Un adjoint

Daniel Ferrand

Résumé

Soit S un schéma, disons irréductible. On montre l'existence d'un foncteur qui associe à tout morphisme plat et de présentation finie $T \to S$, un S-schéma $\pi^s(T/S)$ étale quasi-compact *et séparé* (en bref, un objet de $\mathsf{Et.sep}_S$), et un S-morphisme $h_T : T \to \pi^s(T/S)$ qui sont « universels » pour les S-morphismes de T vers un objet de $\mathsf{Et.sep}_S$. Ce morphisme h_T est interprété comme le passage au quotient $T \to T/R$ par une relation d'équivalence à graphe ouvert et fermé dans $T \times_S T$; réciproquement, on montre que le faisceau quotient de T par une telle relation est représentable par un S-schéma objet de $\mathsf{Et.sep}_S$. On dégage des conditions sur un S-morphisme $u : T' \to T$ pour qu'il induise un isomorphisme $\pi^s(T'/S) \xrightarrow{\sim} \pi^s(T/S)$. On montre, en particulier, que lorsque S est normal intègre et que T est lisse sur S, alors la formation de $\pi^s(T/S)$ commute à la restriction aux ouverts de S.

Abstract

Let S be a scheme, say irreducible. We prove the existence of a functor which associates with any flat morphism of finite presentation $T \to S$, a S-scheme $\pi^s(T/S)$ étale quasi-compact *and separated* (in short, an object of $\mathsf{Et.sep}_S$), and a S-morphism $h_T : T \to \pi^s(T/S)$ which are « universal » for the S-morphisms from T to an object of $\mathsf{Et.sep}_S$. This morphism h_T is interpreted as the quotient map $T \to T/R$ of T by an equivalence relation whose the graph is open and closed in $T \times_S T$; conversely, the quotient sheaf T/R by such a relation is shown to be representable by a S-scheme in $\mathsf{Et.sep}_S$. We bring conditions out on a S-morphism $u : T' \to T$ so that it induces an isomorphism $\pi^s(T'/S) \xrightarrow{\sim} \pi^s(T/S)$. From that we deduce, in particular, that when S is a normal domain and T is smooth over S, then the formation of $\pi^s(T/S)$ commutes with the restriction to open sets in S.

Introduction

Soit $f : T \to S$ un morphisme plat de présentation finie de schémas. On dit que f admet une *enveloppe étale* s'il existe un S-morphisme surjectif $h : T \to E$ où E est un S-schéma étale, tels que tout S-morphisme $h' : T \to E'$ vers un S-schéma étale se factorise de façon unique par h, (i.e. il existe un unique S-morphisme $u : E \to E'$ tel que $h' = uh$).

Une telle enveloppe existe si S est le spectre d'un corps k, c'est alors le spectre de la fermeture algébrique séparable de k dans $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$. L'enveloppe étale existe aussi lorsque S est noethérien et que f est propre, plat et à fibres géométriquement réduites ; dans ce dernier cas l'enveloppe étale est donnée par la factorisation de Stein.

Mais on montre que le morphisme $f : T = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[i]) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}) = S$ n'admet pas d'enveloppe étale, essentiellement parce qu'il y a « trop » de morphismes surjectifs $T \to E$ où E est un $\mathbf{Z}$-schéma étale ; notons qu'un tel schéma étale, s'il est distinct de $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, est *non séparé*.

Cela conduit à se cantonner aux enveloppes étales *séparées* sur la base, mais O. Gabber m'a indiqué l'exemple d'un morphisme $T \to S$ fini libre qui n'admet pas d'enveloppe étale séparée ; dans cet exemple, S est un schéma affine dont l'espace des composantes connexes est homéomorphe au compactifié d'Alexandroff de l'espace discret $\mathbf{N}$, et S possède une seule composante connexe non ouverte.

Ces exemples justifient les restrictions qui encadrent le premier résultat d'existence du texte, à savoir :

Si S est un schéma dont l'ensemble des composantes irréductibles est fini, alors tout morphisme plat de présentation finie $T \to S$ admet une enveloppe étale séparée.

Cet énoncé est équivalent au suivant. Notons $\mathsf{Pl.pf}_S$ la catégorie des S-schémas plats et de présentation finie, et, comme plus haut, notons $\mathsf{Et.sep}_S$ la catégorie des S-schémas étales séparés de présentation finie.

Si S est un schéma dont l'ensemble des composantes irréductibles est fini, alors l'inclusion de catégories $\iota_S : \mathsf{Et.sep}_S \to \mathsf{Pl.pf}_S$ admet un adjoint à gauche, c'est-à-dire un foncteur

$$\pi^s : \mathsf{Pl.pf}_S \longrightarrow \mathsf{Et.sep}_S$$

muni d'un isomorphisme de bifoncteurs, pour T dans $\mathsf{Pl.pf}_S$, et E dans $\mathsf{Et.sep}_S$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Et.sep}_S}(\pi^s(T), E) \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathrm{Hom}_{\mathsf{Pl.pf}_S}(T, \iota_S(E)).$$

Le morphisme $h_T : T \to \pi^s(T)$, image du morphisme identique de $\pi^s(T)$, est l'enveloppe étale séparée de $T \to S$. Ce morphisme h_T est, par définition, l'objet initial de la *catégorie des factorisations* de $f : T \to S$, ce terme étant, dans ce texte, réservé aux suites de morphismes $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$, tels que $f = gh$, où g est étale et séparé, et où h est surjectif. Sous l'hypothèse faite sur S, cette catégorie des factorisations, désignée par $\mathsf{E}(T/S)$, est équivalente à un ensemble ordonné *fini* et filtrant à gauche, noté $\overline{\mathsf{E}}(T/S)$; cela rend évidente l'existence de l'élément initial, donc de l'adjoint, mais cela ne donne guère de prise sur ses propriétés.

Pour aller plus loin, on utilise le passage au quotient. En effet, pour une factorisation $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ de $f : T \to S$, au sens restreint donné plus haut, le morphisme h est fidèlement plat de présentation finie, de sorte que la suite

$$T \times_E T \rightrightarrows T \xrightarrow{h} E$$

est exacte dans la catégorie des schémas ; le morphisme $h : T \to E$ apparaît ainsi comme le quotient de T par la relation d'équivalence $R = T \times_E T \rightrightarrows T$; ce schéma R est ouvert et fermé dans $T \times_S T$. Réciproquement, pour une relation d'équivalence R, à graphe ouvert et fermé, on démontre (de trois façons !) que le faisceau fppf quotient T/R est représentable par un schéma étale, quasi-compact et séparé sur S. Cela permet d'identifier l'ensemble $\overline{\mathsf{E}}(T/S)$ à un sous-ensemble ordonné de l'ensemble $\mathsf{Of}(T \times_S T)$ des sous-schémas ouverts et fermés du produit $T \times_S T$, ordonné par l'inclusion.

