Note on double coverings and binary quadratic forms

Daniel Ferrand

ABSTRACT Let E be a rank two vector bundle on a scheme X. The following three structures are shown to be equivalent :
a) A quadratic map $q : E \longrightarrow L$, with values in an invertible $\mathcal{O}_X$-module L (q is assumed to be everywhere a non zero map).
b) A double covering $f : Y \to X$ endowed with an invertible $\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{E}$, plus an isomorphism $f_\star \mathcal{E} \simeq E$.
c) An effective Cartier divisor on $\mathbf{P}_X(E)$, of degree two over X.

The passages from one of these points of view to another, although likely to specialists, deserved to be carefully settled in their greatest generality : we only need that 2 is invertible on X. The passage from b) to a) puts the "norm form" in front. In the last two paragraphs the base scheme X is the projective space $\mathbf{P}_n$; we prove that for any double covering $Y \to \mathbf{P}_n$, the homomorphism on Picard groups it induces is an isomorphism if $n \geq 3$; we finally apply this result to quadratic forms on rank two vector bundles on $\mathbf{P}_n$.

MSC 2010 : 11E16 ; 14J60 ; 32L10.

Introduction

This note deals with rank two vector bundles on a scheme X. In a first part, we characterize those bundles which are the direct image $f_\star(\mathcal{E})$ of an invertible module $\mathcal{E}$ defined on some double covering $f : Y \longrightarrow X$ (All the coverings we consider are finite and flat, and usually of rank 2 ; no assumptions are made concerning their ramification, nor the possible singularities of X or Y ; but we always suppose that 2 is everywhere invertible). The point is that a direct image of this kind comes equipped with the extra structure given by the "norm" (*i.e.* the wedge 2) : namely one has the map

$$(\star) \qquad \nu_{\mathcal{E}} : f_\star \mathcal{E} \longrightarrow \mathsf{N}_{Y/X}(\mathcal{E}) = \mathcal{H}om(\Lambda^2 f_\star \mathcal{O}_Y, \Lambda^2 f_\star \mathcal{E}),$$

defined by

$$x \longmapsto \wedge^2(\alpha \mapsto \alpha x)$$

It is a quadratic map with values in the invertible $\mathcal{O}_X$-module $\mathsf{N}_{Y/X}(\mathcal{E})$. Conversely, given a locally free $\mathcal{O}_X$-module E of rank 2, and a *surjective* linear map

$$\varphi : \mathcal{S}ym^2(E) \longrightarrow L,$$

where L is invertible, we construct a double covering $f : Y \to X$ together with an invertible $\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{E}$ such that the quadratic map $q : E \to L$ associated with φ, is isomorphic to the "norm" written above ; in particular, $f_\star \mathcal{E}$ is isomorphic to E. This construction goes as follows : letting $N = \mathcal{H}om(L, \Lambda^2 E)$, we extract from φ, in the usual way, a linear map $u : N \otimes E \to E$; its wedge 2 gives a linear map $\mu : N^{\otimes 2} \to \mathcal{O}_X$, and thus an $\mathcal{O}_X$-algebra structure on $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X \oplus N$; moreover, the map u extends to an $\mathcal{A}$-module structure on E ; then we take for f the double covering $\mathcal{S}pec(\mathcal{A}) \longrightarrow X$. This covering is étale if and only if q is non degenerate.

Establishing such a correspondence required a precise description/construction of double coverings ; so the first paragraph gathers results on them ; the only - but essential - assumption we need is that 2 is invertible. In the context of commutative rings we can skim over this description as follows : a "quadratic algebra" $R \to S$ (*i.e.* as an R-module, S is projective of rank 2) has a direct sum decomposition $S = R \oplus N$, where N is the kernel of the trace map $N = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}_{S/R})$; the multiplication is given by the map $\mu : N^{\otimes 2} \to R$ defined by $\mu(\alpha^{\otimes 2}) = -\mathrm{norm}_{S/R}(\alpha)$. In some sense, S thus "represents" the square root of μ, finding the usual intuition back. But, expliciting this map μ, may sometimes be difficult. By way of example, the §3 gives a comprehensive description of the invertible module N and of the mutiplication μ for the double covering

$$(\mathbf{P}_1)^n/\mathfrak{A}_n \longrightarrow (\mathbf{P}_1)^n/\mathfrak{S}_n = \mathbf{P}_n$$

We find that $N \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(1-n)$; roughly speaking, this covering represents (a globalization of) extracting square root of the discriminant of the generic polynomial of degree n.

The correspondence alluded to above is detailed in the §4 and 5, and it is expanded as an equivalence between suitable categories. The main point is the following (it is expressed here for rings) : let $S = R \oplus N$ be a quadratic algebra, and let E be an invertible S-module. Denote by $\nu_E : E \longrightarrow L = \mathrm{Hom}(N, \Lambda^2 E)$ the "norm" as above, where we use the isomorphism $N \simeq \Lambda^2 S, \quad \alpha \mapsto 1 \wedge \alpha$. Then, for $\alpha \in N$ and $x \in E$, one has

$$x \wedge \alpha x \;=\; \nu_E(x)(\alpha).$$

This formula is the key for the correspondence : since the rank of the R-module E is 2, once you know $x \wedge \alpha x$ for all x then you also know αx, and then the R-linear endomorphism $\alpha_E : x \mapsto \alpha x$; thus, the S-module structure on E - that is the α_E's - and the "norm" ν_E determine each other ; more, the invertible module N itself is given by the quadratic map $E \to L$, since $N \simeq \mathrm{Hom}(L, \Lambda^2 E)$, and finally, the multiplication $\mu : N^{\otimes 2} \to R$ is also computable from ν_E.

In the §6 and 7, we adopt a more geometrical point of view. We consider a rank 2 vector bundle E on X and the projection $p : P = \mathbf{P}_X(E) \longrightarrow X$. An effective Cartier divisor $D \subset P$ such that $D \to X$ is a double covering is given by a section $\gamma : \mathcal{O}_P \longrightarrow \mathcal{O}_P(2)$. We determine the $\mathcal{O}_X$-algebra structure of $p_\star(\mathcal{O}_D)$ from γ, via the duality between the sections of $p_\star(\mathcal{O}_P(2)) = \mathcal{S}ym^2(E)$ and the linear maps $\mathcal{S}ym^2(E) \to \mathcal{O}_X$.

That is obviously reminiscent of the classical result of Schwarzenberger which states that *any* rank 2 vector bundle on a projective *surface* is indeed the direct image of an invertible sheaf on a double covering. In view of the above correspondence, this result is "explained" by the fact that, in dimension 2, one can always find a surjective map $\mathcal{S}ym^2(E) \to L$ for a suitable invertible module L. One of the motivations in writing this note was to investigate what remains true on a scheme of greater dimension. Unfortunately, already for $\mathbf{P}_n$, with $n \geq 3$, all these direct image bundles are decomposable. In fact, we prove in the §8 that for *any* double covering $f : Y \longrightarrow \mathbf{P}_n$, with $n \geq 3$, the map

$$f^\star : \mathrm{Pic}(\mathbf{P}_n) \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y)$$

is an isomorphism (*any* means that the scheme Y may be very singular).

The §9 contains an application to rank 2 bundles E on $\mathbf{P}_n$. If E is indecomposable and is equipped with a linear map $\mathcal{S}ym^2(E) \longrightarrow \mathcal{O}(r)$, which is surjective in codimension ≤ 2, then one has $r > c_1(E)$.

After the reading of a first draft of this note, Manuel Ojanguren drew my attention to the paper [Knes], and he urged me to follow the idea of Kneser in using the Clifford algebras instead of assuming that 2 is invertible. In fact, given a quadratic map $q : E \to \mathcal{O}_X$ (with E of rank 2), the Clifford algebra C of q breaks down in the direct sum $C = C^+ \oplus C^-$, where C^+ is a quadratic $\mathcal{O}_X$-algebra, and C^-, which is isomorphic to E, is a C^+ module. Thus, in the case where $L = \mathcal{O}_X$, our §4 is contained in the Clifford algebras theory. But we definitely need to consider forms with values in an invertible module L different from $\mathcal{O}_X$; thanks to M.-A. Knus a Clifford theory does exist also in that case, but it seems not to be as popular as the usual one, mainly because we don't then get *algebras* but a slightly more complicated structure. So, after some attempts, I gave up rewriting this text and I maintain the assumption that 2 is invertible. I wanted to keep this note as elementary as possible (except, perhaps, in the last two paragraphs), because it is intended to be nothing but preliminaries to another works on vector bundles.

0. Conventions et rappels

$\boxed{\text{On suppose que 2 est inversible dans tous les anneaux qui interviennent dans ce texte.}}$

On nommera *revêtement* tout morphisme fini localement libre de schémas, éventuellement ramifié, voire radiciel.

0.1. Formes quadratiques

Soient E et L deux modules sur un anneau commutatif R. Rappelons qu'on nomme *application quadratique* une application

$$q : E \longrightarrow L$$

ayant les deux propriétés suivantes :
i) Pour $a \in R$ et $x \in E$, on a $q(ax) = a^2 q(x)$;
ii) L'application $E \times E \longrightarrow L, \quad (x, y) \longmapsto q(x + y) - q(x) - q(y)$ est bilinéaire.

Une telle application est la restriction à E d'une *loi polynôme homogène de degré 2* ([Roby] p.236) ; ainsi, il y a une bijection entre l'ensemble des applications quadratiques $q : E \longrightarrow L$ et l'ensemble des applications linéaires $\varphi : \Gamma^2(E) \longrightarrow L$, où $\Gamma^2(E)$ désigne le module des *carrés divisés*([Roby] p. 266) ; cette correspondance est définie par $q(x) = \varphi(\gamma^2(x))$.

Par ailleurs, 2 étant ici supposé inversible, l'application canonique $\mathrm{Sym}^2(E) \longrightarrow \Gamma^2(E)$ est bijective, d'inverse défini par $\gamma^2(x) \mapsto \frac{1}{2}x^2$ (x^2 désigne le carré dans Sym^2). Finalement, se donner une application quadratique $q : E \longrightarrow L$ revient donc à se donner une application linéaire $\varphi : \mathrm{Sym}^2(E) \longrightarrow L$; le passage de l'une à l'autre se voit sur les relations

$$\varphi(xy) = q(x + y) - q(x) - q(y), \qquad q(x) = \frac{1}{2}\varphi(x^2)$$

0.2. Pour tout R-module E, le module $\mathrm{Sym}^2(E)$ est engendré par les carrés puisque, pour $x, y \in E$, on a $xy = \frac{1}{2}((x + y)^2 - x^2 - y^2)$

0.3. Soit L un R-module inversible, de sorte que $\mathrm{Sym}^2(L) = L^{\otimes 2}$. Soit $\mu : L^{\otimes 2} \longrightarrow R$ une application linéaire. Alors, pour $\alpha, \beta \in L$, on a

$$\mu(\alpha \otimes \beta) = \frac{1}{2}(\mu((\alpha + \beta)^{\otimes 2}) - \mu(\alpha^{\otimes 2}) - \mu(\beta^{\otimes 2})).$$

0.4. Partout non nulle

Si E et F sont deux modules sur un anneau R, on dit qu'une application linéaire $u : E \longrightarrow F$ est *partout non nulle* si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R, l'application $\kappa(\mathfrak{p})$-linéaire $\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_R E \longrightarrow \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_R F$ est non nulle. Si F est un R-module inversible, il revient au même de dire que u est partout non nulle, ou qu'elle est surjective.
Cette définition, qui concerne a priori des applications linéaires, s'étend sans changement aux *lois polynômes*, et en particulier aux applications quadratiques $q : E \longrightarrow L$ (**0.1**) ; si L est un module inversible, q est partout non nulle si et seulement si l'application linéaire associée $\varphi : \mathrm{Sym}^2(E) \longrightarrow L$ est surjective. On dit alors parfois que q est *primitive*.
Cette définition s'étend aussi aux applications llinéaires entre modules quasi-cohérents sur un schéma.

1. Revêtements de rang deux

On se propose de décrire ici les revêtements doubles, c'est-à-dire les morphismes de schémas

$$f : Y \longrightarrow X$$

qui sont finis, localement libres de rang deux.

On ne fait aucune hypothèse de régularité sur les schémas X et Y, ni sur le morphisme f, mais on suppose toujours que 2 est partout inversible.

1.1. Posons

$$\mathcal{A} \ = \ f_\star(\mathcal{O}_Y)$$

C'est une $\mathcal{O}_X$-algèbre localement libre de rang 2. À ce titre, elle possède des applications trace et norme ; la trace

$$\mathrm{Tr} : \mathcal{A} \ \to \ \mathcal{O}_X,$$

est surjective puisque $\mathrm{Tr}(1) = 2$ et que 2 est supposé inversible. Introduisons le $\mathcal{O}_X$-module inversible

$$N \ = \ \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \ \subset \mathcal{A}$$

On a donc une décomposition en somme directe de $\mathcal{O}_X$-modules

(1.1.1) $$\mathcal{A} \ = \ \mathcal{O}_X \oplus N.$$

Utilisant cette décomposition, la multiplication dans $\mathcal{A}$ s'exprime simplement par une application linéaire $\mu : N^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{O}_X$, de la façon suivante (au dessus d'un ouvert affine) : pour a, b des sections de $\mathcal{O}_X$, et x, y des sections de N, on a

$$(a + x)(b + y) \ = \ ab + \mu(x \otimes y) \ + \ ay + bx.$$

En effet, pour une section $x \in N$, le théorème de Hamilton-Cayley et la relation $\mathrm{Tr}(x) = 0$ donnent

$$x^2 \ = \ -\mathrm{norm}(x).$$

Par suite, le produit dans $\mathcal{A}$ de deux éléments $x, y \in N$, est égal à

$$xy = \frac{1}{2}((x+y)^2 - x^2 - y^2) = -\frac{1}{2}(\mathrm{norm}(x+y) - \mathrm{norm}(x) - \mathrm{norm}(y))$$

Le membre de droite définit bien une forme bilinéaire symétrique sur N, d'où l'application

(1.1.2) $$\mu : N^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{O}_X.$$

Elle est reliée à la norme par la formule

$$\mu(x \otimes y) \ = \ -\frac{1}{2}(\mathrm{norm}(x+y) - \mathrm{norm}(x) - \mathrm{norm}(y))$$

1.2. Définition *Pour un revêtement double $f : Y \longrightarrow X$, le $\mathcal{O}_X$-module inversible*

$$N = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr} : f_\star(\mathcal{O}_Y) \longrightarrow \mathcal{O}_X)$$

sera dit associé à f*, et l'application $\mu : N^{\otimes 2} \to \mathcal{O}_X$ sera appelée* la multiplication de Y.

Tout couple (N, μ) formé d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible et d'une application linéaire $\mu : N^{\otimes 2} \to \mathcal{O}_X$ détermine une structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre sur $\mathcal{O}_X \oplus N$, et, par suite, un morphisme $\mathcal{S}pec(\mathcal{O}_X \oplus N) \to X$ qui est un revêtement de rang deux..

L'automorphisme canonique σ de $\mathcal{A}$ ([Bour] A III.13 Prop. 2) est donné par $\sigma(a + x) = a - x$. On a $\mathcal{A}^\sigma = \mathcal{O}_X$.

1.3. Diramation

Désignons par $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ l'image de l'application μ ; c'est un idéal, éventuellement nul, de $\mathcal{O}_X$. Le sous-schéma fermé $\Delta \subset X$ défini par $\mathcal{I}$ s'appelle selon l'époque, le pays ou l'auteur, le lieu de *diramation*, ou de *ramification*, ou de *branchement* de f. J'utiliserai le premier terme.

On a donc une suite exacte

$$N^{\otimes 2} \ \xrightarrow{\mu} \ \mathcal{O}_X \ \longrightarrow \ \mathcal{O}_\Delta \ \longrightarrow 0$$

L'idéal de $\mathcal{A}$ engendré par N est égal à $\mathcal{I} \oplus N$. L'homomorphisme $\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I} + N$ est un isomorphisme. D'ailleurs, l'image réciproque $f^{-1}(\Delta) \subset Y$ du lieu de diramation a pour algèbre $\mathcal{A}/\mathcal{I}\mathcal{A} = \mathcal{O}_\Delta \oplus N/\mathcal{I}N$, le second facteur étant idéal de carré nul ; en particulier, le revêtement $f^{-1}(\Delta) \to \Delta$ possède une section canonique qui permet de voir Δ aussi comme un fermé de Y.

