace $M(K)$ des places réelles est lui homéomorphe à $MaxSperH(K)$.

5 Eventails valués et $\mathbb{R}-$places

5.1 Compatibilité d'un préordre et d'une valuation (cf. par exemple [14])

Definition 19 *Un préordre T dans un corps K est un sous-ensemble $T \subseteq K$ satisfaisant $T + T \subseteq T$, $T.T \subseteq T$, $0, 1 \in T$, $-1 \notin T$ et $T^* = T \backslash \{0\}$ est un sous-groupe de K^* .*

Definition 20 *On dit que le préordre T est compatible avec une valuation v si $1 + m_v \subset T$, où m_v désigne l'idéal maximal de l'anneau de valuation de v. Alors T induit sur le corps résiduel k_v un préordre $\overline{T}$.*

5.2 Les éventails valués (Jacob [13])

Definition 21 *Un éventail $T \subset K$ est un préordre compatible avec une valuation v, qui induit sur le corps résiduel k un préordre $\overline{T}$, tel que $\overline{T}$ est l'intersection de deux ordres usuels ou est un ordre usuel ($\overline{T}$ est un éventail trivial).*

Definition 22 *Un éventail valué est un préordre T pour lequel il existe une valuation réelle v, compatible avec le préordre ($1 + m_v \subset T$), qui induit un ordre archimédien sur le corps résiduel k_v.*

Remarque : on appelle éventail trivial l'intersection de deux ordres usuels ou un ordre usuel.

Exemples :

1- Les ordres usuels P sont des éventails valués (de niveau 1, i.e. $\sum K^2 \subset P$).

2- Les ordres P_n de niveau n sont des éventails valués (de niveau n).

3- Soit $\Lambda^{-1}(\lambda) = \{P_i \mid \lambda_{P_i} = \lambda\}$ (où Λ est l'application : $\chi(K) \longrightarrow M(K)$ définie par $P \mapsto \lambda_P$), alors $T = \cap P_i$est un éventail valué de niveau 1 minimal.

5.3 Lien avec les $\mathbb{R}-$places (Becker-Berr-Gondard [4])

Comme dans le cas des ordres usuels, on peut associer à tout éventail valué une $\mathbb{R}-$place. :

Soit K un corps ordonnable, T un éventail valué de K ; on sait que

$$A(T) = \{a \in K \mid \exists r \in \mathbb{Q},\ r \pm a \in T\}$$

est un anneau de valuation d'idéal maximal $I(T) = \{a \in K \mid \forall r \in \mathbb{Q}^*,\ r \pm a \in T\}$, et que T induit sur le corps résiduel $k_v = A(T)/I(T)$ un ordre archimédien $\overline{T}$. $(k_v,\overline{T})$ se plonge donc avec unicité dans $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$; on note i ce plongement et π l'application canonique de K dans $k_v \cup \{\infty\}$ (où $\pi(a) = \infty$) si $a \notin A(T)$).

Definition 23 *La $\mathbb{R}-$place associée à T, $\lambda_T : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, est définie par le diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\lambda_T} & \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ \pi \searrow & & \nearrow i \\ & k_v \cup \{\infty\} & \end{array}$$

5.4 Clôtures pour une $\mathbb{R}-$place

Les *corps henseliens résiduellement réels-clos* ont été présentés par Becker-Berr-Gondard dans [4] comme des clôtures par extension algébrique d'un corps muni d'un éventail valué ; on peut aussi utiliser cette approche pour obtenir des clôtures par extensions algébriques pour une $\mathbb{R}-$place donnée λ en lui associant l'éventail valué minimal de niveau 1 qui lui est associé : $T = \cap P_i$, où les P_i sont dans la fibre $\Lambda^{-1}(\lambda) = \{P_i \in \chi(K) \mid \lambda_{P_i} = \lambda\}$.

Tous les corps henseliens résiduellement réels-clos sont clos pour leur unique $\mathbb{R}-$*place*.

C'est aussi vrai pour les cas particuliers que sont les *corps réels-clos généralisés* de [5] et les *corps de Rolle* de [9].

C'est seulement dans le cas où $\Lambda^{-1}(\lambda) = \{P \in \chi(K) \mid \lambda_P = \lambda\}$ ne contient qu'un seul ordre que l'on obtient une clôture pour la $\mathbb{R}-$place unique à isomorphisme près (cas des corps réels-clos). Dans tous les autres cas, les classes d'isomorphisme des clôtures correspondent au choix d'une chaîne infinie d'éventails valués associée à la $\mathbb{R}-$place (voir [4]).