Il s'avère que la catégorie des factorisations $\mathsf{E}(T/S)$ est plus maniable que son objet initial $\pi^s(T/S)$; elle est définie sans hypothèse sur S, et sa fonctorialité est évidente : un morphisme $u : T' \to T$ dans $\mathsf{Pl.pf}_S$ induit, en effet, un foncteur $\mathsf{E}(u) : \mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S)$, dont voici la définition ; pour une factorisation $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ de f, le morphisme hu est ouvert et s'écrit donc $u'h'$, avec h' surjectif et u' une immersion ouverte

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "u"'] & E' \arrow[r] \arrow[d, "u'"] & S \arrow[d, equal] \\ T \arrow[r, "h"'] & E \arrow[r, "g"'] & S. \end{tikzcd}$$

L'image par $\mathsf{E}(u)$ de la factorisation (g, h) est la factorisation (gu', h'). On montre que le morphisme $\pi^s(u) : \pi^s(T') \to \pi^s(T)$ est un isomorphisme si et seulement si le foncteur $\mathsf{E}(u)$ est une équivalence de catégories et que le morphisme composé $h_T u$ soit surjectif.

Un S-morphisme $u : T' \to T$ induit par image inverse une application

$$(u \times u)^* : \mathsf{Of}(T \times_S T) \to \mathsf{Of}(T' \times_S T').$$

On montre l'utile critère suivant : si u est schématiquement dominant et que l'application ci-dessus $(u\times u)^*$ soit bijective, alors le foncteur $\mathsf{E}(u)$ définit une *équivalence* $\mathsf{E}(T/S) \xrightarrow{\sim} \mathsf{E}(T'/S)$ entre les catégories de factorisations.

On en tire qu'un morphisme schématiquement dominant $u : T' \to T$ dans $\mathsf{Pl.pf}_S$ induit un isomorphisme $\pi^s(u) : \pi^s(T'/S) \xrightarrow{\sim} \pi^s(T/S)$, par exemple, dans les cas suivants :

— u est universellement submersif (par exemple fpqc) et ses fibres sont géométriquement connexes ; en particulier, pour $T' = \mathbf{A}^n_T$, ou $\mathbf{P}^n_T$, etc.

— u est un homéomorphisme universel ;

— l'application $\mathcal{O}_T \to u_\star(\mathcal{O}_{T'})$ est bijective, et $h_T u$ est surjectif ; cette surjectivité est vérifiée si f' est universellement fermé.

De plus, lorsque S est normal intègre et que T est lisse sur S, le critère ci-dessus conduit à des propriétés de prolongement :

Si $u : T' \to T$ est une immersion ouverte dense, alors $\mathsf{E}(u)$ est une équivalence.

Et aussi : pour tout ouvert non vide $U \subset S$, le morphisme canonique

$$\pi^s(U \times_S T/U) \to U \times_S \pi^s(T/S)$$

est un isomorphisme ; en passant à la limite sur les ouverts U, on montre que, en notant ξ le point générique de S, le morphisme canonique

$$\pi^s(T_\xi/\xi) \xrightarrow{\sim} \pi^s(T/S)_\xi$$

est un isomorphisme.

Cela permet d'étendre à une base normale S, les propriétés du foncteur adjoint qui sont vraies sur un corps de base ; en particulier, le foncteur π^s commute aux produits de S-schémas lisses.

Enfin, toujours en supposant que S est normal intègre, on montre que pour un morphisme étale de présentation finie $T \to S$, le morphisme universel $h_T : T \to \pi^s(T/S)$ est un isomorphisme local (local sur T), et qu'il fait de $\pi^s(T/S)$ l'enveloppe séparée de T/S.

Considérons alors *l'espace algébrique* étale $\pi_0(T/S)$ qui représente les composantes connexes des fibres géométriques de $T \to S$ ([LMB, 6.8]) ; le morphisme $T \to \pi_0(T/S)$ est universel pour les S-morphismes

$T \to E$, avec E étale, séparé ou non, sur S ; il existe donc un morphisme canonique d'espaces algébriques $\theta : \pi_0(T/S) \to \pi^s(T/S)$. On montre que si $T \to S$ est lisse de présentation finie, alors θ fait de $\pi^s(T/S)$ l'enveloppe séparée de $\pi_0(T/S)$ (dans la catégorie des S-espaces algébriques) ; mais si $\pi_0(T/S)$ n'est pas un schéma, θ ne peut pas être un isomorphisme local, contrairement au cas schématique évoqué plus haut.

Cet article doit beaucoup à BRUNO KAHN. Il y a quelque temps, il avait construit cet adjoint lorsque la base est de Dedekind et que le morphisme est lisse, et il m'avait demandé si on pouvait étendre sa construction sur une base générale. Il est apparu que le procédé qu'il utilisait est trop dépendant de la dimension 1 pour pouvoir être généralisé, et qu'il fallait donc trouver autre chose.

Je tiens à remercier LAURENT MORET-BAILLY, lecteur émérite, qui suggéra bien des améliorations, et même décela une erreur dans une version antérieure.

Enfin je dois à OFER GABBER un exemple décisif qu'il communiqua juste après mon exposé oral.

Table des matières

1 Préliminaires

1.1 Définitions

Les définitions et les notations adoptées sont celles des E.G.A., et de la nouvelle édition pour EGA I. Voici le rappel de ce qui sera le plus souvent utilisé.

1.1.1. Conformément aux conventions de EGA I, un morphisme $f : Y \to X$ est **de présentation finie** s'il est localement de présentation finie, quasi-compact et quasi-séparé ; ce dernier terme signifie que le morphisme diagonal $\Delta_f : Y \to Y \times_X Y$ est quasi-compact [EGA I, 6.1].

La propriété pour un morphisme d'être *quasi-scompact et quasi-séparé* assure la quasi-cohérence des images directes, et elle est nécessaire dès que des adhérences schématiques interviennent, ce qui est fréquent dans la suite (1.1.6).

1.1.2. Parmi les définitions possibles de **morphisme étale**, nous utiliserons surtout celle-ci : un morphisme de schémas $X \to S$ est *étale* (resp. *étale et séparé*) s'il est plat, localement de présentation finie et si le morphisme diagonal $X \to X \times_S X$ est une immersion ouverte (resp. une immersion ouverte et fermée). L'équivalence entre cette définition et les autres est exposée dans [EGA IV$_4$, 17.4.2 et 17.6.2].

Un morphisme étale et séparé est de présentation finie si et seulement si il est quasi-compact.

1.1.3. (*Exemple de morphisme étale non séparé : dédoubler un point.*) Soient $f : T \to S$ un morphisme, et $s \in S$ un point fermé tel que la fibre $T_s = f^{-1}(s)$ ne soit pas connexe ; elle est donc la réunion disjointe d'au moins deux sous-schémas non vides : $T_s = D_1 \sqcup D_2$; ils sont fermés dans T_s, donc fermés aussi dans T. Les ouverts complémentaires $V_i = T - D_i$ ont les propriétés suivantes :

— $V_1 \cup V_2 = T$ et $V_1 \cap V_2 = T - T_s$.

