Bitorseurs et liens

Mai 2012

Les remarques qui suivent traduisent le concept de *lien* dû à GIRAUD ([**Gi**] IV 1.1 p.185) dans le langage des bitorseurs. Plus précisemment, soit T un topos ; on note $\mathsf{Gr}_{\mathrm{Mrt}}(\mathsf{T})$ la catégorie scindée sur T dont les objets au dessus de $S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ sont les groupes de T/S, un morphisme du groupe A vers le groupe B étant une classe d'isomorphisme de (A, B)-bitorseurs (L'indice "Mrt" renvoie évidemment à Morita).

Nous montrons que le champ associé à cette catégorie est isomorphe au champ des liens de T.

Curieusement, cet énoncé ne semble pas figurer tel quel dans le livre de GIRAUD, bien qu'il clarifie, à mon sens, plusieurs résultats explicitement établis dans ce livre. En particulier, dans ce langage des bitorseurs, le passage d'une gerbe - ou en tout cas d'un groupoïde transitif - à son lien consiste simplement à oublier la contrainte d'associativité (de la composition des flèches du groupoïde).

Dans la suite, T désignera un topos, d'objet final e.

1. Un isomorphisme de champs

Le point clé est énoncé dans le lemme suivant.

Soient A et B deux groupes de T, et S un objet de T. On désigne par $\mathrm{Bit}(A, B)(S)$ l'ensemble des *classes d'isomorphisme* de (A, B)-bitorseurs au dessus de S (c'est-à-dire l'ensemble des classes de (A_S, B_S)-bitorseurs de T/S), et on note $\mathsf{Bit}(A, B)$ [1] le faisceau associé au préfaisceau $S \longmapsto \mathrm{Bit}(A, B)(S)$.

Pour un isomorphisme de groupes $u : A \xrightarrow{\sim} B$, on désigne par ${}_uB$ le (A, B)-bitorseur de B-torseur à droite B lui-même, l'opération de $a \in A$ étant donnée par le produit à gauche par $u(a)$.

Lemme 1.1 *L'application*

$$B(S) \setminus \mathrm{Isom}(A, B)(S) \longrightarrow \mathrm{Bit}(A, B)(S), \qquad u \longmapsto {}_uB \tag{1.1.1}$$

est injective et induit un isomorphisme de faisceaux

$$\mathsf{Isex}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Bit}(A, B) \tag{1.1.2}$$

Le membre de gauche, $\mathsf{Isex}(A, B)$, désigne, comme dans le livre de GIRAUD (p.185) le faisceau des isomorphismes *extérieurs*, c'est-à-dire le faisceau associé au préfaiceau quotient $S \longmapsto B(S) \setminus \mathrm{Isom}(A, B)(S)$, où B opère à gauche par automorphismes intérieurs.

Notons d'abord que l'application (1.1.1) est bien définie : soient $u : A \to B$ un isomorphisme, et $v = \mathrm{Int}(c) \circ u$, où $c \in B$; on définit un isomorphisme de B-torseurs à droite $f : {}_uB \to {}_vB$ en posant $f(x) = cx$; c'est aussi un isomorphisme de A-torseurs à gauche puisque $f(u(a)x) = cu(a)x = v(a)cx = v(a)f(x)$. L'injectivité se vérifie localement : soient donc u et v deux isomorphismes de A sur B, et soit $f : {}_uB \longrightarrow {}_vB$ un isomorphisme de (A, B)-bitorseurs. Comme f est un isomorphisme de B-objets à droite, on a : $f(b) = f(1_B.b) = f(1_B)b$; posons $c = f(1_B)$. Pour $a \in A$, on a donc $f(u(a)) = cu(a)$. La compatibilité de f avec les opérations à gauche de A donne $f(u(a)) = f(u(a).1_B) = v(a)c$; finalement, $v(a) = cu(a)c^{-1}$. Cela montre que l'application (1.1.1) est injective.