5.5 Les signatures généralisées

La notion d'éventail valué permet de définir celle de signature généralisée.

Definition 24 *(Schwartz [20]) : Une signature généralisée est un morphisme de groupes abéliens* $\sigma : K^* \longrightarrow G$ *dont le noyau est tel que* $T = \ker \sigma \cup \{0\}$ *est un éventail valué.*

Exemples :

1- Si σ est un morphisme de groupes, $\sigma : K^* \longrightarrow \{\pm 1\}$ de noyau additivement fermé, alors σ est une signature et $P = ker\ \sigma \cup \{0\}$ est un ordre.

2- Si $\sigma : K^* \to \mu_{2n}$ morphisme de groupes abéliens de noyau additivement fermé, alors $P = \ker \sigma \cup \{0\}$ est un ordre dont le niveau divise n.

6 Espace d'ordres abstrait et places abstraites

L'espace des ordres d'un corps - étudié en relation avec les formes quadratiques et les valuations réelles - a été à l'origine de la théorie des espaces d'ordres abstraits (M. Marshall 1979-80).

6.1 Espaces d'ordres abstraits

Definition 25 *(Marshall [15]) : Un espace d'ordres abstrait est un couple* (X, G) *où* G *est un groupe d'exposant* 2 *(donc abélien),* -1 *un élément distingué de* G*, et* X *un sous-ensemble de* $Hom(G, \{1, -1\})$ *satisfaisant les quatre axiomes suivants :*

(1) X *est un sous-ensemble fermé de* $Hom(G, \{1, -1\})$

(2) $\forall \sigma \in X \quad \sigma(-1) = -1$

(3) $\bigcap_{\sigma \in X} \ker \sigma = \{1\}$ *(où* $\ker \sigma = \{a \in G \mid \sigma(a) = 1\}$*)*

(4) Pour des formes quadratiques f, g *sur* G*,*

$$D_X(f \oplus g) = \cup \{D_X \langle x, y \rangle \mid x \in D_X(f), y \in D_X(g)\}$$

où $D_X(f) = \{a \in G \mid a \text{ représenté par } f\}$*, i.e. il existe* g *telle que* $f \equiv_X \langle a \rangle \oplus g$ *(où* $f \equiv_X h$ *ssi* f *et* h *ont même dimension, et* $\forall \sigma \in X$ *même signature)*

Si on considère les signatures, un éventail de niveau 1 à quatre élements est caractérisé par $\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1$

Dans le cadre abstrait un éventail est un espace d'ordre abstrait (X, G) tel que $X = \left\{\sigma \in \widehat{G} \mid \sigma(-1) = -1\right\}$.

Il est caractérisé par : $\forall \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \in X$ on a $\sigma_0\sigma_1\sigma_2 \in X)$

6.2 Espaces de signatures abstraits (cas 2^n)

Definition 26 *Un espace de signatures abstrait est un couple* (X, G)*,* G *groupe abélien d'exposant* 2^n*,* $X \subset Hom(G, \mu_{2^n}) = \chi(G)$ *tel que :*

(0) $\forall \sigma \in X, \forall k \in \mathbb{N}$ *avec* k *impair,* $\sigma^k \in X$ *;*
(1) X *est un sous-ensemble fermé de* $\chi(G)$ *;*
(2) $\forall \sigma \in X \quad \sigma(-1) = -1$ *(*-1 *élément distingué) ;*
(3) $\bigcap_{\sigma \in X} \ker \sigma = \{1\}$ *(où* $\ker \sigma = \{a \in G \mid \sigma(a) = 1\}$*)*
(4) des formes f, g *sur* G,

$$D_X(f \oplus g) = \cup\{D_X \langle x, y\rangle \mid x \in D_X(f), y \in D_X(g)\}$$

6.3 P-Structures

Definition 27 *(Marshall [15]): Une P-structure est une relation d'équivalence sur un espace de signatures* (X, G) *telle que l'application canonique* $\Lambda : X \to M$ *(où* M *est l'ensemble des classes d'équivalence) vérifie*

(1) chaque fibre est un éventail ;

(2) si $\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1$ *alors* $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ *a une intersection non vide avec au plus deux fibres.*

Tout espace d'ordres abstrait possède une P-structure M (voir [15]). Mais M muni de la topologie quotient n'est pas toujours un espace séparé.

6.4 Places réelles abstraites

Nous avons montré que dans certaines conditions on peut associer à l'espace d'ordres abstrait une "P-structure" correspondant à l'espace des $\mathbb{R}-$places dans le cas des corps.