— Les morphismes $V_i \to S$ induits par f sont surjectifs, et on a $f(V_1 \cap V_2) = S - s$.

Introduisons le schéma F obtenu par recollement de deux copies de S le long de $S - s$ (parfois nommé : *le schéma S avec le point s dédoublé*).

Le morphisme f se factorise en $T \to F \to S$, et le morphisme $F \to S$ est étale ; il est séparé si et seulement si s est ouvert dans S. Noter que si f est entier surjectif, et si s n'est pas ouvert dans S, alors le morphisme $F \to S$ est étale surjectif universellement fermé, et il n'est pas entier puisqu'il n'est pas séparé.

.

1.1.4 Lemme (Changement de base et image directe [EGA I, 9.3.3]). *Soient $f : Y \to X$ et $g : X' \to X$ des morphismes ; on note $f' : Y' = X' \times_X Y \to X'$ le morphisme obtenu par changement de base.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "f"'] & Y' = Y \times_X X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \\ X & X' \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

On suppose que f est quasi-compact et quasi-séparé, et que g est plat. Alors, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$w : g^\star(f_\star(\mathcal{O}_Y)) \to f'_\star(g'^\star(\mathcal{O}_Y)) = f'_\star(\mathcal{O}_{Y'}).$$

1.1.5. Un morphisme $f : Y \to X$ est dit **dominant** si $f(Y)$ est dense dans X [EGA I, 0_I, 2.1.12] ; on dit que f est **schématiquement dominant** si l'homomorphisme $\mathcal{O}_X \to f_\star(\mathcal{O}_Y)$ est injectif [EGA I, 5.4.1] ; si X est réduit et f dominant, alors f est schématiquement dominant [EGA I, 5.4.3] ; si f est quasi-compact, quasi-séparé et schématiquement dominant, alors, d'après 1.1.4, cette dernière propriété est stable par changement de base plat.

1.1.6. Soit $f : Y \to X$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé, de sorte que $f_\star(\mathcal{O}_Y)$ est une $\mathcal{O}_X$-algèbre quasi-cohérente. **L'image schématique** de f est le sous-schéma fermé $j : X' \to X$ de X défini par l'idéal

$$\mathcal{J} = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_X \to f_\star(\mathcal{O}_Y))$$

L'espace sous-jacent à X' est égal à l'adhérence $\overline{f(Y)}$, et f se factorise en

$$Y \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{j} X$$

où g est schématiquement dominant [EGA I, 6.10.5]. Cette construction commute à tout changement de base plat (1.1.5).

1.1.7. Lorsque le morphisme $f : Y \to X$ est un sous-schéma quasi-compact, on parle **d'adhérence schématique** [EGA I, 6.10.6]. Dans ce cas, le morphisme $Y \to X'$ du sous-schéma Y dans son adhérence schématique est une immersion ouverte schématiquement dominante [EGA I, 5.4.4]. Ici encore, cette construction commute à tout changement de base plat (1.1.5).

1.1.8. Un morphisme plat et localement de présentation finie est universellement ouvert [EGA I, 7.3.10] ou bien [EGA IV_2, 2.4.6].

1.2 Adjonction et morphisme universel

Soit C une sous-catégorie pleine d'une catégorie D. Un adjoint à gauche de cette inclusion de catégories est un foncteur $F : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ muni d'un isomorphisme de bifoncteurs, pour X dans C et Y dans D,

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(F(Y), X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(Y, X).$$

Autrement dit, ce foncteur associe, à tout objet Y dans D un objet $F(Y)$ dans C et un morphisme

$$h_Y : Y \to F(Y)$$

vérifiant la propriété suivante : pour tout $X \in \mathsf{C}$ et tout morphisme $v : Y \to X$ dans D, il existe un unique morphisme $u : F(Y) \to X$ tel que $v = u \circ h_Y$. Par abus de langage, on écrira souvent que h est **universel pour les objets de** C. On emploiera aussi l'expression : le morphisme $h_Y : Y \to F(Y)$ fait de $F(Y)$ **l'enveloppe de** Y **dans** C.

Rappelons trois propriétés importantes de l'adjoint :

— Il est défini point par point : $F(Y)$ coreprésente le foncteur covariant $\mathsf{C} \ni X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(Y, X)$. Ainsi, l'expression « F est défini en Y » a un sens.

— Pour tout $Y \in \mathsf{C}$, F est défini en Y et h_Y est un isomorphisme : cela résulte de la pleine fidélité de l'inclusion $i : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$.

— Il commute aux limites inductives (représentables) quelconques, en particulier aux coproduits.

1.3 Trois lemmes

1.3.1 Lemme. *Soit* C *une catégorie admettant des produits fibrés (par exemple la catégorie des schémas), et soit* $\mathbf{P}$ *une propriété des morphismes de* C*, stable par composition et par changement de base. Soit*

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$$

une suite de morphismes. On suppose que le composé $\beta\alpha$ *vérifie* $\mathbf{P}$*, ainsi que le morphisme diagonal* $\Delta_\beta : Y \to Y \times_Z Y$*. Alors* α *vérifie* $\mathbf{P}$*.*

Démonstration. Factorisons α en

$$X \xrightarrow{\gamma} X \times_Z Y \xrightarrow{p} Y$$

où γ est le graphe de α et où p est la seconde projection. Alors γ se déduit de Δ_β par le changement de base $X \times_Z Y \xrightarrow{\alpha \times_Z 1_Y} Y \times_Z Y$, et p se déduit de $\beta\alpha$ par le changement de base par β .

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "\beta\alpha"'] & Z \\
X \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"] & X \times_Z Y \arrow[r, "p"] \arrow[u] \arrow[d, "\alpha \times_Z 1_Y"] & Y \arrow[u, "\beta"'] \\
Y \arrow[r, "\Delta_\beta"] & Y \times_Z Y &
\end{tikzcd}$$

D'où la conclusion. $\square$

1.3.2 Lemme (Prolongement d'isomorphismes)**.** *Soit $u : X \to Y$ un morphisme fidèlement plat, quasi-compact et* séparé*. Soit $i : Y' \to Y$ un morphisme quasi-compact, quasi-séparé et schématiquement dominant ; notons $u' : X' = Y' \times_Y X \to Y'$ le morphisme déduit de u par changement de base. Si u' est un isomorphisme, alors u est un isomorphisme.*

L'hypothèse sur le morphisme $i : Y' \to Y$ est vérifiée en particulier par une immersion ouverte quasi-compacte qui est, de plus, schématiquement dominante, ou bien si Y est réduit, que ses points maximaux ξ_λ soient en nombre fini, et, enfin, que i soit le morphisme $\coprod \mathrm{Spec}(\kappa(\xi_\lambda)) \to Y$.