Linjectivité se conserve en passant aux faisceaux associés. Montrons finalement que l'application (1.1.2) est surjective : soit P un (A, B)-bitorseur au-dessus de S ; il existe un morphisme couvrant $T \longrightarrow S$ tel que le B-torseur (à droite) P possède une section $p \in P(T)$; au dessus de T on dispose donc d'un isomorphisme $B \longrightarrow P,\ b \mapsto pb$. Pour tout $a \in A(T)$, il existe donc un unique élément de $B(T)$, notons-le $u(a)$, tel que

$$ap = pu(a). \tag{1.1.3}$$

1. Suivant la convention de [**Gi**] nous utilisons les caractères *sanserif* (i.e bâtons, ou sans empattement) pour désigner les *faisceaux* associés.

On constate que $a \mapsto u(a)$ définit un isomorphisme de groupes au dessus de T, $u : A \longrightarrow B$ et que l'isomorphisme de B-torseurs $B \longrightarrow P$ évoqué plus haut s'étend en un isomorphisme de (A, B)-bitorseurs au dessus de T, ${}_uB \quad \widetilde{\longrightarrow} \quad P$. $\square$

On peut voir les choses de façon plus intrinsèque : la relation (1.1.3) associe à toute section de P un isomorphisme ; elle définit donc une application

$$P \quad \longrightarrow \quad \mathsf{Isom}(A, B)$$

Cette application est équivariante pour l'action de B à droite, puisque changer p en pc change u en $\mathsf{Int}(c^{-1}) \circ u$; en passant aux quotients on trouve l'application

$$e \;\simeq\; P/B \;\longrightarrow\; \mathsf{Isom}(A, B)/B$$

c'est-à-dire une section de $\mathsf{Isex}(A, B)$. $\square$

Contrairement à Giraud, mais en suivant Deligne - Milne [De-Mi] p.220, nous nous restreignons aux morphismes de liens qui sont des isomorphismes, et nous notons $\mathrm{LI}^{\mathrm{is}}(\mathsf{T})$ la catégorie sur T dont les objets au dessus de S sont les groupes de T/S, et dont les morphismes de A vers B sont les sections du faisceau $\mathsf{Isex}(A, B)$.

Proposition 1.2 *Le champ associé à* $\mathsf{Gr}_{\mathrm{Mrt}}(\mathsf{T})$ *est isomorphe au champ des liens* $\mathrm{LIEN}^{\mathrm{is}}(\mathsf{T})$

Il faut d'abord préciser la composition des flèches dans la catégorie $\mathsf{Gr}_{\mathrm{Mrt}}(\mathsf{T})$. Pour un (A, B)-bitorseur P, on notera $[P]$ sa classe d'isomorphisme, laquelle représente donc une flèche $[P] : A \longrightarrow B$. Pour un (B, C)-bitorseur Q, la flèche composée

$$A \xrightarrow{[P]} B \xrightarrow{[Q]} C$$

est donnée par la formule [2]

$$[Q] \circ [P] \quad = \quad [P \wedge^B Q]$$

Par ailleurs, étant donnés deux isomorphismes $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$, l'application ${}_uB \times {}_vC \to {}_{vu}C, \quad (x, y) \mapsto v(x)y$, induit un isomorphisme de (A, C)-bitorseurs

$${}_uB \wedge^B {}_vC \;\longrightarrow\; {}_{vu}C.$$

Notons par G le *préchamp* associé à $\mathsf{Gr}_{\mathrm{Mrt}}(\mathsf{T})$ (objets sur S, les faisceaux de groupes de T/S ; flèches de A vers B les sections du faisceau $\mathsf{Bit}(A, B)$). Considérons, comme dans le lemme **1.1**, le foncteur

$$\mathrm{LI}^{\mathrm{is}}(\mathsf{T}) \quad \longrightarrow \quad \mathsf{G}$$

qui est l'identité sur les objets, et qui envoie la classe d'un isomorphisme $u : A \to B$ sur $[{}_uB]$; c'est un foncteur *covariant* d'après la remarque qui précède, et un isomorphisme de préchamps d'après le lemme (**1.1**). Passant aux champs associés, on trouve l'isomorphisme annoncé.