Theorem 28 *(Gondard-Marshall [13]) : Soit* (X, G) *sous espace d'un espace de signatures* (X', G') *d'exposant* 2^n*, avec* $n \geq 1$*.*

Pour $\sigma, \tau \in X$ *on dit que* $\sigma \sim \tau$ *si* $\sigma\tau \in X'^2$*. Alors sont équivalents :*

(1) $\sim$ *définit une P-structure sur* X*.*

(2) Si $\sigma_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1$*, alors soit* σ_0 *est lié par* $\sim$ *à exactement un des* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$*, soit* σ_0 *est lié par* $\sim$ *à tous les* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$*.*

De plus dans ce cas la P-structure définie sur X *par* $\sim$ *a une topologie séparée.*

Origine du résultat

Dans le cas des corps, l'espace des $\mathbb{R}-$places est connu dès qu'on connait les ordres usuels et les ordres de niveau 2.

Ou, de manière équivalente, dès qu'on connait les éventails valués de niveau 1 minimaux $T = \cap P_i$ avec $P_i \in \{P \in \chi(K) \mid \lambda_P = \lambda\}$

Par exemple $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{R}((X))$ ont des espaces d'ordres isomorphes, mais le premier a deux $\mathbb{R}-$places et pas d'ordres de niveau 2, alors que le second a une seule $\mathbb{R}-$place et une chaîne d'ordres de niveaux puissances de 2.

Les chaînes d'ordres de niveau puissance de 2 commencent par une paire d'ordres usuels P_0, P_1 et l'ordre P_2 de niveau 2 qui leur correspond satisfait $P_2 \cup -P_2 = (P_0 \cap P_1) \cup (-(P_0 \cap P_1))$, d'où on peut déduire, puisque $a^2 \in P_2 \iff a \in \pm P_2$, que $\sigma_2^2(a) = \sigma_2(a^2) = 1 \iff \sigma_0(a)\sigma_1(a) = 1$ (en notant $P_i = \ker \sigma_i \cup \{0\}$).

7 Quelques questions ouvertes

7.1 Espaces des $\mathbb{R}-$places

On sait peu de choses sur l'espace des $\mathbb{R}-$places à part le fait qu'il est compact séparé. Quels espaces topologiques compacts séparés peuvent être des espaces de $\mathbb{R}-$places ?

D'autre part si on connait l'espace des $\mathbb{R}-$places d'un corps K, que peut on dire de l'espace des $\mathbb{R}-$places des corps extensions de K ?

D'après les travaux de Schulting [17] on sait que pour $L = K(X_1, ..., X_n)$ et pour $L = K((X))$, la connexité éventuelle de $M(K)$ passe à $M(L)$, et réciproquement ; on sait aussi que si tous les ordres de K s'étendent à L et si $M(L)$ est connexe, alors $M(K)$ est connexe.

On ne sait rien sur le cas des extensions algébriques en général.

7.2 $\mathbb{R} - places$ géométriques

Dans le cadre géométrique sur $\mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}(Y)$, Y variété de dimension d , on appellera *éventail valué géométrique minimal de niveau 1,* un éventail valué $T = \cap P_i$ où il y a 2^d ordres P_i de $\mathbb{R}(Y)$ distincts, et tel que pour v la plus fine des valuations compatibles avec T (la valuation de Becker dont l'anneau de valuation est $A(T)$), T induit sur le corps résiduel un ordre archimédien $\overline{T}$.

Avec F. Acquistapace et F. Broglia, nous avons considéré les $\mathbb{R}-$places géométriques correspondant à ces éventails valués de niveau 1 minimaux particuliers (qui sont aussi certains des éventails géométriques définis par Andradas et Ruiz [1]).

Dans le cas des courbes projectives lisses il est connu que $V(\mathbb{R})$, l'ensemble des points réels, est homéomorphe à $M(K)$ (dans ce cas toutes les places réelles sont géométriques).

Dans le cas général, la fibre des $\mathbb{R}-$places géométriques centrées sur un point régulier de la variété doit pouvoir être interprétée géométriquement et décrire le voisinage du point dans la variété.

7.3 Espaces des éventails valués

Il existe une bijection entre l'espace des $\mathbb{R}-$places et les éventails valués minimaux (minimaux comme préordres) de niveau 1.

A tout éventail valué on associe une et une seule $\mathbb{R}-$place.

Réciproquement, on a l'application $\Lambda : \chi(K) \longrightarrow M(K)$, donnée par $P \mapsto \lambda_P$; si on considère l'image réciproque $\Lambda^{-1}(\lambda) = \{P_i \in \chi(K) \mid \lambda_{P_i} = \lambda\}$ alors $T = \cap P_i$ est un éventail valué de niveau 1 minimal.