La suite exacte ci-dessus montre que Δ est un diviseur sur X si et seulement si μ est injective. Si μ est injective, alors $\mathcal{I} \oplus N$ est un idéal inversible de $\mathcal{A}$.

1.4. Ramification

On vient de voir que $N/\mathcal{I}N$ peut être vu comme un $\mathcal{A}$-module, annulé par $\mathcal{I}\mathcal{A} = \mathcal{I} \oplus \mathcal{I}N$.

1.4.1. Lemme *La différentielle universelle $d_{Y/X} : \mathcal{O}_Y \longrightarrow \Omega^1_{Y/X}$ est l'application $\mathcal{O}_X \oplus N \longrightarrow N/\mathcal{I}N$, donnée par $a + x \longmapsto \mathrm{cl}(x)$. En particulier, le lieu de diramation de f est le support (schématique) de $f_\star(\Omega^1_{Y/X})$; en d'autres termes, on a $\mathcal{I} = \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(f_\star(\Omega^1_{Y/X}))$. Le morphisme $f : Y \longrightarrow X$ est étale si et seulement si la multiplication $\mu : N^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ est surjective.*

Une $\mathcal{O}_X$-dérivation $D : \mathcal{A} = \mathcal{O}_X \oplus N \longrightarrow E$, à valeurs dans un $\mathcal{A}$-module E, est en particulier une application $\mathcal{O}_X$-linéaire $N \to E$, et il faut voir qu'elle est nulle sur $\mathcal{I}N$; considérons le produit, dans $\mathcal{A}$ de trois éléments $x, y, z \in N$. Comme les produits deux à deux de ces éléments sont dans $\mathcal{O}_X$, on a

$$2D(xyz) = D(xyz) + D(xzy) = xyD(z) + xzD(y) = x(yD(z) + zD(y)) = xD(yz) = 0.$$

Comme 2 est inversible, D est nulle sur les produits de trois éléments de N, donc sur $\mathcal{I}N$.
Il reste à vérifier que l'application indiquée $a + x \longmapsto \mathrm{cl}(x)$ est une dérivation, ce qui est évident compte tenu de la structure de $\mathcal{A}$-module sur $N/\mathcal{I}N$ qui est donnée par

$$(a + x)\,,\ \mathrm{cl}(y) \longmapsto \mathrm{cl}(ay).$$

1.5. Propriété universelle.

Soit $f : Y \to X$ un revêtement double, N son module inversible associé et $\mu : N^{\otimes 2} \to \mathcal{O}_X$ sa multiplication. Alors Y représente le foncteur F, en les schémas $g : Z \to X$, défini par

$$\mathsf{F}(Z) = \{\omega : g^\star(N) \to \mathcal{O}_Z,\ \omega^{\otimes 2} = g^\star(\mu)\}$$

En effet un élément $\omega \in \mathsf{F}(Z)$ donne, par adjonction, une application $\mathcal{O}_X$-linéaire $\omega' : N \to g_\star(\mathcal{O}_Z)$; la condition $\omega^{\otimes 2} = g^\star(\mu)$ implique que $\omega'^{\otimes 2}$ se factorise en

$$N^{\otimes 2} \xrightarrow{\mu} \mathcal{O}_X \longrightarrow g_\star(\mathcal{O}_Z)$$

On a donc un morphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres $\mathcal{O}_X \oplus N \longrightarrow g_\star(\mathcal{O}_Z)$, d'où, finalement, un morphisme de schémas $Z \to \mathcal{S}pec(\mathcal{O}_X \oplus N) = Y$. On vérifie immédiatement que l'application ainsi construite $\mathsf{F}(Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_X(Z, Y)$ est bijective.

On peut adopter un point de vue plus systématique, en introduisant le fibré vectoriel $\mathbf{V}_X(N)$ qui représente les formes linéaires $N \to \mathcal{O}$ ([EGA I], (9.4.8)). L'application $\omega : f^\star(N) \to \mathcal{O}_Y$ conduit à un morphisme

$$Y \longrightarrow \mathbf{V}_X(N)$$

qui est une immersion fermée puisque l'application $\mathcal{S}ym_{\mathcal{O}_X}(N) \longrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{O}_X \oplus N$ est surjective ; par ailleurs, l'application « élévation au carré » se traduit par un morphisme

$$\mathbf{V}_X(N) \longrightarrow \mathbf{V}_X(N^{\otimes 2})$$

En termes de faisceaux d'algèbres, ce morphisme est associé à l'inclusion $\mathcal{S}ym(N^{\otimes 2}) \subset \mathcal{S}ym(N)$; on a évidemment $\mathcal{S}ym(N) = \mathcal{S}ym(N^{\otimes 2}) \oplus (N \otimes \mathcal{S}ym(N^{\otimes 2}))$; ce morphisme est donc le revêtement double *universel* associé au $\mathcal{S}ym(N^{\otimes 2})$-module inversible $N \otimes \mathcal{S}ym(N^{\otimes 2})$.
La multiplication $\mu : N^{\otimes 2} \to \mathcal{O}_X$ conduit à un morphisme de X-schémas $\tilde{\mu} : X \longrightarrow \mathbf{V}_X(N^{\otimes 2})$, et le carré suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbf{V}_X(N) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ X & \underset{\tilde{\mu}}{\longrightarrow} & \mathbf{V}_X(N^{\otimes 2}) \end{array}$$

1.6. Morphismes

Proposition *Soient $f : Y \to X$ et $f' : Y' \to X$ deux revêtements doubles de X ; notons N et N' les $\mathcal{O}_X$-modules inversibles associés. Soit $g : Y' \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas sur X. Désignons par*

$$\psi : f_\star \mathcal{O}_Y \longrightarrow f'_\star \mathcal{O}_{Y'}$$

le morphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres associé à g. Alors
i) Si ψ est injectif, on a $\psi(N) \subset N'$.
ii) Si ψ n'est pas injectif, et si X est normal intègre, alors $g = sf'$ où s est une section de f.

Écrit par blocs, le morphisme $\psi : \mathcal{O}_X \oplus N \longrightarrow \mathcal{O}_X \oplus N'$ prend la forme suivante

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & \psi_1 \\ 0 & \psi_0 \end{pmatrix}$$

i) Il s'agit de voir que la forme linéaire $\psi_1 : N \longrightarrow \mathcal{O}_X$ est nulle. Notons d'abord que l'application $\psi_0 : N \longrightarrow N'$ est injective, car si un élément $\alpha \in N$ est tel que $\psi_0(\alpha) = 0$, alors on a $-\psi_1(\alpha) + \alpha \in \mathrm{Ker}(\psi)$, donc $\alpha = 0$.
Soit α une section de N, de sorte que α^2 est une section de $\mathcal{O}_X$ et que, par suite $\psi(\alpha^2) = \alpha^2$. Comme ψ respecte le produit, on a

$$\alpha^2 = \psi(\alpha^2) = \psi(\alpha)^2 = (\psi_1(\alpha) + \psi_0(\alpha))^2 = \psi_1(\alpha)^2 + \psi_0(\alpha)^2 \ + \ 2\psi_1(\alpha)\psi_0(\alpha).$$

Le dernier terme, $2\psi_1(\alpha)\psi_0(\alpha)$, est la composante dans N' ; il est donc nul. Comme ψ_0 est injectif, on voit que l'on a, pour tout $\alpha \in N$, $\psi_1(\alpha)\alpha = 0$. Mais N étant un module inversible, cette relation entraîne la nullité de ψ_1.

ii) Supposons que X soit normal intègre, et que ψ ne soit pas injectif ; son noyau est donc génériquement de rang 1 ; par suite, la $\mathcal{O}_X$-algèbre $\mathcal{B} = \mathrm{Im}(\psi) \subset f'_\star \mathcal{O}_{Y'}$ est finie, génériquement de rang 1, et elle est sans torsion puisque contenue dans $f'_\star \mathcal{O}_{Y'}$; comme $\mathcal{O}_X$ est normale, $\mathcal{B} = \mathcal{O}_X$. D'où le résultat.

Voir **2.2.** pour une description plus complète de g dans le cas *i)*.

1.7. Revêtements localement isomorphes

Lemme *Soient $f_1 : Y_1 \to X$ et $f_2 : Y_2 \to X$ deux revêtements doubles de X, et N_1 et N_2 les $\mathcal{O}_X$-modules inversibles associés. On suppose que le lieu de diramation de f_1 et celui de f_2 sont des diviseurs. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes*
i) Il existe un morphisme fidèlement plat quasi-compact $p : X' \to X$ et un isomorphisme

(1.7.1) $$X' \times_X Y_1 \xrightarrow{\sim} X' \times_X Y_2$$

ii) Les lieux de diramation de f_1 et de f_2 sont égaux.

i) $\Rightarrow$ *ii)*. Comme la trace commute à un isomorphisme, la donnée de (1.7.1) équivaut à la donnée d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X'}$-modules inversibles

$$p^\star(N_1) \ \xrightarrow{\omega} \ p^\star(N_2)$$

compatible avec les structures multiplicatives $\mu_i : N_i^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{O}_X$; comme ces applications sont supposées injectives, l'isomorphisme

$$p^\star(N_1^{\otimes 2}) \ \xrightarrow{\omega^{\otimes 2}} \ p^\star(N_2^{\otimes 2})$$

se descend de X' à X ; par suite, μ_1 et μ_2 ont même image.
ii) $\Rightarrow$ *i)*. Par hypothèse, il existe un isomorphisme $\theta : N_1^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} N_2^{\otimes 2}$ tel que $\mu_2 \circ \theta = \mu_1$.
Considérons le foncteur F défini, pour tout X-schéma $q : Z \to X$, par

$$F(Z) = \{\omega \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Z}(q^\star(N_1), q^\star(N_2)) \text{ tel que } \omega^{\otimes 2} = q^\star(\theta)\}$$

Ce foncteur est représentable par un revêtement étale de rang deux. En effet, posons $L = \mathcal{H}om(N_1, N_2)$; c'est un module inversible dont le carré est muni de l'isomorphisme $\lambda : L^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$, donné par θ.
Alors le revêtement double $p : X' = \mathcal{S}pec(\mathcal{O}_X \oplus L) \to X$, associé à λ, représente le foncteur en question (**1.5**) ; par suite on a isomorphisme $X' \times_X Y_1 \xrightarrow{\sim} X' \times_X Y_2$.

2. Exemples

2.1. Construction par pincement

Soit $f' : Y' \to X$ un revêtement double, et $D \subset X$ un diviseur (de Cartier) effectif sur X. Posons $D' = f'^{-1}(D)$; c'est un diviseur effectif sur Y', et le morphisme $\bar{g} : D' \to D$ induit par f', est un revêtement double. En « pinçant » Y' le long de $\bar{g}$, on obtient un schéma Y et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d] & D \arrow[d] \arrow[dr] & \\ Y' \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f'"'] & Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

où le carré est cocartésien, où $f' = f \circ g$, et où les morphismes verticaux sont des immersions fermées.Voir [Fer. 2], thm. 7.1.B.(L'hypothèse *iii)* de *loc.cit.* se réduit à ceci : pour tout $x \in D \subset X$, la fibre $f'^{-1}(x)$ est contenue dans un ouvert affine de Y' ; or, c'est évident ici puisque le morphisme f' est affine).

Montrons que $f : Y \to X$ est un revêtement double. Montrons d'abord que f est un morphisme affine : soit U un ouvert affine de X ; alors $f^{-1}(U)$ est la somme des schémas $D \cap U$ et $f'^{-1}(U)$, amalgamée le long de $f'^{-1}(D \cap X)$:

$$\begin{tikzcd} f'^{-1}(D \cap X) \arrow[r] \arrow[d] & D \cap X \arrow[d] \\ f'^{-1}(U) \arrow[r] & f^{-1}(U) \end{tikzcd}$$

Or, ces trois derniers schémas sont affines ; donc $f^{-1}(U)$ est affine (loc.cit. Thm 5.1). Il reste à vérifier que f est localement libre de rang deux. Considérons les images directes sur X des faisceaux d'anneaux des différents schémas qui interviennent ; on peut omettre les symboles d'image directe $f_\star$, etc. puisque les morphismes sont affines. La propriété à vérifier étant locale, on peut supposer que tous les schémas sont affines.
Notons $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ les $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents conoyaux des morphismes $\mathcal{O}_D \longrightarrow \mathcal{O}_{D'}$, et $\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_{Y'}$. Par définition d'un carré cocartésien, dans le diagramme suivant, les lignes sont exactes et l'application $\mathcal{M} \to \mathcal{L}$ est un isomorphisme.

$$\begin{tikzcd} 0 & \mathcal{L} \arrow[l] & \mathcal{O}_{D'} \arrow[l] & \mathcal{O}_D \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\ 0 & \mathcal{M} \arrow[l] \arrow[u] & \mathcal{O}_{Y'} \arrow[l] \arrow[u] & \mathcal{O}_Y \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Comme $D' \to D$ est un revêtement de rang deux, $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{O}_D$-module inversible ; mais D est un diviseur de X, donc

$$\mathrm{dim.proj}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}) = 1.$$

(Les notions de module projectif et de dimension projective ont bien un sens puisque X est affine). Puisque $\mathcal{O}_{Y'}$ est localement libre de rang 2 sur $\mathcal{O}_X$, on déduit de l'isomorphisme $\mathcal{M} \tilde{\to} \mathcal{L}$, et de l'exactitude de la suite inférieure du diagramme, que $\mathcal{O}_Y$ est projectif sur $\mathcal{O}_X$. D'autre part, c'est un $\mathcal{O}_X$-module de type fini puisque $\mathcal{M}$ est de présentation finie et que $\mathcal{O}_{Y'}$ est de type fini ([Bour] AC I §2.8). Finalement, comme $f' : Y' \to Y$ est un isomorphisme au dessus de l'ouvert $X - D$, on peut bien conclure que le rang du $\mathcal{O}_X$-module projectif $\mathcal{O}_Y$ est égal à 2. $\square$

Voici une description algébrique de $\mathcal{A} = f_\star(\mathcal{O}_Y)$: posons $\mathcal{A}' = f'_\star(\mathcal{O}_{Y'}) = \mathcal{O}_X \oplus N'$; notons $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ l'idéal (inversible) de D dans X ; alors $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{J} N' \subset \mathcal{A}'$.

En fait, on va voir que *tout* morphisme « raisonnable » entre revêtements doubles est un pincement au sens précédent.

2.2. Proposition *Soient $f : Y \longrightarrow X$ et $f' : Y' \longrightarrow X$ deux revêtements doubles de X, et (N, μ), (N', μ') les modules inversibles, et les multiplications associés. On considère un X-morphisme $g : Y' \longrightarrow Y$. On suppose que le morphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres associé à g*

$$\psi : \mathcal{A} = \mathcal{O}_X \oplus N \longrightarrow \mathcal{O}_X \oplus N' = \mathcal{A}'$$

est injectif, *de sorte que* $\psi(N) \subset N'$ (**1.6**).
Soit $D \subset X$ *le diviseur de Cartier défini par la suite exacte déduite de* ψ

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(N', N) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

Alors, Y *s'obtient par pincement de* Y' *le long du morphisme* $f'^{-1}D = D' \longrightarrow D$.

Identifions N à son image $\psi(N) \subset N'$, ainsi que $\mathcal{A}$ à son image dans $\mathcal{A}'$. Notons d'abord que l'idéal de D dans X est égal à $\mathcal{J} = \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(N'/N)$. Puisque N et N' sont des $\mathcal{O}_X$-modules inversibles, on a même l'égalité $\mathcal{J}N' = N$, et, par suite, $\mathcal{J}\mathcal{A}' = \mathcal{J} \oplus \mathcal{J}N' = \mathcal{J} \oplus N$. De plus, on vérifie immédiatement que le conducteur de ψ, c'est-à-dire l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}'/\mathcal{A})$, est égal à $\mathcal{J} \oplus N$, et donc aussi à $\mathcal{J}\mathcal{A}'$.
Par définition du conducteur, le carré

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}'/\mathcal{J}\mathcal{A}' = \mathcal{A}'/\mathcal{J} \oplus N & \mathcal{A}/\mathcal{J} \oplus N \simeq \mathcal{O}_X/\mathcal{J} \arrow[l] \\
\mathcal{A}' \arrow[u] & \mathcal{A} \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

est cocartésien (*i.e.* il fait de $\mathcal{A}$ le produit fibré évident), ce qui est une autre façon de dire qu'en passant aux schémas, le carré obtenu

$$\begin{tikzcd}
D' \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[d] \\
Y' \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

est un pincement.