2. Le lien d'une gerbe

2.1 Le lien d'un groupoïde transitif.

On constate dans ce paragraphe qu'un groupoïde transitif "est" une donnée de descente sur son stabilisateur, dans le préchamp des groupes et bitorseurs entre iceux ; il définit donc un objet dans le champ associé ; c'est son lien. C'est à peu près évident une fois les définitions rappelées ; nous adoptons celles de Deligne ([**D 2**], 10.2 à 10.9 ; voir aussi [**D 1**], 3.1-3.4). On trouvera un exposé plus détaillé sur les groupoïdes transitifs et leur relations avec les gerbes dans, par exemple, [**Br**], 2.1 à 2.13 ; [**M**], Appendix A ; [**U 1**] et [**U 2**] ...

Un *groupoïde transitif* sur un objet S de T est un objet P de T muni d'un morphisme couvrant

$$P \;\longrightarrow\; S \times S$$

2. Prendre garde que le bitorseur $P \wedge^B Q$ est noté $P \circ Q$ par Deligne dans [**De 2**] p. 88.

(donnant donc lieu à deux morphismes $b, s : P \to S$), et d'un morphisme (loi de composition)

$$\circ : P \times_{s,S,b} P \longrightarrow P$$

qu'on peut encore écrire

$$\circ : \mathrm{p}_{12}^\star P \ \times \mathrm{p}_{23}^\star P \ \longrightarrow \ \mathrm{p}_{13}^\star P \tag{2.1.1}$$

(où les p_{ij} sont les projections $S \times S \times S \longrightarrow S \times S$). Ces données doivent satisfaire les conditions qui assurent que pour tout objet T, les flèches $b, s, P(T) \to S(T)$ et $\circ$ définissent une catégorie (objets, $S(T)$; flèches, $P(T)$) dont toutes les flèches sont inversibles.

Le stabilisateur G, est défini par le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ S \arrow[r, "\Delta"] & S \times S \end{tikzcd}$$

C'est un groupe de T/S, et P est un $(p_1^\star G, p_2^\star G)$-bitorseur au dessus de $S \times S$ (**D 2**, 10.8). La loi de composition donne lieu à un isomorphisme de $(\mathrm{p}_1^\star G, \mathrm{p}_3^\star G)$-bitorseurs

$$\mathrm{p}_{12}^\star P \wedge^{\mathrm{p}_2^\star G} \mathrm{p}_{23}^\star P \ \ \widetilde{\longrightarrow} \ \ \mathrm{p}_{13}^\star P \tag{2.1.2}$$

L'associativité de la composition des flèches dans le groupoïde se traduit par l'égalité de deux flèches au dessus de $S \times S \times S \times S$; nous omettons cette traduction puisque le bitorseur P muni de l'isomorphisme (2.1.1) peut - et doit - être compris, à lui seul, comme une donnée de descente sur le faisceau en groupes G dans le préchamp G des groupes et bitorseurs entre eux ; il définit donc un objet dans le champ associé. C'est le lien cherché.

2.2 Le lien d'une gerbe

Pour T variable dans le topos T, les catégories $(S(T), P(T), \circ)$ forment une catégorie $\mathcal{P}$ fibrée sur T, qui est un préchamp ; le champ associé $\widetilde{\mathcal{P}}$ est une gerbe ([**D 1**], 3.1). Il faut vérifier que le lien de P défini en **2.1** est isomorphe au lien $\mathsf{lien}(\widetilde{\mathcal{P}})$ défini par Giraud.
Or, pour une gerbe générale $\mathsf{Q} \to \mathsf{T}$, on se ramène à un groupoïde transitif en choisissant une *neutralisation* de la gerbe, comme expliqué en [**D 1**], 3.4 , ou à la page 224 de [**De-Mi**] : on choisit un morphisme couvrant $S \to e$ et un objet x de la catégorie fibre Q_S ; les images réciproques $\mathrm{p}_1^\star(x)$ et $\mathrm{p}_2^\star(x)$ au dessus de $S \times S$ sont localement isomorphes (puisque Q est une gerbe) ; notons $G = \mathsf{Aut}(x)$ le groupe de T/S des automorphismes de x ; un isomorphisme $u : \mathrm{p}_1^\star(x) \longrightarrow \mathrm{p}_2^\star(x)$ induit un isomorphisme de groupes de $\mathsf{T}/S \times S$

$$\mathrm{p}_1^\star(G) \ \longrightarrow \ \mathrm{p}_2^\star(G), \qquad \alpha \longmapsto u\alpha u^{-1}$$