Cet énoncé étend légèrement le cas affine bien connu, qui s'énonce ainsi : soit $A \to B$ un homomorphisme fidèlement plat d'anneaux intègres. Si B est contenu dans le corps des fractions de A, alors $A = B$. (voir [AC, I, §3.5, Prop. 9, *b*)])

Démonstration. Par "descente fpqc " le long de u [EGA IV$_2$, 2.7.1], il suffit de montrer que l'une des projections $X \times_Y X \to X$ est un isomorphisme ; or, ces morphismes admettent une section, à savoir le morphisme diagonal $\Delta_u : X \to X \times_Y X$; il s'agit donc de montrer que Δ_u est un isomorphisme. Puisque u est supposé séparé, son morphisme diagonal Δ_u est une immersion fermée ; il suffit donc de vérifier que Δ_u est schématiquement dominant. Comme le morphisme $i : Y' \to Y$ est quasi-compact, quasi-séparé et schématiquement dominant et que u est plat, les morphismes verticaux du diagramme suivant sont, eux aussi, schématiquement dominants (1.1.5).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Delta_u"] & X \times_Y X & \\
X' \arrow[u] \arrow[r, "\Delta_{u'}"'] & X' \times_{Y'} X' \arrow[u] \arrow[r, equal] & Y' \times_Y (X \times_Y X)
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse, $\Delta_{u'}$ est un isomorphisme ; la commutativité du diagramme implique donc que Δ_u est schématiquement dominant. $\square$

1.3.3 Lemme. *Soient $f : T \longrightarrow S$ un morphisme plat de présentation finie et $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ une factorisation de f, où g est étale de présentation finie (éventuellement non séparé), et où h est surjectif. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Les fibres du morphisme h sont géométriquement connexes.*

(ii) *Le morphisme h est universel (1.2) pour les S-morphismes de T vers un S-schéma étale* (non nécessairement séparé) *et de présentation finie, et il reste universel après tout changement de base $S' \longrightarrow S$.*

(iii) *Pour tout point géométrique $\omega = \mathrm{Spec}(\Omega) \to S$ de S, le ω-morphisme $h_\omega : T \times_S \omega \to E \times_S \omega$ est universel pour les ω-morphismes de $T \times_S \omega$ vers un ω-schéma étale de type fini. Dans les termes de l'énoncé suivant (2.1.1), cela s'écrit $\pi_0(T \times_S \omega/\omega) \simeq E \times_S \omega$.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Les hypothèses sur h étant stables par changement de base, il suffit de montrer que h est universel au-dessus de S. Soit $f = g'h'$ une factorisation avec $g' : E' \longrightarrow S$ étale de présentation finie. Il s'agit de montrer qu'il existe un morphisme $v : E \to E'$ tel que $h' = vh$ et $g = g'v$. Dégageons, pour cela, une construction qui resservira.

1.3.4 Construction. Soit

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h'"'] & E \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed] \\ E' \arrow[r, "g'"'] & S \end{tikzcd}$$

un carré commutatif de morphismes de schémas, où h est universellement ouvert et où g' est étale. On cherche à construire un morphisme $E \to E'$ rendant les deux triangles commutatifs.

Notons $h'' : T \to E' \times_S E$ le morphisme déduit de h' et de h, de sorte que le composé $T \xrightarrow{h''} E' \times_S E \xrightarrow{g' \times_S 1_E} E$ est égal à h. Comme h est universellement ouvert, ainsi que le morphisme diagonal $\Delta_{g'}$, le lemme 1.3.1 montre que h'' est lui aussi universellement ouvert ; son image $U = h''(T) \subset E' \times_S E$ est donc un ouvert ; on garde la lettre h'' pour désigner le morphisme surjectif $T \to U$ déduit de h'' ; ce schéma U s'insère dans le diagramme commutatif ci-dessous, où u' est le morphisme composé $U \subset E' \times_S E \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} E'$.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, "h''"] \arrow[drr, "h"] \arrow[ddr, "h'"'] & & \\ & U \arrow[r, "u"'] \arrow[d, "u'"] & E \arrow[d, "g"] \\ & E' \arrow[r, "g'"'] & S. \end{tikzcd}$$

Si on a pu vérifier que u est un isomorphisme, alors le morphisme cherché sera le composé $u' \circ u^{-1} : E \to U \to E'$.

Revenons à la démonstration du lemme.

Comme le morphisme g' est supposé étale, le morphisme u est étale, et il est surjectif puisque $h = uh''$ l'est ; il suffit donc, pour pouvoir conclure, de montrer que pour tout point x[1] de E, le morphisme

1. Ici, et dans la suite, la lettre « x »désignera souvent à elle seule le schéma $\mathrm{Spec}(\kappa(x))$; le symbole $u^{-1}(x)$ désigne alors la fibre schématique

$$u^{-1}(x) := U \times_E \mathrm{Spec}(\kappa(x)).$$

$u^{-1}(x) \to x$ est un isomorphisme [EGA IV$_4$, 17.9.1]. Or le morphisme composé

$$h^{-1}(x) = h''^{-1}u^{-1}(x) \longrightarrow u^{-1}(x) \longrightarrow x$$

est géométriquement connexe, et h'' est surjectif ; donc le morphisme $u^{-1}(x) \to x$ est géométriquement connexe ; comme il est étale, c'est un isomorphisme.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) est trivial.

(iii)$\Rightarrow$ (i) : On suppose maintenant que dans la factorisation $f = gh : T \to E \to S$ le morphisme h est universel pour les S schémas étales, et le reste par changement de base aux points géométriques de S. Il s'agit de montrer que les fibres de h sont géométriquement connexes, c'est-à-dire ([EGA IV$_2$, 4.5.2]), que pour tout point géométrique $\omega = \mathrm{Spec}(\Omega) \to E$ (Ω un corps algébriquement clos), la fibre T_ω est connexe. Considérons le changement de base par le morphisme composé $\omega \to E \to S$, noté ε.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "h"] & E \arrow[r, "g"] & S \\
T \times_S \omega \arrow[u] \arrow[r, "h_\varepsilon"'] & E \times_S \omega \arrow[u] \arrow[r, "g_\varepsilon"'] & \omega \arrow[u, "\varepsilon"']
\end{tikzcd}$$

Le corps Ω étant algébriquement clos, le morphisme étale g_ε se décompose en $E \times_S \omega = \bigsqcup_i \omega_i \to \omega$, où $\omega_i \to \omega$ est un isomorphisme ; on en déduit une décomposition de $h_\varepsilon : T \times_S \omega \to E \times_S \omega$ en la somme de morphismes $h_i : T_i := h_\varepsilon^{-1}(\omega_i) \to \omega_i$, et chacun des $h_i : T_i \to \omega_i$ hérite de la propriété universelle de h_ε, propriété qui signifie ici que la source est connexe puisque le corps ω_i est algébriquement clos. $\square$

2 Cas connus

2.1 Sur un corps

2.1.1 Proposition. *Soient $S = \mathrm{Spec}(k)$ le spectre d'un corps et $f : T \longrightarrow S$ un morphisme localement de type fini. Alors,*

(i) *Il existe un S-schéma étale, noté $\pi_0(T/S)$, et une factorisation de f en*

$$T \xrightarrow{h} \pi_0(T/S) \longrightarrow S,$$

où le morphisme h est universel pour les S-morphismes de T vers un S-schéma étale.