2.3. Revêtement standard

2.3.1. Définition *Soit* Z *un diviseur de Cartier effectif sur un schéma* X. *On appelle revêtement standard de* X *associé à* Z *le schéma obtenu en recollant deux copies de* X *le long de* Z.

Ce type de recollement est un cas particulier du précédent, où $Y' = X \sqcup X$, et son existence se trouve déjà dans [Anan.] Prop.1.1.1.

Soit $f : Y \to X$ le revêtement standard associé au diviseur $Z \subset X$; par définition, on a un carré de somme amalgamée (deux copies de X amalgamées en Z)

(2.3.2)
$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
X \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

Posant, comme plus haut, $\mathcal{A} = f_\star(\mathcal{O}_Y)$, on obtient une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_X \xrightarrow{(x,y)\mapsto \mathrm{cl}(y-x)} \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0.$$

Comme $\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$, où $\mathcal{J}$ est un idéal inversible, on voit que $\mathcal{A}$ est localement libre, et de rang 2. L'application ι est un isomorphisme au dessus de l'ouvert schématiquement dense $X - Z$; par suite, la trace se calcule comme pour les éléments de $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_X$: c'est la somme des composantes ; le noyau de la trace $N = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} \overset{\mathrm{Tr}}{\to} \mathcal{O}_X)$ est donc isomorphe à $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J} \xrightarrow{\sim} N, \qquad x \mapsto (x, -x).$$

Le diviseur de diramation est défini par l'idéal $\mathcal{I}$ image de $N^{\otimes 2} \to \mathcal{O}_X$, soit

$$\mathcal{I} = \mathcal{J}^2.$$

2.4. On peut décrire $\mathcal{A}$ plus simplement : on munit $\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{J}$ de la structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre pour laquelle le produit de deux éléments du second facteur $\mathcal{J}$ est ce produit vu comme élément de $\mathcal{O}_X$; alors, on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres

$$\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{J} \simeq \mathcal{A} \subset \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_X, \qquad t \oplus u \mapsto (t-u, t+u).$$

La démarche est réversible ; cela montre que pour tout idéal inversible $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$, le spectre de l'algèbre $\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{J}$ est le revêtement standard associé au diviseur $\mathcal{S}pec(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$.
Lorsque $X = \mathrm{Spec}(R)$ et que $\mathcal{J} = uR$, alors Y est isomorphe à $\mathrm{Spec}(R[T]/(T^2 - u^2))$.

2.4.1. Proposition *Soit $f : Y \to X$ un revêtement de rang deux dont le lieu de diramation est un diviseur. Alors f est standard si et seulement si il admet une section.*

L'existence d'une section est clairement nécessaire ; montrons qu'elle est suffisante. Soit $\mu : N^{\otimes 2} \to \mathcal{O}_X$ la multiplication associée à Y. Soit $s : X \to Y$ une section de f. Considérons, comme en **1.5**, l'application $f^\star(N) \to \mathcal{O}_Y$ adjointe de l'inclusion ; son image réciproque par la section s donne une application $\mathcal{O}_X$-linéaire $\omega : N \to \mathcal{O}_X$, dont le carré est égal à μ ; la remarque ci-dessus montre que Y est standard.□

Cela montre que pour tout revêtement de rang deux, $f : Y \to X$, à diramation portée par un diviseur, le revêtement, déduit par changement de base, $Y \times_X Y \longrightarrow Y$ est standard : il est obtenu par recollement de deux copies de Y le long du fermé d'idéal $\mathcal{I} \oplus N \subset f_\star(\mathcal{O}_Y)$, c'est-à-dire le long du lieu de diramation Δ vu comme fermé de Y (cf. **1.3**).

3. Le revêtement double $(\mathbf{P}_1)^n/\mathfrak{A}_n \longrightarrow \mathbf{P}_n$

Une des formes du *théorème des polynômes symétriques élémentaires* ([Bour], A IV.58, et TG VIII.22) conduit à un isomorphisme

$$(\mathbf{P}_1)^n/\mathfrak{S}_n \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}_n$$

On s'intéresse ici au passage au quotient par le groupe alterné $\mathcal{A}_n$, qui est d'indice deux dans $\mathfrak{S}_n$, et qui donne donc lieu à un revêtement de degré 2 de $\mathbf{P}_n$. Dans ce §, on va déterminer le faisceau inversible associé à ce revêtement, au sens de la définition **1.2**, ainsi que sa multiplication. L'analogue affine est connu et façile (voir **3.7.2**) ; mais le résultat global visé ici requiert des vérifications parfois fastidieuses que, cependant, nous avons voulu ne pas escamoter.

Dans ce paragraphe, tous les schémas sont sur $\mathrm{Spec}(K)$, où K est un corps de caractéristique $\neq 2$, et ce schéma de base est sous-entendu.

3.1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur le corps K, et $\mathbf{P}(V)$ l'espace projectif associé ; on note $\alpha : V \to L$ le quotient inversible fondamental. Ici, et plus bas, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrit simplement V à la place de son image réciproque $V_{\mathbf{P}(V)}$, etc. Soit $\mathbf{P}(V)^n$ le produit de n copies de $\mathbf{P}(V)$, et $p_i : \mathbf{P}(V)^n \to \mathbf{P}(V)$ la projection sur le facteur d'indice i ; sur le schéma produit on obtient, par image réciproque, des quotients inversibles

$$\alpha_i = p_i^\star(\alpha) : V \longrightarrow L_i = p_i^\star(L).$$

On note $\mathsf{TS}^n(V)$ l'espace des tenseurs symétriques.
L'application composée

$$\mathsf{TS}^n(V) \subset V^{\otimes n} \xrightarrow{\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n} L_1 \otimes \cdots \otimes L_n$$

est surjective (il s'agit d'applications linéaires entre modules sur $\mathbf{P}(V)^n$). Pour le voir, on peut supposer effectué un changement de base de la forme $\mathrm{Spec}(K') \to \mathbf{P}(V)^n$, où K' est une extension de K ; les L_i sont alors des vectoriels de rang 1 ; si $\alpha_1(x_1) \otimes \ldots \otimes \alpha_n(x_n)$ est un élément non nul de $L_1 \otimes \cdots \otimes L_n$, il existe des éléments inversibles $\lambda_i \in K'$ tel que, dans $L_i \simeq K'$, on ait $\alpha_i(x_i) = \lambda_i \alpha_i(x_1)$; par suite, on a

$$\alpha_1(x_1) \otimes \ldots \otimes \alpha_n(x_n) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \alpha_1(x_1) \otimes \ldots \otimes \alpha_n(x_1).$$

C'est l'image de l'élément symétrique $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n x_1^{\otimes n}$.

3.2. On suppose maintenant que V est de rang 2, donc que $\mathbf{P}(V)$ est une droite projective ; le schéma $\mathbf{P}(\mathsf{TS}^n(V))$ est isomorphe à $\mathbf{P}_n$ puisque $\mathsf{TS}^n(V)$ est de rang $n+1$; pour faire court on écrira parfois $\mathbf{P}_n$ à la place de $\mathbf{P}(\mathsf{TS}^n(V))$, même sans choix de base explicité. La surjectivité montrée ci-dessus donne donc lieu à un morphisme

$$\pi : \mathbf{P}(V)^n \longrightarrow \mathbf{P}(\mathsf{TS}^n(V)) \simeq \mathbf{P}_n.$$

Il est caractérisé par l'existence d'un isomorphisme

$$\pi^\star(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(1)) \simeq L_1 \otimes \cdots \otimes L_n \tag{3.2.1}$$

rendant commutatif le diagramme suivant d'applications linéaires entre modules sur $\mathbf{P}(V)^n$:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{TS}^n(V) \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & \pi^\star(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(1)) \arrow[d, "\wr"] \\ \mathsf{TS}^n(V) \arrow[r] & V^{\otimes n} \arrow[r] & L_1 \otimes \cdots \otimes L_n \end{tikzcd} \tag{3.2.2}$$

Rappelons la définition du morphisme π en termes de coordonnées homogènes.
Soit $\{e_0, e_1\}$ une base de V. Pour toute partie $I \subset \{1, \ldots, n\}$, on note $e_I \in V^{\otimes n}$ le produit

$$e_I = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n, \quad \text{où} \quad v_i = \begin{cases} e_0 & \text{si } i \in I \\ e_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $p = 0, 1, \ldots, n$, on pose

$$\mathbf{e}_p = \sum_{|I|=p} e_I.$$

C'est un tenseur symétrique ; mieux : $\{\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ est une base du K-espace vectoriel $\mathsf{TS}^n(V)$ ([Bour] A IV 5.5 Prop. 4). Enfin, on a, en notant T une indéterminée,

$$(e_0 + Te_1)^{\otimes n} = \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_{n-1}T + \cdots + \mathbf{e}_0 T^n. \tag{3.2.3}$$

Considérons n points de $\mathbf{P}_1(K)$ déterminés par les formes linéaires surjectives $\alpha_i : V \to K$; on écrit $x_i = \alpha_i(e_0)$, et $y_i = \alpha_i(e_1)$; posons alors, pour une partie $I \subset \{1, \ldots, n\}$,

$$z_I := \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n(e_I) = \prod_{i \in I} x_i \prod_{i \notin I} y_i,$$

et, pour $p = 0, 1, \ldots, n$,

$$\mathbf{z}_p = \sum_{|I|=p} z_I$$

L'égalité (3.2.3) conduit donc à l'égalité suivante entre polynômes dans $K[T]$

$$(x_1 + y_1 T) \cdots (x_n + y_n T) = \mathbf{z}_n + \mathbf{z}_{n-1}T + \cdots + \mathbf{z}_0 T^n.$$

Le morphisme $\pi : \mathbf{P}_1^n \longrightarrow \mathbf{P}_n$ s'écrit alors

$$(x_1 : y_1), \ldots, (x_n : y_n) \longmapsto (\mathbf{z}_0 : \mathbf{z}_1 : \cdots : \mathbf{z}_n).$$

3.3. On va définir un module inversible M sur $\mathbf{P}(V)^n$, et montrer qu'il est isomorphe à l'image réciproque $\pi^\star \mathsf{M}_0$ d'un module inversible M_0 défini sur $\mathbf{P}^n$; on montrera ensuite que le module inversible associé au revêtement double considéré est le dual de M_0.

Désignons par $\mathcal{C} = \mathcal{C}_n^2$ l'ensemble des parties à 2 éléments de $\{1, \ldots, n\}$. Pour $J \in \mathcal{C}$, si on écrit $J = \{i, j\}$, avec $i < j$, on pose

$$\mathsf{M}_J = \mathcal{H}om(\Lambda^2 V, L_i \otimes L_j)$$

C'est un module inversible sur $\mathbf{P}(V)^n$.
On pose

$$\mathsf{M} = \bigotimes_{J \in \mathcal{C}} \mathsf{M}_J.$$

(Disons qu'on a choisi l'ordre lexicographique sur $\mathcal{C}$).

Montrons que le module inversible M sur $\mathbf{P}(V)^n$ provient, via le morphisme

$$\pi : \mathbf{P}(V)^n \longrightarrow \mathbf{P}(\mathsf{TS}^n(V))$$

d'un module inversible M_0 sur la base $\mathbf{P}(\mathsf{TS}^n(V))$, laquelle va être notée simplement $\mathbf{P}_n$.
La définition de π est liée à l'isomorphisme (3.2.1)

$$\pi^\star(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(1)) \simeq L_1 \otimes \cdots \otimes L_n.$$

Or, parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ parties à deux éléments de $\{1, \ldots, n\}$ il y en a $n-1$ contenant un élément fixé i ; en utilisant l'isomorphisme canonique $\mathsf{M}_J = \mathcal{H}om(\Lambda^2 V, L_i \otimes L_j) \simeq (\Lambda^2 V)^{\otimes -1} \otimes L_i \otimes L_j$, on trouve donc un isomorphisme

$$\mathsf{M} = \bigotimes_{J \in \mathcal{C}} \mathsf{M}_J \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{J \in \mathcal{C}} (\Lambda^2 V)^{\otimes -1} \otimes L_i \otimes L_j \xrightarrow{\sim} (\Lambda^2 V)^{\otimes - \frac{n(n-1)}{2}} \otimes (L_1 \otimes \cdots \otimes L_n)^{\otimes (n-1)}.$$

Compte-tenu de (3.2.1), on obtient, finalement, un isomorphisme

$$\mathsf{M} \xrightarrow{\sim} (\Lambda^2 V)^{\otimes - \frac{n(n-1)}{2}} \otimes \pi^\star(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(n-1)).$$

Posons donc

(3.3.1) $$\boxed{\mathsf{M}_0 = (\Lambda^2 V)^{\otimes - \frac{n(n-1)}{2}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_n}(n-1)}$$

de sorte qu'on a dégagé un isomorphisme

(3.3.2) $$\eta : \mathsf{M} \longrightarrow \pi^\star(\mathsf{M}_0).$$

3.4. Les permutations et leur signature joueront évidemment un rôle central dans la suite ; il faut donc d'abord préciser l'opération (à gauche) de $\mathfrak{S}_n$ sur différents modules définis sur $\mathbf{P}(V)^n$.
L'opération de $\mathfrak{S}_n$ sur le schéma $\mathbf{P}(V)^n$ lui-même est caractérisée, en termes des projections p_i, par la relation suivante : pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\boxed{p_i \circ \sigma = p_{\sigma^{-1} i}}$$

On trouve donc

$$\sigma^\star(V \xrightarrow{\alpha_i} L_i) = \sigma^\star p_i^\star(V \xrightarrow{\alpha} L) = p^\star_{\sigma^{-1} i}(V \xrightarrow{\alpha} L) = (V \xrightarrow{\alpha_{\sigma^{-1} i}} L_{\sigma^{-1} i})$$

En particulier, on a

$$\boxed{\sigma^\star(L_i) = L_{\sigma^{-1} i}.}$$

Fixons une permutation σ ; on a un isomorphisme

$$\theta_J : \sigma^\star \mathsf{M}_J \xrightarrow{\sim} \mathsf{M}_{\sigma^{-1} J}\,.$$

Il fait intervenir l'isomorphisme de commutativité $L_{\sigma^{-1} i} \otimes L_{\sigma^{-1} j} \simeq L_{\sigma^{-1} j} \otimes L_{\sigma^{-1} i}$ lorsque $\sigma^{-1} i > \sigma^{-1} j$.
On désigne par

(3.4.1) $$\theta : \sigma^\star \mathsf{M} \xrightarrow{\sim} \mathsf{M}$$

l'isomorphisme obtenu en composant le produit tensoriel des θ_J avec l'isomorphisme canonique de permutation des facteurs $\bigotimes_{J \in \mathcal{C}} \mathsf{M}_{\sigma^{-1} J} \simeq \bigotimes_{J \in \mathcal{C}} \mathsf{M}_J$ [Bour] A II.104.
Concrètement, l'application θ est σ-linéaire, *i.e* c'est une application additive $\mathsf{M} \longrightarrow \mathsf{M}$, telle que, pour des sections locales s et m, on ait $\theta(sm) = \sigma(s)\theta(m)$.

Explicitons la compatibilité de η avec la permutation σ : le carré suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\sigma^\star \mathsf{M} \arrow[r, "\sigma^\star(\eta)"] \arrow[d, "\theta"'] & \sigma^\star \pi^\star(\mathsf{M}_0) \arrow[r, equal] & \pi^\star(\mathsf{M}_0) \arrow[d, "\sigma"] \\
\mathsf{M} \arrow[rr, "\eta"'] & & \pi^\star(\mathsf{M}_0)
\end{tikzcd}$$

En effet, dans le carré (3.2.2), les applications horizontales (de source le module $\mathfrak{S}_n$-invariant $\mathsf{TS}^n(V)$) sont surjectives ; par suite l'isomorphisme (3.2.1) est compatible aux permutations, et la commutativité du carré ci-dessus en découle.

3.5. On va maintenant définir une section $w : \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)^n} \longrightarrow \mathsf{M}$, et vérifier qu'elle est invariante sous le groupe alterné, et que son carré est invariante sous $\mathfrak{S}_n$.