3. Isomorphismes de liens

Un résultat de Giraud ([**G**], IV 1.1.7.3, p.187) appelle peut-être un commentaire. Il s'agit de l'énoncé suivant (où l'on a interverti gauche et droite) :

3.1 *Soient A et B deux faisceaux de groupes. Pour que les liens* $\mathsf{lien}(A)$ *et* $\mathsf{lien}(B)$ *soient isomorphes il faut et il suffit qu'il existe un* $\mathsf{Int}(B)$*-torseur à droite Q tel que A soit isomorphe au groupe B tordu par Q : $Q \wedge^{\mathsf{Int}(B)} B$*

Il faut comprendre pourquoi on n'a pas affaire à un (A, B)-bitorseur mais à un $(\mathsf{Int}(A), \mathsf{Int}(B))$-bitorseur. Voici une explication dans le langage des bitorseurs.

Pour éviter toute ambiguité dans des formules du genre $P \wedge^B B$ il faut préciser laquelle des opérations du groupe B sur lui-même est en cause ; on notera donc ${}^cB$ le groupe B muni de l'opération de B par *conjugaison.*

Pour tout (A, B)-bitorseur P l'opération de A définit un isomorphisme de groupes

$$A \ \overset{\lambda_P}{\longrightarrow} \ \mathsf{Aut}_B(P).$$

Réciproquement, si P est un B-torseur à droite, $P \wedge^B {}^cB$ est un groupe, le *groupe adjoint* de P, ou *le groupe B tordu par P*, et il est alors noté ${}^PB$.
Ce groupe est isomorphe à $\mathsf{Aut}_B(P)$. Rappelons comment identifier un élément $p \wedge b$ du produit contracté à un automorphisme $u \in \mathsf{Aut}_B(P)$: un élément q de P s'écrit de façon unique sous la forme $q = pc$, avec $c \in B$, et $u(q) = pbc$.
P est un $(\mathsf{Aut}_B(P), B)$-bitorseur.

3.2 L'isomorphisme $\alpha : A \longrightarrow Q \wedge^{\mathsf{Int}(B)} B$ de l'énoncé (**3.1**) munit Q d'une structure de $(\mathsf{Int}(A), \mathsf{Int}(B))$-bitorseur.
En effet, le sous-groupe $\alpha(\mathsf{Z}A)$ est le centre du groupe tordu, et est donc isomorphe à

$$Q \wedge^{\mathsf{Int}(B)} \mathsf{Z}(B) \ \simeq\ Q/\mathsf{Int}(B) \times \mathsf{Z}(B) \ \simeq e \times \mathsf{Z}(B).$$

Le premier isomorphisme provient de ce que $\mathsf{Int}(B)$ agit trivialement sur $\mathsf{Z}(B)$, et le second repose sur la définition d'un $\mathsf{Int}(B)$-torseur.
En passant aux quotients par les centres, α induit donc un isomorphisme

$$\mathsf{Int}(A) \xrightarrow{\sim} Q \wedge^{\mathsf{Int}(B)} {}^c\mathsf{Int}(B) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Aut}_{\mathsf{Int}(B)}(Q)$$

Cet isomorphisme détermine la structure de $(\mathsf{Int}(A), \mathsf{Int}(B))$-bitorseur annoncée.

Pour un groupe B de T, on allégera la notation du quotient par son centre : $\overline{B} = B/\mathsf{Z}(B) = \mathsf{Int}(B)$.

Lemme 3.3 *Soit P un B-torseur à droite ; notons $\bar{P} = P/\mathsf{Z}(B) = P \wedge^B \bar{B}$ le $\bar{B}$-torseur à droite obtenu par changement de groupe. Alors $\bar{B}$ opère sur le groupe ${}^cB$, et le morphisme $P \longrightarrow \bar{P}$ induit un isomorphisme de groupes*

$$\mathsf{Aut}_B(P) \ =\ P \wedge^B {}^cB \ \ \xrightarrow{\sim}\ \ \bar{P} \wedge^{\bar{B}} {}^cB$$

Vérification immédiate, ou bien voir ([**G**], p.116). $\square$

3.4 La condition de (**3.1**) est clairement nécessaire puisque si P est un (A, B)-bitorseur, alors $\bar{P}$ est un $\bar{B}$-torseur à droite et le lemme précédent fournit un isomorphisme $\alpha : A \longrightarrow \bar{P} \wedge^{\bar{B}} {}^cB$.

