COMMENTAIRES

à

Set Theoretical Complete Intersection in Characteristic $p > 0$

par Daniel Ferrand

Octobre 1979

Les remarques qui suivent visent à clarifier et compléter certains points du texte signalé dans le titre, et paru dans les Proceedings, édités par Knud LØNSTED, du Summer Meeting in Algebraic Geometry tenu à Copenhague en Août 1978 (Lecture Notes in Math., n° 732).

Ce texte était volontairement concis: c'était simplement l'esquisse d'une méthode que je croyais alors féconde, et qui me semblait mériter de futurs plus amples développements. Un travail ultérieur de Ragni PIENE m'a révélé les limites de cette méthode et m'a conduit à l'abandonner. En effet, dans l'article à paraître: "Tangent Developable to Space Curves", elle étudie en détail la condition pour une courbe de posséder une projection plane "cuspidale", et montre que cette condition est très restrictive.

1. En 1964, SAMUEL m'indiqua le résultat de HARTSHORNE mais il le justifiait par un raisonnement sur des cycles qui ouvrait la voie vers le résultat du texte. Voici la méthode de SAMUEL :
L'entier $d > 1$ étant fixé, on considère la courbe $C \subset \mathbb{P}^3_k = P$ définie paramétriquement par

$$T_0 = u^d \qquad T_1 = u^{d-1}v \qquad T_2 = uv^{d-1} \qquad T_3 = v^d$$

Le cône X de sommet $(0,1,0,0)$ et s'appuyant sur C a pour équation $T_2^d - T_0 T_3^{d-1} = ($
Le lieu singulier de X est la droite L d'équations $T_2 = 0 = T_3$; elle est tangente à C au point $(1,0,0,0)$. Soient H et L' le plan et la droite dont les équations sont respectivement $T_2 = 0$ et $T_0 = 0 = T_2$.
Dans le groupe des cycles $\underline{Z}^2(P)$, on a la relation

(a) $$X.H = (d-1)L + L' \quad .$$

La courbe C est contenue dans la quadrique Y d'équation $T_1T_2 - T_0T_3 = 0$; dans le groupe des cycles on a la relation

(b) $$X.Y = C + (d-1)L + L' \ .$$

En effet, il est d'abord clair que C, L et L' sont des composantes irréductibles de $X \cap Y$; un calcul facile des multiplicités d'intersection donne

$$i(X,Y;L) = d-1 \qquad \text{et} \qquad i(X,Y;L') = 1 \ .$$

Comme $\deg(X)\deg(Y) = 2d$ et $\deg(C) = d$, la formule des degrés montre qu'il n'y a pas d'autres composantes et que $i(X,Y;C) = 1$.

Des relations (a) et(b),on déduit

(c) $$X.(Y-H) = C$$

Supposons maintenant que le corps de base soit de caractéristique $p > 0$, et soit $q = p^n$ une puissance de p telle que

$$q > d^2-3d+1 \ .$$

On vérifie immédiatement que si on écrit $q = (d-1)r + s$,avec $0 \leq s < d-1$, alors $r \leq q \leq dr$.

Le cycle Y-H est le diviseur de la fonction $T_1 - T_oT_3/T_2$;or,on a

$$\begin{aligned}(T_1 - T_oT_3/T_2)^q &= T_1^q - T_o^rT_3^{(d-1)r}T_o^{q-r}T_3^s/T_2^q \\ &\equiv T_1^q - T_2^{dr-q}T_o^{q-r}T_3^s \qquad \text{mod. } (T_2^d-T_oT_3^{d-1})\end{aligned}$$

On a choisi q pour que cette dernière expression soit un polynôme;si X' désigne la surface qu'il définit,on a donc

$$X.X' = X.q(Y-H) = qC$$

Ainsi la courbe C est ensemblistement égale à l'intersection des surfaces d'équations

$$T_2^d-T_oT_3^{d-1} = 0 \qquad \text{et} \quad T_1^q - T_2^{dr-q}T_o^{q-r}T_3^s = 0$$

2. Dans le paragraphe 1 du texte le cône X de sommet x,s'appuyant sur la courbe C est vu comme l'adhérence schématique du cone épointé $U = X - \{x\}$, et U est défini à partir de la projection linéaire de centre x;cette description rend évidente la structure du normalisé $\bar{U}$ de U,mais elle ne permet pas de controler le "sommet" $f^{-1}(x)$ du normalisé $\bar{X}$ de X.Ce paragraphe est repris ici d'un autre point de vue.