Pour tout $J \in \mathcal{C}$, considérons la section

$$w_J : \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)^n} \longrightarrow \mathsf{M}_J,$$

associée à l'application

$$\Lambda^2 V \longrightarrow L_i \otimes L_j, \qquad x \wedge y \longmapsto \alpha_i(x) \otimes \alpha_j(y) - \alpha_i(y) \otimes \alpha_j(x). \tag{3.5.1}$$

Il faut remarquer que le carré

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)^n} \arrow[r, "\sigma^\star(w_J)"] \arrow[d, "\sigma"'] & \sigma^\star \mathsf{M}_J \arrow[d, "\theta_J"] \\
\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)^n} \arrow[r, "w_{\sigma^{-1}J}"'] & \mathsf{M}_{\sigma^{-1}J}
\end{tikzcd}$$

est commutatif ou anti-commutatif selon que l'on a $\sigma^{-1}i < \sigma^{-1}j$, ou bien $\sigma^{-1}i > \sigma^{-1}j$.

Le support du diviseur $\operatorname{div}(w_J)$ est le *fermé d'égalité* de α_i et de α_J, ou, si l'on préfère, le fermé formé des points dont les coordonnées d'indices i et j sont égales ; ce sous-schéma est invariant par la transposition $(i\, j)$, mais elle transforme la section w_J en son opposée $-w_J$; pour dégager le diviseur cherché on ne peut donc malheureusement pas s'en tenir à l'intuition purement géométrique et identifier un diviseur à son support .

Par produit tensoriel des w_J, on obtient donc une application

$$w : \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)^n} \longrightarrow \mathsf{M}$$

telle que le carré suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)^n} \arrow[r, "\sigma^\star(w)"] \arrow[d, "\sigma"'] & \sigma^\star \mathsf{M} \arrow[d, "\theta"] \\
\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)^n} \arrow[r, "\varepsilon(\sigma)w"'] & \mathsf{M}
\end{tikzcd} \tag{3.5.2}$$

où on a noté $\varepsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ.

3.6. Finalement, on a défini une section, sur le schéma produit $\mathbf{P}(V)^n$,

$$\omega = \eta \circ w : \mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)^n} \longrightarrow \pi^\star(\mathsf{M}_0)$$

qui est invariante par permutation paire, au sens où le carré suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)^n} \arrow[r, "\sigma^\star(\omega)"] \arrow[d, "\sigma"'] & \pi^\star \mathsf{M}_0 \arrow[d, "\sigma"] \\
\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)^n} \arrow[r, "\varepsilon(\sigma)\omega"'] & \pi^\star \mathsf{M}_0
\end{tikzcd} \tag{3.6.1}$$

Allégeons maintenant en $f : Y \longrightarrow X$ la notation du morphisme qui est en cause :

$$Y = \mathbf{P}(V)^n/\mathfrak{A}_n \quad \xrightarrow{f} \quad X = \mathbf{P}(V)^n/\mathfrak{S}_n = \mathbf{P}(\mathsf{TS}^n(V))$$

L'invariance de la section ω par permutation paire entraîne qu'elle provient d'une section définie sur Y, et que son carré $\omega^{\otimes 2}$ se descend à X ; il existe donc une application $\mathcal{O}_Y$-linéaire, notée par la même lettre,

$$\omega : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f^\star(\mathsf{M}_0) \tag{3.6.2}$$

telle que $\omega^{\otimes 2} : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f^\star(\mathsf{M}_0^{\otimes 2})$ provienne d'une application définie sur X.
Posons alors

$$\boxed{N \;=\; \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathsf{M}_0, \mathcal{O}_X) \;=\; (\Lambda^2 V)^{\otimes \frac{n(n-1)}{2}} \otimes \mathcal{O}_X(1-n).} \tag{3.6.3}$$

C'est un module inversible sur X, et le dual de $\omega^{\otimes 2}$ donne une application

$$\mu : N^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{O}_X.$$

3.7. Proposition *Soit V un espace vectoriel de rang 2 sur un corps de caractéristique $\neq 2$. Le revêtement double $\mathbf{P}(V)^n/\mathfrak{A}_n \longrightarrow \mathbf{P}(\mathsf{TS}^n(V))$ est associé au module inversible*

$$N = (\Lambda^2 V)^{\otimes \frac{n(n-1)}{2}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathsf{TS}^n(V))}(1-n)$$

et à la multiplication μ précisée plus haut.

Reprenons les notations introduites ci-dessus : $Y = \mathbf{P}(V)^n/\mathfrak{A}_n$ et $X = \mathbf{P}(V)^n/\mathfrak{S}_n = \mathbf{P}(\mathsf{TS}^n(V))$. L'application $\mu : N^{\otimes 2} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ donne une structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre sur $\mathcal{O}_X \oplus N$. Considérons la duale $N \longrightarrow f_\star(\mathcal{O}_Y)$ de l'application ω (3.6.2) ; il faut montrer qu'elle induit un isomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{O}_X \oplus N \longrightarrow f_\star(\mathcal{O}_Y).$$

Cette démonstration passe par des restrictions à des ouverts affines de X.

3.7.1 Considérons de nouveau le morphisme $\pi : \mathbf{P}(V)^n \longrightarrow \mathbf{P}(\mathsf{TS}^n(V)) = X$. Soit $x \in V$ un élément non nul ; notons $D(x) \subset \mathbf{P}(V)$ l'ouvert où $\alpha(x)$ engendre L. L'élément $x^{\otimes n} \in \mathsf{TS}^n(V)$ définit, de même, l'ouvert $D(x^{\otimes n}) \subset \mathbf{P}(\mathsf{TS}^n(V)) = X$ au-dessus duquel l'image $\alpha_X(x^{\otimes n})$ de cet élément engendre $\mathcal{O}_X(1)$. Par image réciproque, on trouve, compte-tenu de (3.2.2), un isomorphisme

$$\pi^\star(\mathcal{O}_X \xrightarrow{\alpha_X(x^{\otimes n})} \mathcal{O}_X(1)) \;\simeq\; (\mathcal{O}_{\mathbf{P}(V)^n} \xrightarrow{\alpha_1(x)\otimes\cdots\otimes\alpha_n(x)} L_1 \otimes \cdots \otimes L_n)$$

Par suite, on a

$$\pi^{-1}(D(x^{\otimes n})) \;=\; D(x) \times \cdots \times D(x).$$

Notons aussi que les puissances $x^{\otimes n}$ engendrent $\mathsf{TS}^n(V)$ dès que le corps de base contient $n+1$ éléments, comme on peut le déduire de (3.2.3), et qu'alors les ouverts de la forme $D(x^{\otimes n})$ recouvrent X. La démonstration de **3.7** autorise les extensions du corps de base. Ainsi, il suffit de faire la démonstration pour les revêtements doubles de la forme

$$D(x)^n/\mathfrak{A}_n \longrightarrow D(x^{\otimes n}).$$

3.7.2 Soit donc $\{e_0, e_1\}$ une base de V ; désignons par $\mathcal{V}$ le schéma affine $D(e_1)^n \subset \mathbf{P}(V)^n$. Pour chaque i, $\alpha_i(e_1)$ engendre $L_i|\mathcal{V}$, donc il existe $T_i \in \mathrm{H}^0(\mathcal{V}, \mathcal{O}_\mathcal{V})$ tel que

$$\alpha_i(e_0) = T_i \alpha(e_1).$$

On a un isomorphisme

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{V}, \mathcal{O}_\mathcal{V}) \simeq \mathrm{H}^0(D(e_1)^n) \simeq \mathrm{H}^0(D(e_1))^{\otimes n} \simeq K[T_1, \ldots, T_n].$$

Explicitons de même l'anneau du schéma affine $\mathcal{U} = D(e_1^{\otimes n}) \subset X$. Avec les notations de **3.2.**, la section inversible s'écrit $e_1^{\otimes n} = \mathbf{e}_0$; pour $p = 1, 2, \ldots n$, si on pose $S_p = \mathbf{e}_p/\mathbf{e}_0 \in \mathrm{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_\mathcal{U})$, on a un isomorphisme $K[S_1, \ldots, S_n] \;\simeq\; \mathrm{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_\mathcal{U})$; le morphisme $\pi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ correspond à l'inclusion de K-algèbres

$$K[S_1, \ldots, S_n] \;\subset\; K[T_1, \ldots, T_n].$$

où S_p est identifié au polynôme symétrique élémentaire de degré p en les T_i. La fin de cette vérification est classique : introduisons le polynôme

$$\mathsf{V}(T_1,\ldots,T_n) \;=\; \prod_{i<j}(T_i-T_j).$$

L'anneau d'invariants $K[T_1,\ldots,T_n]^{\mathfrak{A}_n}$ est un module libre de rang 2 sur $K[S_1,\ldots,S_n]$, de base $\{1,\mathsf{V}\}$. Rappelons-en la démonstration : on choisit une transposition τ, de sorte que $\mathfrak{S}_n=\mathfrak{A}_n\sqcup\tau\mathfrak{A}_n$; soit P un polynôme invariant sous le groupe alterné ; on écrit

$$P=\frac{1}{2}(P+{}^{\tau}P)+\frac{1}{2}(P-{}^{\tau}P)=P^{+}+P^{-}.$$

Comme P est invariant par permutation paire, pour toute transposition σ, on a ${}^{\sigma}P={}^{\tau\tau\sigma}P={}^{\tau}({}^{\tau\sigma}P)={}^{\tau}P$; par suite, le premier facteur P^{+} est symétrique, et on a ${}^{\sigma}P^{-}=-P^{-}$; prenant pour σ la transposition $\{i,j\}$, on en déduit que le polynôme T_i-T_j divise P^{-}, et, de proche en proche, que V divise P^{-} ; si on écrit $P^{-}=\mathsf{V}Q$, on constate que le polynôme Q est symétrique.

Le carré de V est le discriminant du polynôme, en T, générique ([Bour] A IV 6.7, formule (46))

$$\prod_i(T-T_i) \;=\; T^n-S_1T^{n-1}+\cdots+(-1)^nS_n$$

C'est un polynôme symétrique, i.e on a $\mathsf{V}(T_1,\ldots,T_n)^2\in K[S_1,\ldots,S_n]$. D'où la description habituelle de ce revêtement dans le cas polynomial.

Pour achever la démonstration de **3.7** il reste à relier V à la section w de $\mathrm{H}^0(\mathcal{V},\mathsf{M})$ introduite en **3.5**.. Or, l'application (3.5.1) $\Lambda^2V\longrightarrow L_i\otimes L_j$ s'écrit ici

$$e_0\wedge e_1\longmapsto T_i\alpha_i(e_1)\otimes\alpha_j(e_1)-T_j\alpha_i(e_1)\otimes\alpha_j(e_1)=(T_i-T_j)\alpha_i(e_1)\otimes\alpha_j(e_1).$$

Il est alors clair que la section $w:\mathcal{O}_{\mathcal{V}}\longrightarrow\mathsf{M}|\mathcal{V}$ correspond à l'application

$$(\Lambda^2V)^{\otimes\frac{n(n-1)}{2}}\longrightarrow(L_1\otimes\cdots\otimes L_n)^{\otimes(n-1)},\qquad(e_0\wedge e_1)^{\otimes\frac{n(n-1)}{2}}\longmapsto\mathsf{V}.(\alpha_1(e_1)\otimes\cdots\otimes\alpha_n(e_1))^{\otimes(n-1)}$$

3.8. Exemple : le revêtement $\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1\longrightarrow\mathbf{P}_2$

Appliquant ce qui précède lorsque $n=2$, on trouve que le module inversible associé à ce revêtement est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-1)$, et que la multiplication est donnée par la section

(3.8.1) $$T_1^2-4T_0T_2\;:\;\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-2)\;\longrightarrow\;\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}$$

(On a identifié $\mathbf{P}_2$ et $\mathrm{Proj}(K[T_0,T_1,T_2])$). Cela mérite d'être relié à la formule

(3.8.2) $$(X_1Y_2\;-\;Y_1X_2)^2\;=\;(X_1Y_2+Y_1X_2)^2\;-\;4(X_1X_2)(Y_1Y_2).$$

En effet, le morphisme $\pi:\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1\longrightarrow\mathbf{P}_2$ s'écrit en coordonnées homogènes :

$$(x_1:y_1)\,,\,(x_2:y_2)\;\longmapsto\;(x_1x_2:x_1y_2+x_2y_1:y_1y_2)$$

Ainsi, sur $\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1$, le carré de la section $X_1\otimes Y_2\;-\;Y_1\otimes X_2$ du faisceau inversible $L_1\otimes L_2=\pi^{\star}\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1)$, s'exprime par (3.8.2) en fonction des sections invariantes $T_0=X_1X_2$, $T_1=X_1Y_2+Y_1X_2$ et $T_2=Y_1Y_2$, lesquelles sont des sections de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1)$. La propriété universelle **1.5** conduit à un morphisme

$$\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1\longrightarrow\mathcal{S}pec(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-1))$$

D'après **3.7**, c'est un isomorphisme.
Notons que π induit un isomorphisme de la diagonale $\Delta\subset\mathbf{P}_1\times\mathbf{P}_1$ (dont l'équation est $X_1Y_2-Y_1X_2=0$) sur la conique de $\mathbf{P}_2$ d'équation $T_1^2-4T_0T_2=0$, laquelle est le lieu de diramation de π.

4. Le revêtement associé à une forme quadratique

Soit E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang deux, et L un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On considère une application quadratique $q : E \longrightarrow L$, ou plutôt, l'application linéaire qui lui est associée

$$\varphi : \mathcal{S}ym^2(E) \quad \longrightarrow \quad L.$$

Il est essentiel de ne pas se limiter aux formes bilinéaires usuelles, qui sont valeurs dans $\mathcal{O}_X$.

Ce paragraphe donne la construction, à partir de φ, d'un revêtement de rang 2, $f : Y \to X$ et d'un module quasi-cohérent $\mathcal{E}$ sur Y, tels que $f_\star(\mathcal{E}) = E$.
On montre ensuite que si φ est surjective, alors $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module inversible.

4.1. Posons $N = \mathcal{H}om(L, \Lambda^2 E)$; c'est un $\mathcal{O}_X$-module inversible (On omet $\mathcal{O}_X$ en indice dans $\bigotimes$ et dans $\mathcal{H}om$ car ici tout prend place dans la catégorie de $\mathcal{O}_X$-modules). Partant de la forme φ, comme ci-dessus, on définit une application $\mathcal{O}_X$-linéaire

(4.1.1) $$u : N \otimes E \;\longrightarrow\; E$$

en composant les applications suivantes

$$N \otimes E \longrightarrow N \otimes \mathcal{H}om(E, L) \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathcal{H}om(E, \wedge^2 E) \quad \xleftarrow{\sim} \quad E,$$

où celle de gauche est associée à φ, et avec le facteur $\frac{1}{2}$. Plus précisement, et en termes de sections locales x, y de E, et d'une section locale α de $N = \mathcal{H}om(L, \Lambda^2 E)$, on définit u par l'égalité

(4.1.2) $$\boxed{x \wedge u(\alpha \otimes y) \;=\; \frac{1}{2}\alpha(\varphi(x.y))}$$

Il y a deux isomorphismes « naturels » entre E et $\mathcal{H}om(E, \wedge^2 E)$; ils diffèrent par un signe ; j'ai choisi l'isomorphisme $E \to \mathcal{H}om(E, \wedge^2 E)$ donné par $y \longmapsto (x \mapsto x \wedge y)$; il semble faciliter l'écriture de plusieurs formules. Le coefficient $\frac{1}{2}$ est nécessaire pour que $x \mapsto x \wedge u(\alpha \otimes x)$ soit lié à la forme quadratique associée à φ, $x \mapsto \frac{1}{2}\varphi(x^2)$. On trouvera en **4.2.** une traduction matricielle de u.

On écrira souvent αx pour $u(\alpha \otimes x)$; l'application $x \mapsto \alpha x$ est un endomorphisme de E noté α_E.

La construction de u à partir de φ commute aux changements de base puisque E, L et N sont localement libres ; en considérant, pour $x \in X$, le changement de base $\mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$, on voit que si φ est non nulle en x, alors l'application $E \otimes \kappa(x) \longrightarrow \mathcal{H}om(E, L) \otimes \kappa(x)$ est non nulle, et par suite $1_{\kappa(x)} \otimes u \neq 0$.