Lorsque $T = \mathrm{Spec}(A)$ est affine et de type fini, $\pi_0(T/S)$ est le spectre de la clôture algébrique séparable de k dans A ; c'est une k-algèbre étale finie.

(ii) *Si $S' \to S$ désigne le morphisme de schémas associé à une extension du corps de base, le morphisme canonique*

$$\pi_0(S' \times_S T/S') \longrightarrow S' \times_S \pi_0(T/S).$$

est un isomorphisme.

(iii) *Les fibres de h sont géométriquement connexes.*

(iv) *Si $T' \to S$ est un second S-schéma localement de type fini, le morphisme canonique*

$$\pi_0(T \times_S T'/S) \longrightarrow \pi_0(T/S) \times_S \pi_0(T'/S).$$

est un isomorphisme.

Toutes les propriétés énoncées sont démontrées dans le traité de DEMAZURE et GABRIEL ; voir [DG, I, §4, n^o 6, p.122-126].

Notons que, pour le lemme précédent (1.3.3), il a été démontré que la propriété (i) (universalité de h) implique (iii).

Un schéma étale sur le spectre d'un corps est discret donc séparé ; sur une base générale la séparation des S-schémas étales considérés sera requise.

2.1.2 Remarque. Soient k un corps et $k \to A$ une algèbre de type fini intègre et normale, de corps des fractions K. Les éléments de K qui sont algébriques et séparables sur k, sont en particuliers entiers sur k ; ils sont donc dans A puisque A est intégralement fermé dans K ; passant aux spectres, et en notant $\eta = \mathrm{Spec}(K)$, cela s'écrit, pour tout ouvert non vide U de $T = \mathrm{Spec}(A)$, $\pi_0(\eta/S) \xrightarrow{\sim} \pi_0(U/S) \xrightarrow{\sim} \pi_0(T/S)$. Cela sera généralisé en 6.1.3.

La normalité est essentielle pour les résultats de ce genre ; il est bon de garder présent à l'esprit le schéma T formé de deux droites sécantes et l'ouvert $U \subset T$ complémentaire du point d'intersection, c'est-à-dire $U = \mathrm{Spec}(k[X]_X \times k[Y]_Y) \subset \mathrm{Spec}(k[X,Y]/(XY)) = T$; le morphisme $\pi_0(U/S) \to \pi_0(T/S)$ n'est pas injectif puisque c'est le morphisme $\mathrm{Spec}(k \times k) \to \mathrm{Spec}(k)$ associé à la diagonale $k \to k \times k$.

2.2 Sur une base normale de dimension 1

2.2.1 Proposition (BRUNO KAHN). *Soit S un schéma de Dedekind (noethérien, normal de dimension de Krull 1). Un morphisme lisse de présentation finie $f : T \longrightarrow S$ se factorise en*

$$T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S,$$

où g est étale séparé*, et où h est surjectif et universel pour les S-morphismes vers un schéma étale et* séparé *sur S.*

La démonstration utilise la normalité de T, conséquence de la lissité de f ; mais on montrera en (3.3.1), que la conclusion reste vraie sous des hypothèses sur S et sur f beaucoup plus générales.

Démonstration. On peut supposer que S est connexe, donc intègre ; soit η son point générique. Soit $T_\eta \longrightarrow F_0 \longrightarrow \eta$ la factorisation fournie par la proposition 2.1.1, de sorte que $F_0 = \pi_0(T_\eta/\eta)$ est un schéma somme d'une famille finie de spectres de corps extensions finies séparables de $\kappa(\eta)$. Soit F la fermeture intégrale de S dans F_0 ; c'est un schéma de Dedekind fini sur S. Puisque S est intégralement fermé dans η, la lissité de f assure que T est intégralement fermé dans T_η ; le morphisme générique $T_\eta \longrightarrow F_0$ se prolonge donc en un morphisme $T \longrightarrow F$ qui est plat puisque F est de Dedekind ; ce morphisme est aussi de type fini puisque T est de type fini sur S [EGA I, ch. I, 6.3.6] ; son image est donc un ouvert $E \subset F$ [EGA IV$_2$, 2.4.6], et f se factorise en

$$T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$$

où h est fidèlement plat et g séparé et quasi-fini sur S (comme ouvert d'un fini plat). D'après [EGA IV$_4$, prop. 17.7.7], g est lisse, donc étale.

Vérifions la propriété universelle. Considérons une factorisation $f = g'h'$ où le morphisme g' est supposé étale *et séparé* et reprenons la construction 1.3.4, qui aboutit au diagramme

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "h''"] \arrow[drr, "h"] \arrow[ddr, "h'"'] & & \\
& U \arrow[r, "u"'] \arrow[d, "u'"] & E \arrow[d, "g"] \\
& E' \arrow[r, "g'"'] & S.
\end{tikzcd}$$

Il faut vérifier que u est un isomorphisme. Le morphisme u est fidèlement plat quasi-compact et séparé ; pour voir que c'est un isomorphisme, il suffit, d'après le lemme 1.3.2, de montrer que le morphisme générique $u_\eta : U_\eta \to E_\eta$ est un isomorphisme ; or, par construction de E, le schéma $E_\eta = F_0$ est isomorphe au schéma $\pi_0(T_\eta/\eta)$ de la proposition 2.1.1 ; la propriété universelle de ce dernier entraîne que u_η est un isomorphisme. □

2.2.2 Remarques. 1) Le début de la démonstration montre un peu plus que l'énoncé, à savoir : toute factorisation « générique » $T_\eta \longrightarrow F_0 \longrightarrow \eta$, avec $T_\eta \longrightarrow F_0$ surjectif et $F_0 \longrightarrow \eta$ étale, se prolonge en une factorisation de $T \to S$. Nous reviendrons sur cette propriété en 6.1.3.

2) Sous les hypothèses de 2.2.1, on ne peut pas espérer que h soit universel pour les morphismes de T vers un étale *non séparé* sur S. L'exemple de la conique qui se spécialise en deux droites disjointes le montre. Plus précisemment, soit $S = \mathrm{Spec}(R)$ le spectre d'un anneau de valuation discrète, d'uniformisante t, et tel que $2 \in R^\times$. Posons $F(X,Y) = X(X-1) + tY^2$. Le morphisme

$$f : T = \mathrm{Spec}(R[X,Y]/(F)) \to S$$

est lisse ; la fibre spéciale ($t = 0$) est la réunion de deux droites disjointes, et la fibre générique $T_\eta \to \eta$ est géométriquement intègre (c'est une courbe de genre 0). Considérons la factorisation de l'énoncé 2.2.1, $f = gh$ avec h surjectif et g étale séparé ; puisque le morphisme composé $T_\eta \xrightarrow{h_\eta} E_\eta \xrightarrow{g_\eta} \eta$ est géométriquement intègre et que h_η est surjectif, le morphisme étale g_η est un isomorphisme, donc le morphisme g lui-même est un isomorphisme (1.3.2) ; autrement dit on a ici $E = S$. Mais il existe des factorisations $f = g'h'$ où g' est étale non séparé puisque la fibre spéciale de f n'est pas connexe 1.1.3.