Soient $\xi : V \to k$ la forme linéaire associée au point x,et $\alpha_C : V_C \to \underline{O}_C(1)$ la restriction à C du quotient inversible universel de V;comme $x \notin C$,l'application

$$\xi + \alpha_C : V_C \to \underline{O}_C + \underline{O}_C(1) = W$$

est surjective,et définit donc une immersion fermée

$$Q = \mathbb{P}_C(W) \to \mathbb{P}_C(V_C) = P \times C$$

Cette immersion permet d'identifier un point fermé de Q à un couple (y,c) où $c \in C$ et où y est sur la droite joignant c au sommet x.Par suite,le cône X est l'image schématique de Q par la première projection

$$X = pr_1(Q) \ .$$

Notons $p:Q \to X$ la restriction de pr_1 à Q, et introduisons la factorisation de Stein de p:

$$Q \xrightarrow{q} \bar{X} \xrightarrow{f} X$$

Ces données s'insèrent dans le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, hook] \arrow[d, "q"'] & P\times C \arrow[r, "pr_2"] \arrow[dd, "pr_1"] & C \\
\bar{X} \arrow[d, "f"'] & & \\
X \arrow[r, hook] & P &
\end{tikzcd}$$

Le fibré projectif $Q = \mathbb{P}_C(W) \to C$ est muni des deux sections C_∞ et $\bar{C}$ définies respectivement par les quotients $W \to \underline{O}_C$, et $W \to \underline{O}_C(1)$; dans $P\times C$, C_∞ s'identifi à $\{x\}\times C$, et $\bar{C}$ à l'image de l'immersion diagonale $C \to P\times C$.

Si y est un point fermé de X, $p^{-1}(y)$ s'identifie à l'ensemble des couples $(y,c) \in P\times C$ tels que x,y et c soient alignés; par suite, l'ensemble sous-jacent à $p^{-1}(x)$ est C_∞, et p induit un morphisme <u>fini</u>

$$Q - C_\infty \to X - \{x\} = U .$$

Par définition de la factorisation de Stein, on a $\bar{X} = \underline{\mathrm{Spec}}(p_*\underline{O}_Q)$; donc f est fini et $\bar{X}$ est normal puisque Q est lisse; comme $p^{-1}(x)$ est irréductible, $f^{-1}(x)$ est réduit à un point; enfin, si on pose $\bar{U} = \bar{X} - f^{-1}(x)$, q induit un isomorphisme

$$Q - C_\infty \xrightarrow{\sim} \bar{U} .$$

Comme $\bar{C} \cap C_\infty = \emptyset$, $\bar{C}$ s'identifie, via q, à un sous-schéma fermé de $\bar{X}$, et f induit un isomorphisme $\bar{C} \xrightarrow{\sim} C$. Enfin, dans Q, $\bar{C}$ est le diviseur défini par l'annulation d'une section du quotient inversible universel de W, lequel est isomorphe à $p^*(\underline{O}_X(1))$; l'isomorphisme signalé ci-dessus montre que c'est encore vrai dans $\bar{U}$ qui est le complémentaire d'un point dans le schéma normal $\bar{X}$; donc $\bar{C}$ est, dans $\bar{X}$, le diviseur défini par une section de $\underline{O}_{\bar{X}}(1)$.