Les ordres peuvent aussi être considérés comme des éventails valués de niveau 1 maximaux (comme préordres).

D'après le théorème 18 on peut penser à associer à l'espace des éventails valués de niveau 1 le spectre réel de l'anneau d'holomorphie réel $Sper(H(K))$.

Ces considérations pourraient sans doute permettre de définir une notion d'espace d'éventails valués abstrait.

7.4 Problème de Marshall

Rappelons l'énoncé du problème de Marshall :

" Tout espace d'ordre abstrait est-il l'espace des ordres d'un corps?".

Pouvoir obtenir une théorie abstraite satisfaisante des espaces de places réelles peut être un premier pas vers sa résolution. En effet si un espace d'ordres abstrait est réalisé comme espace des ordres d'un corps, on devra pouvoir trouver un espace abstrait de places réelles correspondant aux $\mathbb{R}-$places du corps. Une variante à cette idée serait de chercher une notion d'espace d'éventails valués abstrait comme sous famille de l'espace des éventails abstraits d'un espace d'ordres abstrait.

Références

[1] C. Andradas et J. Ruiz : *Algebraic and analytic geometry of fans,* Memoirs of AMS, vol.115 #553, (1995).

[2] E. Becker : *Valuations and real places in the theory of formally real fields* **et** *The real holomorphy ring and sums of* 2^n*-th powers*, in LNM 959, Géométrie Réelle et Formes Quadratiques, 1-40 **et** 139-181, (1982).

[3] E. Becker : *Extended Artin-Schreier theory of fields,* Rocky Mountain J. of Math., vol 14#4, 881-897 (1984).

[4] E. Becker, R. Berr, et D. Gondard : *Valuation fans and residually real-closed henselian fields,* J. Algebra,215, 574-602 (1999).

[5] E. Becker, R. Berr, F. Delon, et D. Gondard : *Hilbert's 17th problem for sums of 2n-th powers,* J. Reine Angew. Math. 450, 139-157 (1994).

[6] E. Becker et D. Gondard : *Notes on the space of real places of a formally real field,* in RAAG (Trento), W. de Gruyter, 21-46, (1995).

[7] J.–L. Colliot Thélène : *Eine Bemerkung zu einem Satz von E. Becker und D. Gondard*, Math. Zeitschrift, 249, 3 , p. 541-543 (2005).

[8] T. Craven : *The Boolean space of orderings of a field,* Trans. Amer. Math.Soc. 209 , 225-235 (1975).

[9] D. Gondard-Cozette : *Axiomatisations simples des théories des corps de Rolle,* Manuscripta Mathematica 69, 267-274 (1990).

[10] D. Gondard et M. Marshall : *Towards an abstract description of the space of real places,* Contemporary Mathematics, vol 253, AMS, 79-113, (2000).

[11] D. Gondard et M. Marshall : *Real holomorphy rings and the complete real spectrum,* Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math., Tome XIX, n S1, P. 57-74 (2010).

[12] J. Harman : *Chains of higher level orderings,* Contemporary Mathematics 8, 141-174, (1982).

[13] B. Jacob : *Fans, real valuations, and hereditarily-pythagorean fields,* Pacific J. Math. 93, 95-105 (1981).

[14] T. Y. Lam : *Orderings, Valuations and Quadratic Forms, AMS, Regional Conference Series in Mathematics #52, (1983).*

[15] M. Marshall : *Spaces of Orderings and Abstract Real Spectra,* LNM *1636,* Springer-Verlag, *(1996).*

[16] C. Scheiderer : *A short remark on a theorem by Becker and Gondard,* http://www.uni-duisburg.de/FB11/FGS/F1/claus.html#notes

[17] H.-W. Schülting : *On real places of a field and their holomorphy ring ,* Communications in Algebra, 10, 1239-1284 (1982).

[18] H.-W. Schülting : *The strong topology on real algebraic varieties,* Contemporary Mathematics 8, 141-174, (1982).

[19] H.-W. Schülting : *Real holomorphy rings in real algebraic geometry,* LNM 959, Géométrie Réelle et Formes Quadratiques, 1-40 **et** 139-181, (1982).

[20] N. Schwartz : *Signatures and real closures of fields,* in Séminaire Structures Algébriques Ordonnées, Publications de l'Université Paris 7, vol 33, 65-78 (1990).

D. Gondard-Cozette
Institut de Mathématiques de Jussieu (UMR 7586 du CNRS)
Sorbonne Université
4, Place Jussieu
75252 Paris cedex 05 (France)