3 Existence de l'adjoint

3.1 Les catégories de factorisations

3.1.1. Fixons les notations.

$\mathsf{Pl.pf}_S$ désigne la catégorie dont les objets sont les S-schémas plats de présentation finie, et dont les morphismes sont tous les S-morphismes ; par définition, les objets sont aussi quasi-compacts et quasi-séparés sur S [EGA I, 6.3.7], et d'après [EGA I, 6.3.8, (v)], tout S-morphisme entre objets de $\mathsf{Pl.pf}_S$ est automatiquement de présentation finie.

$\mathsf{Et.pf}_S$ désigne la sous catégorie pleine de la précédente dont les objets sont étales de présentation finie, c'est-à-dire étales quasi-compacts et quasi-séparés.

$\mathsf{Et.sep}_S$ désigne la sous-catégorie pleine de la précédente dont les objets sont étales, séparés et de présentation finie, c'est-à-dire étales quasi-compacts et séparés sur S.

On note les inclusions de catégories par

$$j_S : \mathsf{Et.pf}_S \to \mathsf{Pl.pf}_S$$

$$\iota_S : \mathsf{Et.sep}_S \to \mathsf{Pl.pf}_S$$

.

On va montrer que j_S n'admet pas d'adjoint à gauche, et que ι_S n'en admet pas sans une condition sur l'ensemble des composantes irréductibles de S.

Rappelons 1.2 qu'un adjoint à gauche de ι_S est un foncteur

$$\pi^s : \mathsf{Pl.pf}_S \longrightarrow \mathsf{Et.sep}_S$$

muni d'un isomorphisme de bifoncteurs, pour T dans $\mathsf{Pl.pf}_S$, et E dans $\mathsf{Et.sep}_S$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Et.sep}_S}(\pi^s(T), E) \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathrm{Hom}_{\mathsf{Pl.pf}_S}(T, \iota_S(E)).$$

Autrement dit, ce foncteur associe à tout T dans $\mathsf{Pl.pf}_S$ un schéma $\pi^s(T)$ dans $\mathsf{Et.sep}_S$ et un morphisme

$$h_T : T \longrightarrow \pi^s(T),$$

qui sont "universels" pour les morphismes de T vers un S-schéma étale quasi-compact et séparé.On dira souvent que ce morphisme h_T est une **enveloppe étale séparée** pour T/S. L'exposant s rappelle que le foncteur π^s aboutit dans la catégorie des étales *séparés.*

3.1.2 Proposition. *Considérons deux morphismes de schémas $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ tels que g soit étale de présentation finie (pas nécessairement séparé), et que le composé $gh : T \to S$ soit plat de présentation finie. Alors*

— *(i) Le morphisme h est plat de présentation finie, et donc universellement ouvert* (1.1.8) *;*

— *(ii) Si h est surjectif, alors le morphisme h un épimorphisme effectif universel ; cela signifie que le diagramme*

$$T \times_E T \rightrightarrows T \xrightarrow{h} E$$

est exact dans la catégorie des schémas, et le reste après tout changement de base $F \to E$.

— *(iii) Supposons que le morphisme $T \to S$ admette une enveloppe étale séparée $h_T : T \longrightarrow \pi^s(T)$; alors h_T est fidèlement plat de présentation finie.*

Démonstration. (i) Puisque le morphisme g est étale et de présentation finie, il est en particulier quasi-séparé ; son morphisme diagonal Δ_g est donc une immersion ouverte et quasi-compacte, donc un morphisme plat de présentation finie, tout comme $gh : T \to S$; le lemme 1.3.1 entraîne que h est plat de présentation finie, donc universellement ouvert (1.1.8).

(ii) Par définition, un morphisme de présentation finie est quasi-compact (1.1.1) ; si h est surjectif alors, d'après (i), il est en particulier fidèlement plat quasi-compact, et on peut appliquer [SGA 1, VIII, 5.3].

(iii) Il reste à vérifier que h_T est surjective. D'après (i), ce morphisme h_T est ouvert ; son image $E \subset \pi^s(T)$ est donc un ouvert, qui est quasi compact sur S (puisque T l'est), et séparé sur S puisque $\pi^s(T/S)$ l'est ; c'est donc un objet de $\mathsf{Et.sep}_S$; la propriété universelle implique que $E = \pi^s(T)$, donc que h_T est surjectif. $\square$

3.1.3 Définitions. Soit $f : T \to S$ un morphisme plat de présentation finie. La **catégorie des factorisations étales** $\mathsf{F}(T/S)$ est la catégorie dont les objets sont les factorisations de f en

$$T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S,$$

où où h est surjectif et où g est étale quasi-compact et quasi-séparé.

Bien plus importante pour la suite est la **catégorie des factorisations** (sans plus, mais sous-entendu : par un étale séparé) $\mathsf{E}(T/S)$ qui est la sous-catégorie de la précédente où on impose au morphisme étale $g : E \to S$ d'être en plus *séparé*.

Dans l'une ou l'autre de ces catégories une flèche de (g, h) vers (g', h') est un morphisme de schémas $u : E \longrightarrow E'$ tel que $h' = uh$ et $g'u = g$. Comme h est un épimorphisme (3.1.2, (ii)), un tel morphisme u, s'il existe, est unique. De plus, pour deux factorisations $T \xrightarrow{h} E \to S$ et $T \xrightarrow{h'} E' \to S$, il en existe une qui les « coiffe » : son schéma E'' est l'ouvert image du morphisme (ouvert) $T \to E \times_S E'$ déduit de h et h'.

3.1.4. L'ensemble $\overline{\mathsf{E}}(T/S)$ des classes $\overline{(g, h)}$ d'isomorphie d'objets de $\mathsf{E}(T/S)$ est ordonné par la relation suivante : on a $\overline{(g, h)} \leq \overline{(g', h')}$ s'il existe une flèche, dans $\mathsf{E}(T/S)$, de (g, h) vers (g', h') ; d'après ce qui précède, cet ensemble ordonné est filtrant à gauche.

3.1.5 Proposition. *Pour $T \in \mathsf{Pl.pf}_S$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'adjoint à gauche F de l'inclusion $\iota_S : \mathsf{Et.sep}_S \to \mathsf{Pl.pf}_S$ est défini en T.*

(ii) *La catégorie $\mathsf{E}(T/S)$ admet un objet initial.*

(iii) *L'ensemble ordonné $\overline{\mathsf{E}}(T/S)$ admet un plus petit élément.*

La dernière condition est vérifiée lorsque $\overline{\mathsf{E}}(T/S)$ est fini.