On définit une application linéaire

$$\mu : N^{\otimes 2} \;\longrightarrow\; \mathcal{O}_X,$$

en posant

(4.1.3) $$\mu(\alpha^{\otimes 2}) = -\det(\alpha_E)$$

On peut aussi caractériser μ par la commutativité du carré suivant

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^2(N \otimes E) \arrow[r, "\wedge^2 u"] \arrow[d, "\wr"'] & \Lambda^2 E \arrow[d, "="] \\
N^{\otimes 2} \otimes \Lambda^2 E \arrow[r, "-\mu\otimes 1"'] & \Lambda^2 E
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire par la formule

(4.1.4) $$\mu(\alpha \otimes \beta) x \wedge y \;=\; -\,\alpha_E(x) \wedge \beta_E(y).$$

Cette application μ permet de munir le $\mathcal{O}_X$-module de rang 2,

$$\mathcal{A} \;=\; \mathcal{O}_X \oplus N$$

d'une structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre. Le morphisme

$$f : Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{A}) \longrightarrow X$$

est donc fini, localement libre de rang deux.

Le fermé de diramation (**1.3**) de f est défini par l'idéal $\mathcal{I} = \mathrm{Im}(N^{\otimes 2} \xrightarrow{\mu} \mathcal{O}_X)$; par suite, $Y \longrightarrow X$ est étale si et seulement si u est un isomorphisme ; on dit alors parfois que q est non dégénérée, ou non singulière.

4.2. Expression locale

Lorsque X est affine d'anneau R, et que E et L sont des modules libres, ces constructions ont la traduction matricielle suivante.

Soit $\{e_1, e_2\}$ une base de E, de sorte que $\{e_1^2, e_1e_2, e_2^2\}$ est une base de $\mathrm{Sym}^2(E)$; le choix d'une base $\{\varepsilon\}$ de L permet d'écrire $\varphi = \psi\epsilon$, où ψ est une forme linéaire sur $\mathrm{Sym}^2(E)$. Posons

$$a = \psi(e_1^2), \qquad b = \psi(e_1e_2), \qquad c = \psi(e_2^2).$$

On retrouve l'expression usuelle :

$$\psi((xe_1 + ye_2)^2) \ = \ ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Soit α la base de $N = \mathrm{Hom}(L, \wedge^2 E)$ définie par $\alpha(\varepsilon) = e_1 \wedge e_2$. Explicitons la matrice de l'endomorphisme $\alpha_E : E \longrightarrow E,\ x \mapsto \alpha x = u(\alpha \otimes x)$. La relation (4.1.2) donne

$$e_i \wedge \alpha e_j \ = \ \frac{1}{2}\alpha(\varphi(e_ie_j)) = \frac{1}{2}\psi(e_ie_j)e_1 \wedge e_2.$$

On en tire la matrice de α_E relativement à la base $\{e_1, e_2\}$:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -b & -c \\ a & b \end{pmatrix} \tag{4.2.1}$$

De même, on trouve pour l'application μ de (4.1.3)

$$\mu(\alpha^{\otimes 2}) \ = \ \frac{1}{4}(b^2 - ac).$$

Finalement, on voit que l'algèbre $\mathcal{A}$ associée à φ est isomorphe à

$$R[T]/(T^2 - (b^2 - ac)),$$

où la classe de T correspond à la base 2α de N.

4.3. Structure de $\mathcal{A}$-module sur E.

Revenons à la situation générale de **4.1.** On munit E d'une structure de $\mathcal{A}$-module en utilisant l'application $u : N \otimes E \to E$, laquelle s'étend en une application $\mathcal{O}_X$-linéaire $\mathcal{A} \otimes E \to E$. L'associativité (i.e l'égalité $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$) est conséquence de la relation $\alpha(\alpha x) = (\alpha^2)x$, puisque N est un module inversible.

Cette relation découle des égalités suivantes :

$$\begin{aligned} y \wedge \alpha(\alpha x) \ &= \ \tfrac{1}{2}\alpha(\varphi(y.\alpha x)), && \text{d'après (4.1.2)} \\ &= \tfrac{1}{2}\alpha(\varphi(\alpha x.y)), && \text{puisqu'il s'agit du produit dans } \mathrm{Sym}^2 \\ &= \alpha x \wedge \alpha y, && \text{d'après (4.1.2)} \\ &= \det(\alpha_E)x \wedge y, && \text{par définition de } \det(\alpha_E) \\ &= \alpha^2\, y \wedge x, && \text{d'après (4.1.3)} \\ &= y \wedge (\alpha^2)x, && \text{puisque } \alpha^2 \in \mathcal{O}_X. \end{aligned}$$

Comme cette égalité est vraie pour toute section y, on voit que l'on a l'égalité annoncée $\alpha(\alpha x) = (\alpha^2)x$.

Remarque L'égalité (4.1.2) est la clé des constructions du texte : comme E est de rang deux, la connaissance de $x \wedge u(\alpha \otimes y)$ pour tout x, détermine $u(\alpha \otimes y)$; ainsi, u et φ se codéterminent l'une l'autre ; autrement dit, se donner la structure de $\mathcal{A}$-module sur E (c'est-à-dire u) revient à se donner la forme quadratique sur E (c'est-à-dire φ) ; cette formule montre enfin le rôle de l'inversibilité de 2. Voir **5.4.** pour un énoncé précis.

4.4. Montrons que la surjectivité de φ entraîne que E est un $\mathcal{A}$-module inversible, *i.e.* que $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module inversible.

Pour ce faire, on peut supposer que X est le spectre d'un anneau local R, et donc que E, L et N sont des R-modules libres. Choisissons des bases et reprenons les notations de **4.2.** Comme le R-module $\mathrm{Sym}^2(E)$ est engendré par les carrés (**0.2**), la surjectivité de φ se traduit par l'existence d'un $x \in E$ tel que l'élément $\varphi(x.x) = \psi(x.x)\varepsilon$ soit un générateur de L, *i.e* que $\psi(x.x)$ soit inversible dans R. Notant α la base de N telle que $\alpha(\varepsilon) = e_1 \wedge e_2$, la relation

$$x \wedge \alpha x \;=\; \frac{1}{2}\psi(x.x)e_1 \wedge e_2$$

montre que $\{x,\, \alpha x\}$ est une base du R-module E, donc que x est un générateur de ce module sur l'anneau $\mathcal{A} = R + N$; c'en est même une base puisque la surjection obtenue $\mathcal{A} \to E$ concerne deux R-modules libres de même rang, et est donc un isomorphisme.

5. Forme quadratique sur l'image directe d'un inversible

Soit $f : Y \to X$ un revêtement de rang deux, et $\mathcal{E}$ un faisceau inversible sur Y. Le $\mathcal{O}_X$-module

$$E \;=\; f_\star(\mathcal{E})$$

est donc localement libre de rang deux.

On rappelle d'abord comment munir canoniquement E d'une forme quadratique à valeurs dans le module inversible $L = \mathsf{N}_{Y/X}(\mathcal{E})$, et on montre que le revêtement de rang 2 associé à cette forme selon le §4 est isomorphe à $Y \to X$. La construction du §4 est donc réversible, et cela est précisé en une équivalence de catégories.

5.1. Gardons les notations introduites au §1 : $f_\star(\mathcal{O}_Y) \;=\; \mathcal{A} \;=\; \mathcal{O}_X \oplus N$, où $N = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \mathcal{O}_X)$. Le foncteur $\mathsf{N}_{Y/X}$ associe à tout $\mathcal{O}_Y$-module inversible $\mathcal{E}$ le $\mathcal{O}_X$-module inversible

$$\mathsf{N}_{Y/X}(\mathcal{E}) \;=\; \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Lambda^2 f_\star(\mathcal{O}_Y),\, \Lambda^2 f_\star(\mathcal{E})) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Lambda^2\mathcal{A},\, \Lambda^2 E)$$

L'application quadratique $\nu_{\mathcal{E}}$ est *l'application normique universelle* $E = f_\star(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{N}_{Y/X}(\mathcal{E})$ (voir, pour plus de détails, ([Fer 1], §3.3)) ; elle sera nommée ici plus simplement la « norme » (avec des guillemets) ; c'est l'application fournie par le carré extérieur

$$E = \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, E) \;\subset\; \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A}, E) \quad \xrightarrow{\wedge^2} \quad \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Lambda^2\mathcal{A}, \Lambda^2 E)$$

Tout élément de $\Lambda^2\mathcal{A} = \Lambda^2(\mathcal{O}_X \oplus N)$ s'écrit localement de façon unique sous la forme $1 \wedge \alpha$, avec α une secction de N, et on a

$$\nu_{\mathcal{E}}(x) \;=\; (1 \wedge \alpha \mapsto x \,\wedge\, \alpha x). \tag{5.1.1}$$

C'est une application polynomiale de degré 2, qui s'étend en l'application linéaire

$$\varphi : \mathcal{S}ym^2(E) \quad\longrightarrow\quad L,$$

définie par $\varphi(xy) = \nu(x+y) - \nu(x) - \nu(y)$. On trouve

$$\varphi(xy) = (1 \wedge \alpha \;\longmapsto\; (x \wedge \alpha y + y \wedge \alpha x))$$

En fait, les deux termes dans la seconde parenthèse sont égaux.

5.1.2. Lemme *Soit α un endomorphisme d'un module E localement libre de rang deux. Si $\mathrm{Tr}_E(\alpha) = 0$, alors, pour tous $x, y \in E$, on a dans $\Lambda^2 E$,*

$$x \wedge \alpha y \;=\; y \wedge \alpha x.$$

En effet, introduisons une indéterminée T, et calculons de deux façons $(T-\alpha)(x)\wedge(T-\alpha)(y)$: si on développe on trouve

$$T^2x\wedge y - T(\alpha x\wedge y + x\wedge\alpha y) + \det(\alpha)x\wedge y,$$

Par ailleurs, par définition du déterminant, cet élément est aussi égal à

$$(T^2 - \mathrm{Tr}(\alpha)T + \det(\alpha))x\wedge y$$

L'hypothèse $\mathrm{Tr}(\alpha)=0$ entraîne donc l'égalité annoncée. $\square$

Si α est dans $N=\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}_{\mathcal{A}})$, on a aussi $\mathrm{Tr}_E(\alpha)=0$ puisque E est un $\mathcal{A}$-module inversible. Finalement, on obtient l'expression suivante pour l'application

$$\varphi : \mathcal{S}ym^2(E) \quad\longrightarrow\quad L = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Lambda^2\mathcal{A},\, \Lambda^2 E)$$

$$\varphi(xy) \;=\; (1\wedge\alpha \longmapsto 2x\wedge\alpha y). \tag{5.1.3}$$

La surjectivité de cette application est une propriété locale ; pour la vérifier, on peut donc supposer que $\mathcal{E}=\mathcal{O}_Y$, et, par suite, que $E=\mathcal{A}=\mathcal{O}_X\oplus N$, et $L=\mathcal{O}_X$; l'image de φ est un idéal, et il contient l'élément inversible $2=\varphi(1.1)$.

5.2. Montrons que le revêtement associé à φ est isomorphe à f.

Reprenons la démarche du §4 : la construction du revêtement associé à φ repose sur le module inversible $\mathcal{H}om(L,\Lambda^2E)$, noté N', et sur l'application (4.1.1) $u : N'\otimes E \longrightarrow E$.
On définit un isomorphisme $N\simeq N'$ en associant à $\alpha\in N$ l'élément $\alpha'\in N'=\mathcal{H}om(L,\Lambda^2E)$ défini par

$$\alpha'(\lambda) = \lambda(1\wedge\alpha) \tag{5.2.1}$$

(Cela a bien un sens puisque $\lambda\in L=\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Lambda^2\mathcal{A},\,\Lambda^2E)$ (5.1.3)).
Il faut d'abord vérifier que pour tout $\alpha\in N$ et $y\in E$, on a

$$u(\alpha'\otimes y) = \alpha y \tag{5.2.2}$$

où le produit αy est donné par la structure initiale de $\mathcal{A}$-module sur E. Or, pour tout $x\in E$, on a

$$x\wedge u(\alpha'\otimes y) \overset{(4.1.2)}{=} \frac{1}{2}\alpha'(\varphi(xy)) \overset{(5.2.1)}{=} \frac{1}{2}\varphi(xy)(1\wedge\alpha) \overset{(5.1.3)}{=} x\wedge\alpha y.$$

D'où l'égalité (5.2.2). Il faut ensuite vérifier que l'isomorphisme linéaire $\mathcal{A}=\mathcal{O}_X\oplus N\,\simeq\,\mathcal{O}_X\oplus N'$ est un isomorphisme d'algèbres, c'est-à-dire que le carré dans $\mathcal{A}$ d'un élément $\alpha\in N$, soit $-\mathrm{norm}_{\mathcal{A}}(\alpha)$, est égal au carré de α' soit $-\det(\alpha'_E)$ (4.1.3). Or, l'égalité (5.2.2) dit que l'endomorphisme $\alpha'_E=(y\mapsto u(\alpha'\otimes y))$ est égal à $(y\mapsto \alpha y)$; comme E est un $\mathcal{A}$-module inversible, le déterminant de ce dernier est égal à $\mathrm{norm}_{\mathcal{A}}(\alpha)$; d'où la compatibilité aux produits, qui était annoncée.

5.3 Fonctorialité des ces constructions.

Au couple $(Y,\mathcal{E})$ formé d'un revêtement double de X et d'un $\mathcal{O}_Y$-module inversible $\mathcal{E}$, on associe donc une forme quadratique partout non nulle sur X, $q : E\longrightarrow L$. Il s'agit ici de dégager des morphismes de couples qui induisent des morphismes de formes quadratiques. Notons d'abord qu'une restriction évidente s'impose : on ne peut considérer que les morphismes de revêtements de X,

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f'"'] & & Y \arrow[dl, "f"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

qui sont, au moins, compatibles aux normes usuelles, au sens où le diagramme suivant doit être commutatif

$$\begin{tikzcd} f_\star\mathcal{O}_Y \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\mathrm{norm}"'] & & f'_\star\mathcal{O}_{Y'} \arrow[dl, "\mathrm{norm}"] \\ & \mathcal{O}_X & \end{tikzcd}$$

Le morphisme ψ désigne l'image directe par f du morphisme canonique $\mathcal{O}_Y \longrightarrow g_\star\mathcal{O}_{Y'}$, et cette commutativité est requise pour tous les triangles obtenus par changement de base sur X ; autrement dit, les normes doivent être considérées comme des *lois polynômes* et non comme de simples applications. Introduisant une indéterminée T, on doit donc avoir, pour toute section locale y de $f_\star\mathcal{O}_Y$,

$$\mathrm{norm}_{Y/X}(T-y) \;=\; \mathrm{norm}_{Y'/X}(T-\psi(y))$$

c'est-à-dire

$$T^2 - \mathrm{Tr}_{Y/X}(y)T + \mathrm{norm}_{Y/X}(y) \;=\; T^2 - \mathrm{Tr}_{Y'/X}(\psi(y))T + \mathrm{norm}_{Y'/X}(\psi(y))$$

Cette égalité entre polynômes implique la suivante

$$\mathrm{Tr}_{Y/X}(y) \;=\; \mathrm{Tr}_{Y'/X}(\psi(y)).$$

On dira donc parfois que g est *compatible aux traces*. En utilisant les décompositions $f_\star\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X \oplus N$ et $f'_\star\mathcal{O}_{Y'} = \mathcal{O}_X \oplus N'$, on voit que la compatibilité aux traces s'écrit finalement

$$\psi(N) \;\subset\; N'. \tag{5.3.1}$$

En fait on n'obtiendra de résultats satisfaisants que sous une hyppothèse un peu plus forte (cf. (**1.6**)), à savoir :

$$\psi \quad \text{est injective.} \tag{5.3.2}$$

5.3.3 *Gardons les notations introduites, et considérons un morphisme $g : Y' \longrightarrow Y$ de revêtements doubles de X ; soit $\mathcal{E}$ un module inversible sur Y, et $\mathcal{E}' = g^\star\mathcal{E}$ son image réciproque sur Y'. On suppose que l'homomorphisme $\psi : f_\star\mathcal{O}_Y \longrightarrow f'_\star\mathcal{O}_{Y'}$ associé à g est* injectif. *Alors g induit un morphisme des « normes », au sens suivant : il existe un isomorphisme $\omega : \mathsf{N}_{Y/X}(\mathcal{E}) \simeq \mathsf{N}_{Y'/X}(\mathcal{E}')$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} f_\star\mathcal{E} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\nu_\mathcal{E}"'] & f'_\star\mathcal{E}' \arrow[d, "\nu_{\mathcal{E}'}"] \\ \mathsf{N}_{Y/X}(\mathcal{E}) \arrow[r, "\omega"'] & \mathsf{N}_{Y'/X}(\mathcal{E}'), \end{tikzcd}$$

où θ désigne l'image directe par f de l'application canonique $\mathcal{E} \longrightarrow g_\star g^\star\mathcal{E}$.