Cela redonne une démonstration de la prop. 1.2 du texte si on tient compte de l'hypothèse de birationalité de $C \to g(C)$ qui y est faite: elle implique que p et f sont birationnels, donc que $\bar{X}$ est le normalisé de X.

3. Le résultat qui suit complète les énoncés 1.2, 2.3 et 2.4 du texte.

<u>Proposition</u> Soient C une courbe lisse contenue dans un espace projectif $P = \mathbb{P}_k(V)$ et x un point fermé de P, non dans C. On suppose que la projection linéaire de centre x induit un morphisme birationnel

$$h: C \to C'$$

de C sur son image C'. Soit X le cône de sommet x s'appuyant sur C.

1) L'ouvert $X-C$ est affine si et seulement si h est radiciel.
2) Si C est un diviseur de Cartier sur X, h est un isomorphisme. Si, de plus, $\dim(P) = 3$, C est contenue dans un plan de P.

3) Si C est ensemblistement l'intersection de X et d'une hypersurface de P, alors h est radiciel, et c'est même un isomorphisme si car(k) = 0.

Soit $f:\bar{X} \to X$ le normalisé de X. Si X-C est affine, il en est de même de $f^{-1}(X-C) = \bar{X} - f^{-1}(C)$ puisque f est fini; par suite, les composantes irréductibl de $f^{-1}(C)$ sont de codimension un dans X (SGA 2, Exp. V, Exemple 3.4); elles sont donc de dimension un. La description de f donnée dans le texte permet d'identifier $f^{-1}(C)$ à $C\times_{C'}C$; or, les composantes irréductibles de ce schéma sont, d'une part, la diagonale notée ici $\bar{C}$, et, d'autre part, d'éventuels points isolés puisque $C \to C'$ est supposé birationnel; si X-C est affine, ceux-ci ne peuvent donc pas exister et le morphisme diagonal $\bar{C} \to C\times_{C'}C$ est surjectif; par suite, $C \to C'$ est radiciel (EGA I, 3.7.1).

La réciproque est prouvée dans la remarque 2.4 du texte.

Pour prouver 2) et 3), on peut se restreindre à un ouvert affine V de C'. Posons $A' = \Gamma(V,\underline{O}_{C'})$ et $A = \Gamma(h^{-1}(V),\underline{O}_C)$. Comme C ne passe pas par le sommet du cône, on dispose d'un morphisme surjectif $u:A'[T] \to A$ tel que le composé $A' \to A'[T] \to A$ soit fini et permette d'identifier le corps des fractions K de A à celui de A'. On a donc le diagramme commutatif suivant où les flèches verticales sont surjectives

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, equal] & A'[T] \arrow[r, hook] \arrow[d, "u"] & K[T] \arrow[d, "v"] \\ A' \arrow[r] & A \arrow[r, hook] & K \end{tikzcd}$$

Comme $A' \to A$ est fini, Ker(u) contient un polynôme unitaire G.

Montrons 2): on peut choisir V assez petit pour que le diviseur de Cartier C soit défini par une équation, de sorte que Ker(u) est engendré par un polynôme $F \in A'[T]$; comme le polynôme unitaire G est un multiple de F, on peut choisir F unitaire. Posons $t = u(T) \in A$. L'image de F dans K[T] engendre aussi $\mathrm{Ker}(v) = (T-t)$; donc $F(T) = T-t$; par suite $t \in A'$ et $A' \to A$ est un isomorphisme.

Si dim(P) = 3, C' est une courbe plane, donc $\dim\Gamma(C',\underline{O}_{C'}(1)) \leq 3$. Si h est un isomorphisme, on a un isomorphisme $\underline{O}_C(1) \cong h^*\underline{O}_{C'}(1)$; par suite

$$\dim\Gamma(C,\underline{O}_C(1)) = \dim\Gamma(C,h^*\underline{O}_{C'}(1)) = \dim\Gamma(C',\underline{O}_{C'}(1)) \leq 3$$

Cela montre que C est contenue dans un plan de P.