En remplaçant l'inclusion $\iota_S : \mathsf{Et.sep}_S \to \mathsf{Pl.pf}_S$ par $j_S : \mathsf{Et.pf}_S \to \mathsf{Pl.pf}_S$, et la catégorie $\mathsf{E}(T/S)$ des factorisations étales séparées par la catégorie $\mathsf{F}(T/S)$ des factorisations étales, on a encore une equivalence.

Démonstration. Il est clair que si l'adjoint F est défini en T, alors $F(T)$ est initial parmi les factorisations de T/S. Réciproquement, supposons que $\mathsf{E}(T/S)$ admette un élément initial $T \xrightarrow{h} E$. Soit $T \xrightarrow{h'} E'$ un morphisme de S-schémas, où E' est étale, séparé et quasi-compact sur S, mais où on ne suppose pas que h' soit surjectif. Il s'agit de voir qu'il existe un unique morphisme $E \to E'$ dans $\mathsf{Et.sep}_S$, compatible à h et h'.

Puisque f et $\Delta_{E'/S}$ sont universellement ouverts, h' l'est aussi (1.3.1). Posons $E'' = h'(T) \subset E'$; c'est un S-schéma étale quasi-compact, qui s'insère dans la factorisation $T \to E'' \to S$, laquelle est un élément de $\mathsf{E}(T/S)$ puisque $T \to E''$ est surjectif. Comme E est l'élément initial, on a un unique morphisme $E \to E''$, d'où, par composition, le morphisme cherché $E \to E'$. $\square$

3.2 Restrictions nécessaires

Les deux exemples qui suivent justifient les hypothèses restrictives que comporte l'énoncé d'existence de l'adjoint, donné ci-dessous (3.3.1).

Par ailleurs, dans le contexte des espaces algébriques, éfleuré en (7.2), il existe un *espace algébrique étale adjoint* sans avoir à faire d'hypothèse sur S ni sur la séparation de cet espace algébrique ; mais cette construction requiert des hypothèses sur les fibres géométriques de f, hypothèses qui ne sont pas satisfaites dans les deux exemples indiqués ci-dessous.

3.2.1 Proposition. *Considérons le morphisme*

$$f : T = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[i]) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}) = S,$$

ainsi que la catégorie $\mathsf{F}(T/S)$ *des factorisations de* f *en*

$$T \xrightarrow{h} F \xrightarrow{g} S,$$

où h *est surjectif et où* g *est étale quasi-compact et quasi-séparé. Alors la catégorie* $\mathsf{F}(T/S)$ *n'a pas d'élément initial ; autrement dit ce morphisme* f *n'admet pas d'enveloppe étale, et donc l'inclusion de catégories* $j_S : \mathsf{Et.pf}_S \to \mathsf{Pl.pf}_S$ *n'admet pas d'adjoint à gauche..*

Démonstration. On procèdera par étapes.

1. Considérons une factorisation $T \xrightarrow{h} F \xrightarrow{g} S$ de $\mathsf{F}(T/S)$.

Puisque le morphisme h est surjectif, F est quasi-compact. D'après 3.1.2, le morphisme h est fidèlement plat de présentation finie. On en déduit que F est un schéma noethérien intègre de dimension 1.

2. Pour toute factorisation dans $\mathsf{F}(T/S)$, le morphisme g est birationnel.

En effet, soit $S' = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_{(2)})$ le schéma local en 2 ; notons

$$T' \xrightarrow{h'} F' \xrightarrow{g'} S'$$

les morphismes obtenus par changement de base ; T' est un schéma local, donc F' est un schéma local ; il est donc affine ; mais T' est fini sur S', donc F' est fini sur S' ; considérons les morphismes induits au dessus du point fermé $\overline{S'}$ de S'

$$\mathrm{Spec}(\mathbf{F}_2[X]/(X+1)^2) = \overline{T'} \xrightarrow{\overline{h'}} \overline{F'} \xrightarrow{\overline{g'}} \overline{S'} = \mathrm{Spec}(\mathbf{F}_2)$$

Comme $\overline{h'}$ est fidèlement plat et que $\overline{g'}$ est étale sur $\overline{S'}$, ce dernier morphisme ne peut être qu'un isomorphisme, donc (Nakayama) g' est un isomorphisme ; cela montre que le corps des fractions de F est égal à celui de S (soit $\mathbf{Q}$).

3. Si U est un ouvert affine de F, alors g induit une immersion ouverte $U \to S$.

En effet, $g(U)$ est un ouvert de $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, il donc de la forme $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_t)$; le morphisme $U \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_t)$ induit par g est affine, fidèlement plat et birationnel ; c'est donc un isomorphisme ([AC, I, §3.5, Prop. 9, b)]).

En particulier, pour tout point x de F, d'image $g(x) = s$, l'homomorphisme $\mathcal{O}_{S,s} \to \mathcal{O}_{F,x}$ est un isomorphisme.

4. Les fibres fermées de f qui ne sont pas connexes correspondent aux nombres premiers p qui sont décomposés dans $\mathbf{Z}[i]$; on sait que ce sont les premiers de la forme $4k+1$, et que leur ensemble P est infini. On identifie P à l'ensemble correspondant de points fermés de S.

Soit $T \xrightarrow{h} F \xrightarrow{g} S$ une factorisation étale. Considérons l'ensemble $Q \subset P$ des p qui sont décomposés dans F, c'est-à-dire ceux pour lesquels la fibre $g^{-1}(p)$ comporte deux éléments. Cet ensemble Q est fini.

En effet, soit U un ouvert affine non vide de F ; puisque F est un schéma noethérien intègre de dimension 1, le schéma réduit associé à l'ensemble fermé complémentaire $F-U$ est noethérien de dimension zéro ; c'est donc un schéma discret fini. D'autre part, d'après **3**, la restriction de g à U est injective ; donc chaque fibre « décomposée » $g^{-1}(p)$ rencontre U en au plus un point, l'autre point étant dans l'ensemble fini $F-U$; cela montre que l'ensemble Q est fini.

5. Montrons, pour conclure, qu'aucune factorisation étale ne peut être un élément initial de $\mathsf{F}(T/S)$.

Soit $T \xrightarrow{h} F \xrightarrow{g} S$ une factorisation étale. Puisque l'ensemble P des fibres décomposées de $T \to S$ est infini, il existe $p \in P$ qui n'est pas décomposé dans F ; soit q l'unique point de F tel que $g(q)=p$; alors $h^{-1}(q)$ est décomposé dans T ; on peut donc (1.1.3) factoriser h par le schéma F' obtenu par dédoublement de q dans F ; le morphisme $F' \to F$ est étale quasi-compact et quasi-séparé, et ce n'est pas un isomorphisme. Enfin f se factorise en

$$T \to F' \to F \to S.$$

$\square$

Aucun des S-schémas étales F considérés dans cet exemple n'est séparé (s'il est distinct de S) ; au vu de cet exemple on ne considérera, dans la suite, que des enveloppes étales *séparées* et des factorisations séparées, *i.e.* des éléments de $\mathsf{E}(T/S)$, et l'adjoint envisagé sera à valeurs dans $\mathsf{Et.sep}_S$.