Allégeons, comme plus haut, les notations en posant $\mathcal{A} = f_\star\mathcal{O}_Y$, $\mathcal{A}' = f'_\star\mathcal{O}_{Y'}$, $E = f_\star\mathcal{E}$ et $E' = f'_\star\mathcal{E}'$. Pour définir ω, introduisons les deux applications évidentes

$$\mathsf{N}_{Y/X}(\mathcal{E}) = \mathcal{H}om(\Lambda^2\mathcal{A}, \Lambda^2 E) \xrightarrow{(1,\wedge^2\theta)} \mathcal{H}om(\Lambda^2\mathcal{A}, \Lambda^2 E') \xleftarrow{(\wedge^2\psi,1)} \mathcal{H}om(\Lambda^2\mathcal{A}', \Lambda^2 E') = \mathsf{N}_{Y'/X}(\mathcal{E}')$$

Il s'agit de vérifier qu'elles sont injectives et qu'elles ont même image. Ce sont là des propriétés locales sur X, si bien qu'on peut supposer, $\mathcal{E}$ étant localement isomorphe à $\mathcal{O}_Y$, que $E = \mathcal{A}$, $E' = \mathcal{A}'$ et $\theta = \psi$. L'injectivité de $\wedge^2\psi$ provient de l'injectivité de ψ, et celle de sa duale provient du fait que $\mathrm{Coker}(\wedge^2\psi)$ est un module de torsion. Par ailleurs, les deux applications

$$\mathcal{H}om(\Lambda^2\mathcal{A}, \Lambda^2\mathcal{A}) \xrightarrow{(1,\wedge^2\psi)} \mathcal{H}om(\Lambda^2\mathcal{A}, \Lambda^2\mathcal{A}') \xleftarrow{(\wedge^2\psi,1)} \mathcal{H}om(\Lambda^2\mathcal{A}', \Lambda^2\mathcal{A}')$$

ont la même image : le sous-module engendré par $\wedge^2\psi \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathcal{A}, \Lambda^2\mathcal{A}')$.
La compatibilité aux « normes » se voit donc par la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\theta"] \arrow[d, "\nu"'] & & E' \arrow[d, "\nu"] \\ \mathcal{H}om(\Lambda^2\mathcal{A}, \Lambda^2 E) \arrow[dr, "(1,\wedge^2\theta)"'] & & \mathcal{H}om(\Lambda^2\mathcal{A}', \Lambda^2 E') \arrow[dl, "(\wedge^2\psi,1)"] \\ & \mathcal{H}om(\Lambda^2\mathcal{A}, \Lambda^2 E') & \end{tikzcd}$$

laquelle se vérifie en suivant le destin d'une section x de E :

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & 1\otimes x \arrow[d, mapsto] \\
(1\wedge\alpha \mapsto x\wedge\alpha x) \arrow[dr, mapsto] & & (1\wedge\alpha' \mapsto 1\otimes x \,\wedge\, \alpha'\otimes x) \arrow[dl, mapsto] \\
& (1\wedge\alpha \mapsto 1\otimes x\wedge 1\otimes\alpha x) &
\end{tikzcd}$$

(Remarquer que, dans $E' = \mathcal{A}'\otimes_{\mathcal{A}} E$, on a $\psi(\alpha)\otimes x = 1\otimes\alpha x$ pour $\alpha\in N$).

Examinons maintenant la fonctorialité du passage d'une forme quadratique à un revêtement double, expliqué au §4.

5.3.4. *Soient E et E' des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang 2. Soient $q : E \longrightarrow L$ et $q' : E' \longrightarrow L$ deux applications quadratiques, partout non nulles, à valeurs dans un même $\mathcal{O}_X$-module inversible L. Soit $f : Y \longrightarrow X$ et $f' : Y' \longrightarrow X$ les revêtements doubles associés à q et q'.*
Alors, à toute application linéaire injective *$\theta : E \longrightarrow E'$ telle que $q = q'\theta$, correspond un morphisme de revêtements $g : Y' \longrightarrow Y$ dont le morphisme d'algèbres associé*

$$\psi : f_\star\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X\oplus N \;\longrightarrow\; f'_\star\mathcal{O}_{Y'} = \mathcal{O}_X\oplus N'$$

est injectif (il vérifie donc la relation $\psi(N)\subset N'$).

La définition de la restriction de ψ à N s'impose d'elle-même : c'est l'application

$$N = \mathcal{H}om(L, \wedge^2 E) \xrightarrow{(1,\wedge^2\theta)} \mathcal{H}om(L,\wedge^2 E') = N'$$

Il faut vérifier tout ce qui est sous-entendu dans le mot *correspond* de la conclusion. À savoir les points *a)*, *b)* et *c)* suivants .

a) L'opération de N sur E est transportée par ψ en l'opération de N' sur E' ; autrement dit, en utilisant les applications u de (4.1.1), le carré suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
N\otimes E \arrow[r, "\psi\otimes\theta"] \arrow[d, "u"'] & N'\otimes E' \arrow[d, "u'"] \\
E \arrow[r, "\theta"'] & E'
\end{tikzcd}$$

Au vu de la relation (4.1.2), il faut vérifier que pour toutes sections locales $y\in E$, $x'\in E'$ et $\alpha\in N$, on a

$$x'\wedge u'(\psi(\alpha)\otimes\theta(y)) = x'\wedge\theta(u(\alpha\otimes y)). \tag{5.3.4.1}$$

Dans le cas où x' provient de E, c'est-à-dire si $x' = \theta(x)$, cette égalité découle de la définition de u (on note φ et φ' les formes bilinéaires associées à q et q' respectivement) ; en effet, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\theta(x)\wedge u'(\psi(\alpha)\otimes\theta(y)) &= \tfrac{1}{2}\psi(\alpha)(\varphi'(\theta(x)\theta(y))), && \text{par définition (4.1.2)}\\
&= \tfrac{1}{2}\psi(\alpha)(\varphi(xy)), && \text{puisque } q'\theta = q\\
&= \tfrac{1}{2}\wedge^2\theta(\alpha(\varphi(xy))), && \text{par définition de } \psi\\
&= \theta(x)\wedge\theta(u(\alpha\otimes y)), && (4.1.2).
\end{aligned}$$

Pour un x' général, on se ramène au cas précédent par la remarque suivante. L'égalité (5.3.4.1) peut se vérifier localement sur X, ce qui permet de supposer que $E = E'$, et que θ est donc un endomorphisme ; son déterminant est une section régulière puisque θ est supposée injective. Soit t cette section. Comme $\wedge^2 E'$ est inversible, t est régulière pour ce module, et il suffit donc de vérifier l'égalité $tx'\wedge u'(\psi(\alpha)\otimes\theta(y)) = tx'\wedge\theta(u(\alpha\otimes y))$. L'existence du *cotransposé* $\tilde\theta$ de θ, et la relation $\theta\circ\tilde\theta = t_{E'}$ montrent que $tE'\subset\theta(E)$, ce qui réduit la vérification au cas déjà traité.

b) L'application ψ est compatible aux multiplications *i.e.* pour $\alpha\in N$, on a

$$\mu'(\psi(\alpha)^{\otimes 2}) = \mu(\alpha^{\otimes 2})$$

Cela découle de la formule (4.1.3) $\mu(\alpha^{\otimes 2}) = -\det(\alpha_E)$, et de *a)*. Cela entraîne que ψ s'étend en un morphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$, d'où le morphisme de revêtements $g : Y' \longrightarrow Y$.

c) Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ les modules inversibles associés respectivement à E et E'. Le point *a)* implique que θ induit une application de $\mathcal{O}_{Y'}$-modules inversibles $\chi : g^\star\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$. C'est un isomorphisme.
En effet, d'après le résultat direct (**5.3.3**) on dispose d'un isomorphisme $\omega : \mathsf{N}_{Y/X}(\mathcal{E}) \simeq \mathsf{N}_{Y'/X}(g^\star\mathcal{E})$ compatible aux normes. Mais, d'après (**5.2**), les deux modules inversibles $\mathsf{N}_{Y/X}(\mathcal{E})$ et $\mathsf{N}_{Y'/X}(\mathcal{E}')$ sont canoniquement isomorphes à L ; on en déduit que $\mathsf{N}_{Y'/X}(\chi)$ est un isomorphisme (se souvenir que q et q' sont partout non nulles). En explicitant $\mathsf{N}_{Y'/X}(g^\star\mathcal{E})$ et $\mathsf{N}_{Y'/X}(\mathcal{E}')$, on voit l'isomorphisme

$$\mathsf{N}_{Y'/X}(\chi) : \mathcal{H}om(\Lambda^2\mathcal{A}', \Lambda^2\mathcal{A}' \otimes_{\mathcal{A}} E) \longrightarrow \mathcal{H}om(\Lambda^2\mathcal{A}', \Lambda^2 E')$$

Il montre que l'application $\Lambda^2\mathcal{A}' \otimes_{\mathcal{A}} E \longrightarrow \Lambda^2 E'$ est un isomorphisme, donc que χ lui-même en est un.

Cela achève la démonstration de **5.3.4.**

5.4. Résumé

Soit X un schéma où 2 est inversible.

Désignons par $\mathcal{R}$ la catégorie dont les objets sont les couples $(Y, \mathcal{E})$, où $f : Y \to X$ est un revêtement double de X, et $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_Y$-module inversible. Une flèche dans $\mathcal{R}$ de $(Y, \mathcal{E})$ vers $(Y', \mathcal{E}')$ est constituée d'un morphisme de revêtements $g : Y' \longrightarrow Y$ et d'un isomorphisme $g^\star\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}'$; on impose de plus à g la condition que le morphisme induit $\psi : f_\star\mathcal{O}_Y \longrightarrow f'_\star\mathcal{O}_{Y'}$ soit *injectif.*

Désignons par $\mathcal{Q}$ la catégorie dont les objets sont les applications quadratiques partout non nulles $q : E \longrightarrow L$, de source un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 2, à valeurs dans un inversible. Une flèche dans $\mathcal{Q}$ de $q : E \longrightarrow L$ vers $q' : E' \longrightarrow L'$ est constituée d'une application linéaire *injective* $\theta : E \longrightarrow E'$ et d'un isomorphisme $\omega : L \longrightarrow L'$ tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "q"'] & E' \arrow[d, "q'"] \\ L \arrow[r, "\omega"'] & L' \end{tikzcd}$$

Alors les catégories $\mathcal{R}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes.

Plus précisement, l'application sur les objets

$$\mathsf{N} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{Q}, \qquad (Y, \mathcal{E}) \longmapsto (\nu_{\mathcal{E}} : f_\star\mathcal{E} \longrightarrow \mathsf{N}_{Y/X}(\mathcal{E}))$$

se prolonge en un foncteur covariant (**5.3.3**). Et il existe un foncteur covariant

$$\mathsf{A} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{R}$$

défini sur les objets en **4.1**, et sur les flèches en **5.3.4**, tel que les foncteurs $\mathsf{N} \circ \mathsf{A}$ et $\mathsf{A} \circ \mathsf{N}$ soient isomorphes aux foncteurs identité.

6. Formes bilinéaires symétriques et polynômes homogènes de degré deux

Ces deux notions sont duales l'une de l'autre et on peut, le plus souvent, les identifier sans obscurcir le propos ; mais ici, il faut les distinguer et préciser comment on passe de l'une à l'autre.

Soit E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang deux, et L et M des $\mathcal{O}_X$-modules inversibles.
Un polynôme homogène de degré 2 sur E (on devrait préciser : « tordu par M ») est une application linéaire

$$\gamma : \mathcal{O}_X \quad \longrightarrow \quad \mathcal{S}ym^2(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} M.$$

On va rappeler comment il lui correspond une application linéaire

$$\varphi : \mathcal{S}ym^2(E) \quad\longrightarrow\quad L.$$

Pour passer d'une notion à l'autre, on utilise le

6.1. Lemme *Soit X un schéma sur lequel 2 est inversible, et E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang deux. Alors l'application linéaire*

$$E^{\otimes 4} \;\longrightarrow\; (\Lambda^2 E)^{\otimes 2}, \qquad x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4 \;\longmapsto\; (x_1 \wedge x_3) \otimes (x_2 \wedge x_4) + (x_1 \wedge x_4) \otimes (x_2 \wedge x_3\,)$$

est invariante si on permute 1 et 2, et si on permute 3 et 4, de sorte qu'elle passe aux quotients et définit une application

$$\mathcal{S}ym^2(E) \otimes \mathcal{S}ym^2(E) \;\longrightarrow\; (\Lambda^2 E)^{\otimes 2},$$

d'où, finalement, une application

$$\mathcal{S}ym^2(E) \;\longrightarrow\; \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{S}ym^2(E),\, (\Lambda^2 E)^{\otimes 2}).$$

C'est un isomorphisme.

On le vérifie en se ramenant au cas où E est un module libre de rang deux, et en choisissant une base $\{e_1, e_2\}$ de E : relativement à la base $\{e_1^2, e_1e_2, e_2^2\}$ de $\mathrm{Sym}^2(E)$ et à la base $e_1 \wedge e_2 \otimes e_1 \wedge e_2$ de $(\Lambda^2 E)^{\otimes 2}$, la matrice de cette application est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \square$$

6.2. Ainsi, à une section γ de $\mathcal{S}ym^2(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} M$, cet isomorphisme associe une forme $\varphi : \mathcal{S}ym^2(E) \longrightarrow L$ à valeurs dans le module inversible $L = (\Lambda^2 E)^{\otimes 2} \otimes M$.

Si γ est partout non nulle alors φ est surjective, et réciproquement. L'hypothèse signifie, en effet, que pour tout point $x \in X$, de corps résiduel $\kappa(x)$, l'application

$$\gamma \otimes \kappa(x) : \kappa(x) \longrightarrow \mathcal{S}ym^2(E \otimes \kappa(x)) \otimes_{\kappa(x)} (M \otimes \kappa(x))$$

est injective ; il revient au même de supposer que γ est injective et que $\mathrm{Coker}(\gamma)$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre ([Bour] AC II, §3.2, Prop.6, ou [EGA I] 0_I6.7.4). Mais c'est aussi évident si on utilise le lemme qui précède : cette dualité montre que la non nullité en chaque point de γ et de φ sont équivalentes, et, pour φ elle est clairement équivalente à sa surjectivité.

6.3. Proposition *Soit $\gamma : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{S}ym^2(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} M$ une section partout non nulle, soit $\varphi : \mathcal{S}ym^2(E) \longrightarrow L$ la forme symétrique "duale" de γ, et $\mathcal{A}$ la $\mathcal{O}_X$-algèbre associée à φ, de sorte que E est muni d'une structure de $\mathcal{A}$-module inversible. Alors, la suite*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}ym^2(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} M \xrightarrow{\text{can.}} \mathcal{S}ym^2_{\mathcal{A}}(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} M \longrightarrow 0$$

est exacte.

Ici encore, le plus simple est une vérification locale. On se place donc sur un ouvert affine où E, M et L sont libres. On choisit une base $\{e_1, e_2\}$ de E, et une base β de M ; l'élément $\varepsilon = (e_1 \wedge e_2)^{\otimes 2} \otimes \beta \in (\Lambda^2 E)^{\otimes 2} \otimes M = L$ est alors une base de ce module. La section $\gamma \in \mathcal{S}ym^2(E) \otimes M$ s'écrit

$$\gamma = (ae_1^2 + be_1e_2 + ce_2^2) \otimes \beta.$$

On vérifie immédiatement que la forme symétrique associée à γ est

$$\varphi = 2a\,\varphi_{22} - b\,\varphi_{12} + 2c\,\varphi_{11} \tag{6.3.1}$$

où $\varphi_{ij} : \mathcal{S}ym^2(E) \longrightarrow L$ désigne l'application donnée par $\varphi_{ij}(e_ke_l) = \varepsilon$ si $\{i, j\} = \{k, l\}$, et $= 0$ sinon.