Montrons qu'elle est suffisante. Soit donc Q un $\bar{B}$-torseur à droite, et

$$\alpha : A \ \longrightarrow\ Q \wedge^{\bar{B}} {}^cB$$

un isomorphisme de groupes. Il s'agit de trouver une section globale (i.e au dessus de l'objet final e de T) du faisceau $\mathsf{Bit}(A, B)$ qui induise Q et α, en un sens évident, et que la démonstration précisera.
Considérons d'abord les structures de torseur à droite. Il existe un objet S couvrant e au dessus duquel le $\bar{B}$-torseur Q se relève en un B-torseur P ; puisque deux tels relèvements sont localement isomorphes, il existe un morphisme couvrant $S' \longrightarrow S \times S$ tel que les images réciproques P_0 et P_1 de P sur S' soient isomorphes.
Les structures de A-torseur à gauche proviennent de l'isomorphisme α. Au dessus de S, on a donc un isomorphisme de torseurs à droite $\bar{P} \to Q$, et par suite un isomorphisme

$$\mathsf{Aut}_B(P) = P \wedge^B {}^cB \ \xrightarrow{\mathbf{2.2}}\ \bar{P} \wedge^{\bar{B}} {}^cB \ \simeq\ Q \wedge^{\bar{B}} {}^cB \ \xleftarrow{\alpha}\ A$$

Cet isomorphisme définit la structure de A-torseur à gauche ; il faut remarquer que cette structure ne dépend, via α, que de Q ; comme ce dernier est défini globalement, ses deux images réciproques sur S' sont canoniquement isomorphes ; cela montre que l'isomorphisme de B-torseurs au dessus de S' entre P_0 et P_1 est compatible avec les structures de A-torseurs à gauche ; enfin, la suite

$$S' \ \rightrightarrows\ S \ \longrightarrow\ e$$

est exacte dans T puisque les morphismes $S \to e$ et $S' \to S \times S$ sont convrants. Puisque $\mathsf{Bit}(A, B)$ est un faisceau, on obtient une suite exacte d'ensembles

$$\mathsf{Bit}(A, B)(e) \ \longrightarrow\ \mathsf{Bit}(A, B)(S) \ \rightrightarrows\ \mathsf{Bit}(A, B)(S')$$

La classe de P dans $\mathsf{Bit}(A, B)(S)$ provient donc d'une section globale.$\square$

Bibliographie

[**Br**] L. Breen, Tannakian Categories, *Proc. of Symp. in Pure Math.*, Vol **55** (1994), Part 1.
[**De 1**] P. Deligne Catégories tannakiennes, in *Grothendieck Festschrift* vol. II, Modern Birkhäuser Classics, (1990)
[**De 2**] P. Deligne, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in *Galois Groups over* **Q**, Ihara, Ribet, Serre Eds, Springer-Verlag 1989
[**DE-Mi**] P. Deligne et J. S. Milne, *Tannakian categories*, Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties, LNM 900, Springer-Verlag (1982)
[**Gi**] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, (1971)
[Gr-V] A. Grothendieck, J.-L. Verdier, Topos, *Exposé IV de* [SGA 4].
[La-Mo] G. Laumon et L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Springer-Verlag (2000)
[**Ul 1**] K.-H. Ulbrich, On the correspondence between gerbes and bouquets, *Math.Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **108**, (1990)
[**Ul 2**] K.-H. Ulbrich, On cocycles bitorsors and gerbes over a Grothendieck topos, *Math.Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **110**, (1991)
[SGA 3] M. Demazure, A. Grothendieck, *Schémas en groupes*, I, LNM $n°$151, (1970) ; an edited and TeX...ed version is also available online at `www.math.ens.fr/∼ gille`.
[SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*,I, LNM $n°$269, Springer-Verlag, (1972)