Montrons 3): le complémentaire d'une hypersurface est un ouvert affine de P; l'hypothèse faite implique donc que X-C est affine, et, d'après 1), que h est radiciel; il reste donc à prouver que h est même un isomorphisme si car(k) = 0. Quitte à restreindre V, on peut supposer que Ker(u) est égal à la racine de l'idéal engendré par un polynôme $F \in A'[T]$. Une puissance convenable de G est donc égale à un multiple de F, si bien qu'on peut encore choisir F unitaire. Comme K[T] est un anneau principal, les idéaux qui ont Ker(v) pour racine sont engendrés dans $K[T]$ par une puissance du générateur $T-t$ de $\mathrm{Ker}(v)$. Il existe donc un entier d tel qu'on ait dans $K[T]$

$$F(T) = (T-t)^d = T^d - dtT^{d-1} + \dots$$

Mais $F \in A'[T]$, et $\mathrm{car}(k) = 0$; donc $t \in A'$ et h est un isomorphisme.

4. Dans le paragraphe 2 du texte, on utilise le fait qu'en caractéristique positive, un morphisme fini radiciel factorise un itéré de Frobenius. Voici l'énoncé précis et sa démonstration:

<u>Lemme</u> Soit $f: Y \longrightarrow X$ un morphisme de schémas sur $\mathbb{F}_p$. On suppose que

- X est quasi-compact;
- l'application $\underline{O}_X \longrightarrow f_*(\underline{O}_Y)$ est injective;
- f est fini et radiciel.

Alors, il esiste une puissance $q = p^n$ de la caractéristique telle que

$$f_*(\underline{O}_Y^q) \subset \underline{O}_X$$

<u>Preuve</u>: Comme X est quasi-compact, on peut supposer que X est affine; comme f est fini, Y est affine, si bien que le morphisme f est associé à un morphisme fini injectif d'anneaux $A \longrightarrow B$; de plus, on se ramène, par récurrence au cas où B est engendré par un élément: $B = A[x]$. La démonstration se fait alors par étapes:

a) Démonstration lorsque $\mathrm{Spec}(A)$ est réduit à un point.
Comme f est radiciel et fini, B est, lui aussi, un anneau local et l'extension résiduelle $A/\underline{m} \longrightarrow B/\underline{n}$ est finie et purement inséparable; par suite, il existe un entier r tel que $x^{p^r} = a + b$, avec $a \in A$ et $b \in \underline{n}$; comme $\underline{n}$ est l'unique idéal premier de B, b est nilpotent, et il existe un entier s tel que $b^{p^s} = 0$; par suite $x^q \in A$, avec $q = p^{r+s}$.

b) Démonstration lorsque A est noethérien.
Notons B_n le sous-anneau $A[x^{p^n}]$ de B. Soit S_n le support du A-module B_n/A. La suite décroissante d'ensembles fermés (S_n) est stationaire puisque $\mathrm{Spec}(A)$ est un espace noethérien; par suite, il existe un entier m tel que, pour $n \geqslant m$, on ait $S_n = S_m$, et il s'agit de montrer que S_m est vide. Si S_m n'est pas vide, on considère un idéal premier $\underline{m}$ de A minimal dans S_m, et, quitte à se localiser, on peut supposer que A est local d'idéal maximal $\underline{m}$. Soit $I = \mathrm{Ann}(B_m/A)$ le conducteur de $A \longrightarrow B_m$; par construction, A/I est un anneau local artinien et l'étape précédente fournit une contradiction si on l'applique au morphisme $A/I \longrightarrow B_m/I$.

c) Réduction au cas noethérien.