Reprenons les notations de **4.2.**. L'algèbre $\mathcal{A}$ associée à φ est de la forme $\mathcal{O}_X \oplus N$, où le module N est isomorphe à $\mathcal{H}om(L, \Lambda^2 E)$, et admet donc pour base l'élément α défini par $\alpha(\varepsilon) = e_1 \wedge e_2$. La structure de $\mathcal{A}$-module sur E est déterminée par l'action de α, c'est-à-dire par un endomorphisme $\alpha_E : E \longrightarrow E$, qui est explicité en **4.2.** ; on trouve

$$\alpha_E(e_1) \;=\; \frac{1}{2} b\, e_1 \;+\; c\, e_2\,, \qquad\qquad \alpha_E(e_2) \;=\; -a\, e_1 \;-\; \frac{1}{2} b\, e_2. \tag{6.3.2}$$

Par ailleurs, le noyau de l'application canonique $\mathcal{S}ym^2(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} M \longrightarrow \mathcal{S}ym^2_{\mathcal{A}}(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} M$ est le $\mathcal{O}_X$-module engendré par les éléments de la forme $[x\alpha_E(y) - \alpha_E(x)y] \otimes \beta \in \mathcal{S}ym^2(E) \otimes M$; on peut se limiter aux éléments x, y faisant partie d'une base de E ; ce noyau est donc engendré par l'unique élément

$$[e_1\alpha_E(e_2) - \alpha_E(e_1)e_2] \otimes \beta = \big[e_1\,(-a\,e_1 - \frac{1}{2} b\, e_2) - (\frac{1}{2} b\, e_1 + c\, e_2)\, e_2\big] \otimes \beta = -\gamma \qquad \square$$

7. Diviseurs de degré deux sur les fibrés en droites

Soit X un schéma, E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang deux, et M un $\mathcal{O}_X$-module inversible. On considère une section partout non nulle

$$\gamma : \mathcal{O}_X \quad\longrightarrow\quad \mathcal{S}ym^2(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} M.$$

On peut voir γ comme une famille, indéxée par X, de polynômes homogènes de degré 2 en deux indéterminées. Soit $P = \mathbf{P}(E)$ le fibré projectif (en doites) associé à E, et $p : P \to X$ le morphisme canonique. La section γ détermine un diviseur effectif $D \subset P$, qui est fini, plat sur X, et localement de rang deux ; en particulier, le morphisme $D \to X$ est affine, et D est donc le spectre de la $\mathcal{O}_X$-algèbre finie localement libre de rang deux $p_\star(\mathcal{O}_D)$. On se propose de décrire cette algèbre.

7.1. La méthode classique utilise les propriétés des images directes, rappelées ci-dessous, où $\mathcal{O}_P(1)$ désigne le quotient inversible "fondamental" de $p^\star(E)$, et F un $\mathcal{O}_X$-module localement libre (cf. [EGA III] 2.1.16, ou [Hart] p.253, ex.8.3 et 8.4).

$$p_\star(\mathcal{O}_P(m) \otimes p^\star(F)) \;\simeq\; \begin{cases} 0, & \text{si} \quad m < 0 \\ \mathcal{S}ym^m(E) \otimes F, & \text{si} \quad m \geq 0 \end{cases} \tag{7.1.1}$$

$$\mathsf{R}^1 p_\star(\mathcal{O}_P(m) \otimes p^\star(F)) \simeq \begin{cases} 0, & \text{si} \quad m \geq -1 \\ (\Lambda^2 E)^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} F, & \text{si} \quad m = -2 \end{cases} \tag{7.1.2}$$

Le diviseur D associé à γ est défini par $D = \mathrm{div}(s)$, où s est déduite, par adjonction, de

$$\gamma : \mathcal{O}_X \to \mathcal{S}ym^2(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} M \simeq p_\star(\mathcal{O}_P(2) \otimes_{\mathcal{O}_P} p^\star M);$$

autrement dit, s est l'application composée

$$\mathcal{O}_P \;\overset{p^\star(\gamma)}{\longrightarrow}\; p^\star p_\star(\mathcal{O}_P(2)) \otimes_{\mathcal{O}_P} p^\star(M) \;\overset{\text{can.}}{\longrightarrow}\; \mathcal{O}_P(2) \otimes_{\mathcal{O}_P} p^\star M. \tag{7.1.3}$$

On en tire la suite exacte

$$0 \longrightarrow\; \mathcal{O}_P(-2) \otimes_{\mathcal{O}_P} p^\star M^{-1} \;\longrightarrow \mathcal{O}_P \;\longrightarrow\; \mathcal{O}_D \;\longrightarrow 0. \tag{7.1.4}$$

Par image directe, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow\; \mathcal{O}_X \;\longrightarrow\; p_\star(\mathcal{O}_D) \;\longrightarrow\; \mathsf{R}^1 p_\star(\mathcal{O}_P(-2) \otimes_{\mathcal{O}_P} p^\star M^{-1}) \;\longrightarrow 0 \tag{7.1.5}$$

Le faisceau conoyau $\mathsf{R}^1 p_\star(\mathcal{O}_P(-2) \otimes_{\mathcal{O}_P} p^\star M^{-1})$ est, d'après (7.1.2), isomorphe au module inversible

$$N = (M \otimes \Lambda^2 E)^{-1} = \mathcal{H}om(\Lambda^2 E \otimes M, \mathcal{O}_X)$$

Cela montre déjà que $p_\star(\mathcal{O}_D)$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre finie localement libre de rang 2. De plus, la suite (7.1.5) est scindée (par $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}$), si bien que $p_\star(\mathcal{O}_D)$ est isomorphe, comme $\mathcal{O}_X$-module, à $\mathcal{O}_X \oplus N$. Par ailleurs, la suite (7.1.4), tensorisée par $\mathcal{O}_P(1)$, donne, par image directe, un isomorphisme

$$E \;=\; p_\star(\mathcal{O}_P(1)) \quad\overset{\sim}{\longrightarrow}\quad p_\star(\mathcal{O}_D(1)).$$

On en déduit un morphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres, qui s'avère être injectif,

$$p_\star(\mathcal{O}_D) = p_\star\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_D}(\mathcal{O}_D(1)) \longrightarrow \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(E).$$

Autrement dit, E est muni d'une structure de $p_\star(\mathcal{O}_D)$-module (inversible). Mais tout cela ne donne pas facilement la structure multiplicative sur $\mathcal{O}_X \oplus N$, car les isomorphismes utilisés font intervenir la dualité et des calculs à la Čech, qu'il serait malaisé de suivre pour dégager le produit. On va montrer en (**7.3**) comment décrire cette multiplication dans le cadre proposé dans les paragraphes précédents.

7.2. C'est le lieu de citer un résultat, devenu classique, dû à Schwarzenberger ([Schwar], Thm 3, p.629), et qui se déduit très simplement de ce qui précède.

Soit Xun schéma projectif sur un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$. On suppose que $\dim(X) \leq 2$. *Alors, tout $\mathcal{O}_X$-module localement libre E de rang 2 est l'image directe $f_\star(\mathcal{E})$ d'un inversible $\mathcal{E}$ sur un revêtement double $f : Y \longrightarrow X$.*

En effet, X étant projectif, il existe un faisceau inversible très ample M sur X tel que $\mathcal{S}ym^2(E) \otimes M$ soit engendré par ses sections ; comme c'est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang $3 > \dim(X)$, ce module possède une section $\gamma : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{S}ym^2(E) \otimes M$ partout non nulle, comme il découle du *easy lemma of Serre* ([Mumf], p.148). L'application $\varphi : \mathcal{S}ym^2(E) \longrightarrow L$, duale de γ au sens de **6.1**, permet alors, en suivant **4.3** et **4.4**, de définir un revêtement double $f : Y \longrightarrow X$, et un $\mathcal{O}_Y$-module inversible $\mathcal{E}$ tels que $f_\star(\mathcal{E}) = E$.

On verra en **9.1** que la conclusion est fausse pour un module indécomposable sur $\mathbf{P}_n$ dès que $n \geq 3$.

7.3. Revenons aux notations introduites en **7.1.**, et à la section, supposée partout non nulle,

$$\gamma : \mathcal{O}_X \quad\longrightarrow\quad \mathcal{S}ym^2(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} M.$$

Montrons comment le §4 permet de décrire l'algèbre $p_\star(\mathcal{O}_D)$.
Le lemme **6.1** permet d'associer à γ, par dualité, une application linéaire

$$\varphi : \mathcal{S}ym^2(E) \longrightarrow L$$

à valeurs dans le module inversible $L = (\Lambda^2 E)^{\otimes 2} \otimes M$. Cette application est surjective puisque γ est partout non nulle. D'après le §4, on associe à φ un revêtement de rang deux $f : Y \to X$.

On va montrer l'existence d'un morphisme canonique de schémas sur X, $j : Y \longrightarrow P = \mathbf{P}(E)$, qui induit un isomorphisme de Y sur le diviseur D défini par γ.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbf{P}(E) \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Désignons par $\mathcal{E}$ le module inversible sur Y associé à E, c.f. **4.3.** et **4.4.**, de sorte qu'on a

$$f_\star(\mathcal{E}) \ = \ E.$$

Sur Y, l'application surjective $f^\star(E) = f^\star f_\star(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ détermine un morphisme $j : Y \to P$ de schémas sur X, caractérisé par l'isomorphisme

$$j^\star(\mathcal{O}_P(1)) \simeq \mathcal{E}$$

entre $\mathcal{O}_Y$-modules inversibles quotients de $f^\star(E)$. D'après [EGA II] 4.4.4 et 5.1.6, le morphisme j est une immersion fermée puisque le morphisme f est affine.

Montrons que j se factorise par le diviseur effectif $D \subset P$ défini par γ, c'est-à-dire, en utilisant (7.1.3), que l'application composée suivante est nulle :

(7.3.1) $$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^\star(\gamma)} f^\star\mathcal{S}ym^2_{\mathcal{O}_X}(E) \otimes_{\mathcal{O}_Y} f^\star(M) \xrightarrow{\psi\otimes 1} \mathcal{E}^{\otimes 2} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f^\star M,$$

où

$$\psi : f^\star(\mathcal{S}ym^2(E)) \longrightarrow \mathcal{E}^{\otimes 2}$$

est l'application canonique. Notons, comme au §1, $f_\star(\mathcal{O}_Y) \;=\; \mathcal{A}$.
En termes de $\mathcal{O}_X$-modules, cette application ψ s'écrit

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{S}ym^2_{\mathcal{O}_X}(E) \longrightarrow \mathcal{S}ym^2_{\mathcal{A}}(E).$$

Or, la proposition **6.3.** établit l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\gamma} \mathcal{S}ym^2(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} M \xrightarrow{\text{can.}} \mathcal{S}ym^2_{\mathcal{A}}(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} M \longrightarrow 0$$

Il est alors clair que l'application (7.3.1) est nulle.

Finalement, comme les schémas Y et D sont localement libres sur X, et de même rang, et que $j : Y \to D$ est une immersion fermée, on voit que j est un isomorphisme.

7.4. A titre d'exemple, on va déterminer l'algèbre $p_\star(\mathcal{O}_D)$ dans le cas où $X = \mathrm{Spec}(R)$ est affine, et où $E = R^2$ et $M = R$. Le polynôme homogène considéré s'écrit alors

$$\gamma \;=\; aX^2 + 2bXY + cY^2.$$

Supposer que γ est partout (sur $\mathrm{Spec}(R)$) non nulle revient à supposer que l'idéal $aR + bR + cR$ est égal à R. D'après **6.1.** et les calculs utilisés dans la démonstrations de **6.3.**, on voit que la forme linéaire $\varphi : \mathcal{S}ym^2(E) \longrightarrow R$ associée à γ s'écrit

$$\varphi = 2(c\varphi_{11} - b\varphi_{12} + a\varphi_{22}).$$

L'algèbre $p_\star(\mathcal{O}_D)$ s'identifie à la sous-algèbre de $\mathrm{End}_R(E) = \mathbf{M}_2(R)$ engendrée par l'endomorphisme α_E de **4.2.**, soit, ici, par la matrice

$$\begin{pmatrix} b & -a \\ c & -b \end{pmatrix}$$

On trouve finalement que $p_\star(\mathcal{O}_D)$ est isomorphe à

$$A = R[T]/(T^2 - (b^2 - ac)).$$

On peut vérifier directement qu'on a un isomorphisme de schémas

$$\text{(7.4.1)} \qquad \mathrm{Spec}(R[T]/(T^2 - (b^2 - ac))) \;\xrightarrow{\sim}\; \mathrm{Proj}(R[X,Y]/(aX^2 + 2bXY + cY^2))$$

Il faut d'abord s'assurer que le A-module $E = R^2$ est inversible, puis que les éléments $\{e_1, e_2\}$ de la base canonique vérifient dans $E \otimes_A E$ la relation

$$\text{(7.4.2)} \qquad a\, e_1 \otimes e_1 + 2b\, e_1 \otimes e_2 + c\, e_2 \otimes e_2 = 0.$$

Vérifions ces deux points par un calcul direct. Pour le premier, il s'agit de montrer qu'il existe localement un élément $z = (x, y) \in E$ tel que l'ensemble $\{z, \alpha_E(z)\}$ soit une base de E comme R-module ; cela se traduit par l'inversibilité (dans R) de

$$\det \begin{pmatrix} x & bx - ay \\ y & cx - by \end{pmatrix} \;=\; cx^2 - 2bxy + ay^2.$$

Considérons donc le polynôme $G(X, Y) = cX^2 - 2bXY + aY^2$. Si l'élément $a = G(0, 1)$ (resp. $c = G(1, 0)$) est inversible (dans R) alors l'élément $(0, 1)$ (resp. $(1, 0)$) est un générateur de E ; si $a-2b+c$ est inversible, alors $(1, 1)$ est un générateur. Comme l'hypothèse sur les coefficients implique que $aR+(a-2b+c)R+cR = R$, on a bien vérifié que le A-module E est localement isomorphe à A.
Pour vérifier (7.4.2), il suffit de remarquer que le membre de gauche s'écrit aussi

$$-e_1 \otimes (-ae_1 - be_2) + (be_1 + ce_2) \otimes e_2 = -e_1 \otimes \alpha_E(e_2) + \alpha_E(e_1) \otimes e_2;$$

cet élément est nul puisque le produit tensoriel est effectué sur A.

8. Groupes de Picard d'un revêtement de l'espace projectif

8.1. Proposition *Soit* $X = \mathbf{P}_n$ *l'espace projectif de dimension* n *sur un corps de caractéristique* $\neq 2$, *et* $f : Y \to X$ *un revêtement double. Si* $n \geq 3$, *alors l'homomorphisme*

$$f^\star : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y)$$

est un isomorphisme.

8.2. Remarques 1) Lorsque $n \leq 2$, on n'a plus un tel isomorphisme comme le montre, par exemple, le revêtement $\mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1 \longrightarrow \mathbf{P}_2$.
2) Sur le corps $\mathbf{C}$, et lorsque Y est supposé lisse, ce résultat a été démontré par Robert Lazarsfeld [Laz].
3) La démonstration proposée ci-dessous utilise la théorie des sections hyperplanes de Lefschetz, élaborée par Grothendieck dans [SGA 2], XI et XII ; ce texte contient l'énoncé suivant (XII, Cor. 3.7), qui est très proche de **8.1.** : *si* Y *est d'intersection complète (globale) dans un* $\mathbf{P}_r$, *alors* $\mathrm{Pic}(Y)$ *est libre engendré par la classe de* $\mathcal{O}_Y(1)$ (aucune hypothèse de lissité sur Y). Je ne vois pas comment passer directement de cet énoncé à celui de **8.1**.

La démonstration de **8.1** utilise plusieurs carrés cartésiens de la forme

$$(\star)\qquad \begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow[f]{} & X, \end{array}$$

où f (et donc f') sont des revêtements doubles, et où X' est un diviseur effectif sur X. Cela conduit à un carré commutatif

$$(\star\star)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(Y') & \xleftarrow{f'^\star} & \mathrm{Pic}(X') \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Pic}(Y) & \xleftarrow[f^\star]{} & \mathrm{Pic}(X), \end{array}$$

On va pouvoir comparer $f^\star$ et $f'^\star$ grâce à des informations sur les flèches verticales, fournies par le « théorème de Lefschetz » sous la forme donnée par Grothendieck ([SGA 2] p.121), et dont voici l'énoncé.

8.3 Théorème *Soit* X *un schéma algébrique projectif muni d'un module inversible ample* $\mathcal{L}$. *On suppose que* X *est de profondeur* ≥ 2 *en ses points fermés. Soit* X' *le support d'un diviseur effectif défini par une section de* $\mathcal{L}$.

Si $\mathrm{H}^1(X', \mathcal{L}_{X'}^{\otimes -m}) = \mathrm{H}^2(X', \mathcal{L}_{X'}^{\otimes -m}) = 0$ *pour* $m > 0$, *et si les anneaux locaux des points fermés de* X *sont parafactoriels, alors* $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X')$ *est bijectif.*

8.4 En fait, dans la démonstration de **8.1**, on disposera de conditions un peu plus fortes, et qui seront relatives à X, et non à son sous-schéma X'. Gardons les hypothèses générales de **8.3**.

Si $\mathrm{H}^j(X, \mathcal{L}^{\otimes -m}) = 0$ *pour* $m > 0$, *pour* $j = 1, 2$ *ou* 3, *et si les anneaux locaux des points fermés de* X *sont parafactoriels, alors* $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X')$ *est bijectif.*

La suite exacte de faisceaux sur X

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{X'} \longrightarrow 0$$

montre immédiatement que les hypothèses faites en **8.4** entraînent celles en **8.3**.

8.5. Pour mémoire :

$\mathrm{H}^j(\mathbf{P}_n, \mathcal{O}(r)) = 0$, pour $r \in \mathbf{Z}$ et $0 < j < n$.

8.6. Lemme *Soit* $f : Y \longrightarrow X$ *un revêtement double dont la multiplication* $\mu : N^{\otimes 2} \to \mathcal{O}_X$ *est nulle,* i.e. *dont le module inversible associé* N *est idéal de carré nul dans* $\mathcal{O}_Y$. *On suppose que*

$$\mathrm{H}^1(X, N) = \mathrm{H}^2(X, N) = 0.$$

Alors l'homomorphisme $f^\star : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y)$ *est un isomorphisme.*

Dans cet énoncé (classique), X est un schéma quelconque. La conclusion provient de la suite exacte

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{x \mapsto 1+x} \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow \mathcal{O}_Y^\times \longrightarrow 1$$

8.7 Démonstration de la proposition lorsque $n \geq 4$.
Soit $f : Y \to X = \mathbf{P}_n$ un revêtement double. Reprenons les notations du §1 : $f_\star(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X \oplus N$. Le schéma X étant intègre, la multiplication $\mu : N^{\otimes 2} \to \mathcal{O}_X$ est, soit nulle, soit injective. Si $\mu = 0$, N est un idéal de carré nul dans $\mathcal{O}_Y$, et le lemme précédent permet de conclure. Sinon le lieu de diramation X' est le diviseur défini par l'idéal $\mathcal{I} = \mathrm{Im}(\mu) \subset \mathcal{O}_X$.

Soit $Y' = f^{-1}(X') \xrightarrow{f'} X'$ le revêtement induit au-dessus du diviseur X', de sorte qu'on a le carré cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X, \end{tikzcd}$$

Montrons que $\mathrm{Pic}(X') \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y')$ est un isomorphisme.
Dans la décomposition $f_\star(\mathcal{O}_{Y'}) = \mathcal{O}_{X'} \oplus N'$, on a $N' = N/\mathcal{I}N$, et N' est un idéal de carré nul, si bien qu'on peut utiliser **8.6**, à condition d'avoir vérifié que $\mathrm{H}^1(X', N') = \mathrm{H}^2(X', N') = 0$. Par définition, N' s'insère dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow N \otimes N^{\otimes 2} \xrightarrow{1 \otimes \mu} N \longrightarrow N' \longrightarrow 0$$

Comme $X = \mathbf{P}_n$, le module inversible N est de la forme $N = \mathcal{O}_X(-s)$, pour un entier $s > 0$, d'où un isomorphisme $N \otimes N^{\otimes 2} \simeq \mathcal{O}_X(-3s)$; enfin, comme $n \geq 4$, on a pour tout entier positif r, $\mathrm{H}^j(X, \mathcal{O}_X(-r)) = 0$ pour $j = 1, 2, 3$. D'où la nullité de $\mathrm{H}^1(X', N')$ et de $\mathrm{H}^2(X', N')$.

Considérons maintenant les flèches verticales, et vérifions les conditions de **8.4**. Comme X est régulier les anneaux locaux de ses points fermés sont parafactoriels ; il en est de même pour Y puisqu'il est de dimension ≥ 4 et localement intersection complète ([SGA] 2, XI, 3.13, p.105).

Le faisceau ample $\mathcal{L}$ de l'énoncé **8.4** est ici $\mathcal{I}^{-1} \simeq \mathcal{O}_X(2s)$, donc les conditions d'annulation sont conséquences de **8.5**.

Ainsi, l'homomorphisme de restriction $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X')$ est un isomorphisme.

Passons à $Y' \to Y$. Le faiceau ample $\mathcal{L}$ à considérer ici est $\mathcal{I} \oplus \mathcal{I}N \simeq \mathcal{O}_X(-2s) \oplus \mathcal{O}_X(-3s)$, et il est clair que l'on a les mêmes propriétés d'annulation ; elles entraînent que $\mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(Y')$ est un isomorphisme.

Finalement, le carré $(\star\star)$ montre que $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(Y)$ est un isomorphisme.

8.8 On suppose maintenant que $X = \mathbf{P}_3$.
On réalise X comme un hyperplan dans $Q = \mathbf{P}_4$. Le revêtement donné $f : Y \to X$ est déterminé par l'application injective $\mu : \mathcal{O}_X(-2s) \to \mathcal{O}_X$, c'est-à-dire par une section de $\mathcal{O}_X(2s)$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Q(2s-1) \longrightarrow \mathcal{O}_Q(2s) \longrightarrow \mathcal{O}_X(2s) \longrightarrow 0$$

et les relations **8.5**, montrent que μ se relève (sans unicité) en une application

$$\mu_Q : \mathcal{O}_Q(-2s) \longrightarrow \mathcal{O}_Q.$$

Cette application permet de définir un revêtement double $g : Z \longrightarrow Q$ dont la restriction à l'hyperplan $X \subset Q$ est f. On a donc le carré cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow[g]{} & Q \end{array}$$

On en déduit le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(Y) & \xleftarrow{f^\star} & \mathrm{Pic}(X) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Pic}(Z) & \xleftarrow[g^\star]{} & \mathrm{Pic}(Q), \end{array}$$

Comme $Q = \mathbf{P}_4$, la première partie (**8.7**) montre que $g^\star$ est un isomorphisme. Comme X est un hyperplan dans Q, on dispose de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Q(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_Q \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

Par suite les conditions de **8.4** sont satisfaites, et $\mathrm{Pic}(Q) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ est donc un isomorphisme.
Comme l'idéal de Y dans Z est $\mathcal{O}_Q(-1) \oplus \mathcal{O}_Q(-1) \otimes N = \mathcal{O}_Q(-1) \oplus \mathcal{O}_Q(-1-s)$, les conditions d'annulation de **8.4** sont aussi satisfaites sur Z, donc $\mathrm{Pic}(Z) \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y)$ est un isomorphisme. Cela permet de conclure.

9. Application aux fibrés de rang deux sur les espaces projectifs.

9.1. Proposition *Soit $X = \mathbf{P}_n$ l'espace projectif de dimension $n \geq 2$ sur un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$. Soit E un fibré de rang 2 sur X, et $\varphi : \mathcal{S}ym^2(E) \to \mathcal{O}_X(r)$ une application régulière.*
i) Si E est indécomposable, alors $r > c_1$.
ii) Si φ est surjective et si $n \geq 3$, alors E est décomposable.

L'hypothèse sur φ signifie ici qu'en tout point $x \in X$ tel que $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) < \mathrm{rang}(\mathcal{S}ym^2(E)) = 3$, l'application $\mathcal{O}_{X,x}$-linéaire φ_x est surjective.
Comme d'habitude, l'entier c_1 est défini par $\Lambda^2 E = \mathcal{O}_X(c_1)$.

Suivant le §4.1, on introduit l'application associée à φ

$$u : N \otimes E \longrightarrow E$$

où $N = \mathcal{O}_X(c_1 - r)$; rappelons que $1_{\kappa(x)} \otimes u$ est non nulle en tout point $x \in X$ où φ est non nulle, *i.e* où φ_x est surjective.

Montrons que si u n'est pas injective, alors E est décomposable.

Supposons donc que le module $M = \mathrm{Ker}(u)$ ne soit pas nul, et montrons qu'alors il est inversible. L'exactitude de la suite $0 \to M \to N \otimes E \xrightarrow{u} E$ montre d'abord que M est est génériquement de rang 1 puisque u, comme φ, est génériquement non nulle ; comme X est lisse, le dual $M^\vee = \mathcal{H}om(M, \mathcal{O}_X)$ est un $\mathcal{O}_X$-module inversible.

> Plutôt qu'un liste de références éparpillées qui conduiraient à ce résultat bien connu, voici un démonstration directe : soit R un anneau local régulier, de corps des fractions K et M un R module de type fini tel que $K \otimes_R M$ soit de rang 1. Alors $M^\vee = \mathrm{Hom}(M, R)$ est libre. Soit, en effet, $v : M \to R$ une forme linéaire telle que l'idéal $v(M)$ soit maximal parmi les idéaux de ce type ; montrons que v est une base du dual $M^\vee$. Notons d'abord que, pour un élément non nul $t \in R$, la relation $v(M) \subset tR$ implique que t est inversible ; en effet, elle entraîne l'existence de $v' \in M^\vee$ tel que $v = tv'$; comme $v(M) = tv'(M) \subset v'(M)$, la maximalité de $v(M)$ implique que $tv'(M) = v'(M)$, donc que t est inversible. Soit $w \in M^\vee$, et $\xi \in K$

l'élément tel que $w = \xi\, v$; il faut montrer que ξ est dans R, c'est-à-dire, R étant normal, que $\xi \in R_{\mathfrak{p}}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 ; mais, R étant factoriel, un tel idéal est principal : $\mathfrak{p} = tR$; ce qui précède entraîne que $v(M) \not\subseteq \mathfrak{p}$, donc que $R_{\mathfrak{p}} = v(M)_{\mathfrak{p}}$; par suite, on a $\xi R_{\mathfrak{p}} = \xi v(M)_{\mathfrak{p}} = w(M)_{\mathfrak{p}} \subset R_{\mathfrak{p}}$; d'où le résultat.

La suite exacte qui définit M montre aussi que ce module est reflexif ; c'est donc un $\mathcal{O}_X$-module inversible.

Montrons que $\mathrm{Im}(u)$ est un module inversible. Comme X est intègre, et que u n'est pas injectif, on a $\Lambda^2 u = 0$ ([Bour], A III 8.2, Prop. 3) ; par suite, la multiplication $\mu : N^{\otimes 2} \to \mathcal{O}_X$ est nulle (4.1.4), et on a $u \circ (1_N \otimes u) = 0$; on en tire que l'application $1_N \otimes u : N^{\otimes 2} \otimes E \longrightarrow N \otimes E$ se factorise en

$$N^{\otimes 2} \otimes E \longrightarrow N \otimes \mathrm{Im}(u) \ \subset\ M \subset N \otimes E.$$

Posons $M' = \mathrm{Im}(u)$. Comme l'application $1_N \otimes u$ est non nulle en les points de codimension ≤ 2 (tout comme φ), il en est de même de l'inclusion $N \otimes M' \subset M$; mais M étant localement isomorphe à $\mathcal{O}_X$, Nakayama nous enseigne que la non nullité de $N \otimes M' \otimes \kappa(x) \to M \otimes \kappa(x)$ équivaut à la surjectivité de $N \otimes M'_x \to M_x$; par suite le support du quotient $Q = M/(N \otimes M')$ est de codimension ≥ 3 ; mais, par ailleurs, si le module Q n'est pas nul, sa dimension projective est ≤ 2 puisqu'on a la suite exacte

$$0 \to N \otimes M \longrightarrow N^{\otimes 2} \otimes E \xrightarrow{1 \otimes u} M \to Q \to 0.$$

Ceci est impossible sur un schéma régulier (Théorème de Auslander-Buchsbaum, [Bour], AC, X p.45) ; donc $N \otimes M' = M$, et par suite M' est un module inversible ; mais alors $N \otimes E$ apparaît comme une extension de M' par M, qui sont des faisceaux inversibles :

$$0 \to M \to N \otimes E \xrightarrow{u} M' \to 0$$

Une telle extension correspond à un élément de $\mathrm{Ext}^1(M', M) = \mathrm{H}^1(\mathbf{P}_n, N)$, et ce groupe est nul dès que $n \geq 2$. Cette extension est donc scindée, ce qui montre que si u n'est pas injective, alors E est décomposable.

Les hypothèses impliquent donc que l'application $u : N \otimes E \longrightarrow E$ est injective ; mais alors $\wedge^2 u$ est elle aussi injective, ainsi que $\mu : N^{\otimes 2} = \mathcal{O}_X(2(c_1 - r)) \to \mathcal{O}_X$; donc $r \geq c_1$.

Il reste à écarter le cas où $r = c_1$. Soit $Z \subset X$ le schéma des zéros de φ. Notons $f : Y \longrightarrow X$ le revêtement double associé à N et μ. D'après **4.3**, il existe un faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur Y tel que $f_\star(\mathcal{E}) = E$, et d'après **4.4**, ce faisceau est inversible sur l'ouvert $f^{-1}(X - Z)$.
Si $r = c_1$, la multiplication μ est un isomorphisme, donc le revêtement $f : Y \to X$ est étale fini ; comme $X = \mathbf{P}_n$ est simplement connexe ([SGA] 1, p.219), on a $Y = X \sqcup X$, et le faisceau $\mathcal{E}$ sur Y est décomposé en $\mathcal{E}' \oplus \mathcal{E}''$; comme $\mathcal{E}$ est inversible sur l'ouvert $f^{-1}(X - Z)$, chacun des composants $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ est non nul ; mais cela implique que E est décomposé.

Montrons *ii*).
Notons encore $f : Y \longrightarrow X$ le revêtement associé à φ, et $\mathcal{E}$ le faisceau sur Y tel que $f_\star(\mathcal{E}) = E$. Si φ est surjective, alors le faisceau $\mathcal{E}$ sur Y est inversible (**4.4**). Comme $n \geq 3$, la proposition **8.1** montre que l'homomorphisme $\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y)$ est un isomorphisme ; on a donc $\mathcal{E} = f^\star(L)$ pour un inversible L sur X ; mais alors le module $E = f_\star f^\star(L) = L \oplus (L \otimes N)$ est décomposé.

Bibliographie

[Anan], S. ANANTHARAMAN, *Schémas en groupes* ... Bull. Soc. Math. France, Mémoire 33, (1976)
[Bour] A, N. BOURBAKI, Algèbre
[Bour] AC, N. BOURBAKI, Algèbre commutative
[Fer 1], D. FERRAND, *Un foncteur norme* Bull. Soc.math. France, **126**, (1998) p.1-49
[Fer 2], D. FERRAND, *Conducteur, descente et pincement*, Bull.Soc.math.France, **131**, (2003), p.553-585
[EGA], A. GROTHENDIECK, rédigés avec la collaboration de J. DIEUDONNÉ , Éléments de Géométrie algébrique, Springer-Verlag (1971), et Publ.Math.IHES, Paris (1960-1967)
[SGA] 1, A. GROTHENDIECK, Revêtements étales et groupe fondamental, *Séminaire du Bois-Marie 1961*, Documents Mathématiques 3, Soc.math. de France (2003)
[SGA] 2, A. GROTHENDIECK, Cohomologie locale des faisceaux cohérents ..., *Séminaire du Bois-Marie 1962*, Documents Mathématiques 4, Soc.Math. de France (2005)

[Hart], R. HARTSHORNE, Algebraic Geometry, Springer-Verlag (1977)
[Knes], M. KNESER, *Composition of Binary Quadratic Forms*, J. of Number Thory, **15**, (1982), p.406-413
[Laz], R. LAZARSFELD, *A Barth-Type Theorem for Branched Coverings of Projective Space*, Math. Ann. **249**, (1980) p.153-162
[Mumf], D. MUMFORD, *Lectures on Curves on an Algebraic Surface*, Ann. of Math. Studies, Number 59, (1966), Princeton Univ. Press
[Roby], N. ROBY, *Lois polynômes et lois formelles en théorie de modules*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., t.80, (1963), p.213-348.
[Schwar], R. L. E. SCHWARZENBERGER, *Vector Bundles on the Projective Plane*, Proc. London Math.Soc. **11**, (1961), p.623-40.