Soit $F \in A[X]$ un polynôme unitaire de degré d tel que $F(x) = 0$. Si on note I le noyau du morphisme surjectif $C = A[X]/(F) \to B$, le noyau de $C\otimes_A C \to B\otimes_A B$ est $I\otimes C + C\otimes I$. Comme $A \to B$ est radiciel, le noyau de $B\otimes_A B \to B$ est nilpotent; comme cet idéal est engendré par $x\otimes 1 - 1\otimes x$, il existe un entier n tel que, dans $B\otimes_A B$, on ait

$$(x\otimes 1-1\otimes x)^n = 0 \quad .$$

Relevons cette égalité dans $C\otimes_A C$: si on note encore par x l'image de X dans C, les éléments $1,x,\dots,x^{d-1}$ forment une base de C sur A; par suite, l'égalité ci-dessus s'écrit dans $C\otimes_A C$ sous la forme:

$$\text{(a)} \qquad (x\otimes 1-1\otimes x)^n = \sum_{i=0}^{d-1}(g_i\otimes x^i + x^i\otimes h_i)$$

avec $g_i, h_i \in I$. Notons $I' \subset I$ l'idéal engendré par les g_i et les h_i, et $B' = C/I'$; le morphisme $A \to B'$ est fini, et radiciel en vertu de (a); comme B est un quotient de B', il suffit de prouver l'assertion pour $A \to B'$; or, B' est de présentation finie sur A et cela permet de se ramener à des anneaux noethériens. Plus précisement, soit A_o le sous-anneau de A engendré sur $\mathbb{F}_p$ par les coefficients de F, ceux des g_i et ceux des h_i; posons $C_o = A_o[X]/(F)$, et soit B'_o le quotient de C_o par l'idéal engendré par les g_i et les h_i; les morphismes $A \to C \to B'$ se déduisent des morphismes $A_o \to C_o \to B'_o$ par le changement de base injectif $A_o \hookrightarrow A$; par suite, le morphisme $C_o\otimes_{A_o} C_o \to C\otimes_A C$ est injectif si bien que l'égalité (a) est déjà vérifiée dans $C_o\otimes_{A_o} C_o$; elle implique que $A_o \to B'_o$ est radiciel.

5. Au début de la démonstration de 2.3, il est écrit que: "$f:\bar{X} \to X$ est radiciel puisque $C \to C'$ l'est ". C'est un peu bref. La raison invoquée montre seulement que le morphisme $\bar{U} \to U$ est radiciel. Si on utilise la description du cône donnée ci-dessus, on sait que $f^{-1}(x)$ est réduit à un point, et cela permet de conclure. Sinon, on remarque qu'il existe une puissance $q = p^n$ de la caractéristique telle que $f_*(\underline{O}_{\bar{U}}^q) \subset \underline{O}_U$; comme X et $\bar{X}$ sont de Cohen-Macaulay, on a aussi $f_*(\underline{O}_{\bar{X}}^q) \subset \underline{O}_X$.

6. La remarque 2.4 du texte est un cas particulier de l'énoncé suivant qui mérite, à mes yeux d'etre considéré comme une conjecture:

<u>Conjecture</u> Soit C une courbe connexe dans $P = \mathbb{P}_k^3$. Alors il existe une surface X dans P, contenant C et telle que l'ouvert X-C soit affine.

A l'appui de cet optimisme il y a aussi le fait que cet énoncé implique trivialement le théorème (non trivial !) de HARTSHORNE: Pour tout faisceau cohérent F, on a $H^2(P-C,F) = 0$.

Supposons en effet que C soit contenue dans une surface X telle que X-C soit affine. Comme P-X est affine, la suite exacte de cohomologie locale

$$H^1(P-X,F) \to H^2_{X-C}(P-C,F) \to H^2(P-C,F) \to H^2(P-X,F)$$

montre que les deux groupes médians sont isomorphes. Les faisceaux $\underline{H}^i_{X-C}(F)$ sont des limites inductives de faisceaux cohérents à support contenu dans le schéma <u>affine</u> X-C; on a donc

$$H^2_{X-C}(P-C,F) \cong H^0(P-C,\underline{H}^2_{X-C}(F)) \quad .$$

Mais $\underline{H}^2_{X-C}(F) = 0$ car X-C est un diviseur dans P-C.