La construction qui suit, entièrement due à O. Gabber, montre que l'enveloppe étale (même séparée) peut ne pas exister sans une hypothèse sur l'ensemble des composantes irréductibles de S, même pour un morphisme $T \to S$ affine libre de rang 2..

3.2.2 Proposition. *Il existe un anneau R tel que le morphisme*

$$f : \operatorname{Spec}(R[i]) \to \operatorname{Spec}(R)$$

n'admette pas d'enveloppe étale séparée ; autrement dit, en posant $S = \operatorname{Spec}(R)$, le foncteur $\iota_S : \mathsf{Et.sep}_S \to \mathsf{Pl.pf}_S$ n'admet pas d'adjoint à gauche.

Démonstration. On notera $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}[1/2]$ l'extension de $\mathbf{Z}$ dans laquelle 2 est inversible. On désigne par $R \subset \mathbf{Z}_2^{\mathbf{N}}$ le sous-anneau de l'anneau produit formé des suites $u : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}_2$ qui sont constantes à valeurs entières pour n assez grand ; soit $J \subset R$ l'idéal des suites de « valeur finale » nulle ; on a donc $R = \mathbf{Z} \oplus J$; enfin, J s'identifie au $\mathbf{Z}_2$-module libre de base $\mathbf{N}$: $J = \mathbf{Z}_2^{(\mathbf{N})} \subset \mathbf{Z}_2^{\mathbf{N}}$.

À une partie finie non vide $A \subset \mathbf{N}$ on associe l'idempotent $e_A \in R$ défini par $e_A(n) = 1$ si $n \in A$, et $= 0$ sinon. On constate immédiatement que pour un idempotent $e \in R$, il existe une partie finie $A \subset \mathbf{N}$ telle que $e = e_A$ si la valeur limite de e est nulle, et $e = 1 - e_A$ si la valeur limite de e est 1. Notons enfin que l'application $u \mapsto u_{|A}$ de restriction à A induit un isomorphisme

$$R/(1-e_A)R \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}_2^A.$$

Pour chaque partie finie A, le schéma $S = \mathrm{Spec}(R)$ est décomposé en

$$S = U_A \sqcup U'_A,$$

où $U_A = \mathrm{Spec}(R/(1-e_A)R)$ et $U'_A = \mathrm{Spec}(R/e_A R)$. Pour $m \in \mathbf{N}$ le schéma $U_m = \mathrm{Spec}(R/(1-e_{\{m\}})R) \simeq \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}_2)$ est (ouvert fermé et) irréductible ; notons U_∞ le fermé irréductible $V(J)$; on a

$$U_\infty = \bigcap_{m \in \mathbf{N}} U_m.$$

Il est fermé mais pas ouvert.

Posons $R[i] = R[X]/(X^2+1)$, et considérons le morphisme fini libre de rang 2

$$f : \mathrm{Spec}(R[i]) = T \to S = \mathrm{Spec}(R).$$

On va montrer que la catégorie des factorisations $\mathsf{E}(T/S)$ n'admet pas d'élément initial.

À une partie finie non vide $A \subset \mathbf{N}$, on associe le schéma

$$T_A \ = \ f^{-1}(U_A) \sqcup U'_A$$

Notons que U_A est un schéma sur $\mathbf{Z}_2$, et que donc le morphisme $f^{-1}(U_A) \to U_A$ est un revêtement étale ; on définit ainsi une factorisation

$$T \xrightarrow{h_A} T_A \xrightarrow{g_A} S.$$

Vérifions que toute factorisation $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ dans $\mathsf{E}(T/S)$ est de ce type.

Remarquons d'abord que g est fini, i.e. que c'est un revêtement étale ; en effet le morphisme diagonal Δ_g est une immersion ouverte et fermée, et $f = gh$ est plat et universellement fermé ; cela entraîne la même propriété pour h ; comme h est surjectif, on en tire que g est universellement fermé ; les fibres de ce morphisme étant discrètes, on peut appliquer [EGA IV$_4$, 18.12.4].

Le rang des fibres de g, qui est égal à 1 ou 2, fournit une décomposition en ouverts fermés $S = V_1 \sqcup V_2$. Au dessus de V_2 le morphisme h est un isomorphisme, donc le morphisme $f^{-1}(V_2) \to V_2$ est étale, donc l'entier 2 est inversible sur V_2. Notons $e \in R$ l'idempotent tel que $V_2 = \mathrm{Spec}(R/eR)$; on a donc une égalité dans R de la forme $2u - 1 = ev$ où u et v sont des suites dans R ; comme $u(n)$ est un entier pour n grand, la valeur limite de e ne peut pas être nulle ; elle est donc égale à 1 ; la remarque faite plus haut sur les idempotents de R entraîne qu'il existe une partie finie A telle que $1 - e = e_A$; autrement dit $V_2 = U_A$, et $E = T_A$.

Comme toute partie finie A de $\mathbf{N}$ est strictement contenue dans une partie plus grande A', ce qui donne un morphisme non trivial $T_{A'} \to T_A$, la catégorie des factorisations $\mathsf{E}(T/S)$ n'admet pas d'élément initial. □

3.3 Existence de l'adjoint : énoncé et démonstration

3.3.1 Théorème. *Soit S un schéma dont l'ensemble des composantes irréductibles est fini (par exemple S intègre ou noethérien). Pour tout morphisme de schémas $f : T \longrightarrow S$ plat et de présentation finie, l'ensemble $\overline{\mathsf{E}}(T/S)$ des classes d'isomorphie de factorisations est fini. Par suite (3.1.5), le morphisme f admet une enveloppe étale séparée (3.1.1) $h_T : T \to \pi^s(T/S)$, où $\pi^s(T/S)$ est donc un S-schéma étale quasi-compact et* séparé. *Autrement dit, le foncteur d'inclusion ι_S : $\mathsf{Et.sep}_S \to \mathsf{Pl.pf}_S$ (3.1.1) admet $T \mapsto \pi^s(T/S)$ pour adjoint à gauche.*

O. Gabber indique qu'il sait démontrer l'existence de l'adjoint sous l'hypothèse que S est seulement localement connexe, ce qui est une hypothèse évidemment plus faible que celle de cet énoncé.

Démonstration. Montrons que l'ensemble ordonné $\overline{\mathsf{E}}(T/S)$ est fini. Considérons un élément de $\overline{\mathsf{E}}(T/S)$, représenté par la factorisation $T \to E \to S$; le carré suivant est cartésien :

$$\begin{tikzcd} T \times_E T \arrow[r, "d_E"] \arrow[d] & T \times_S T \arrow[d, "h\times h"] \\ E \arrow[r, "\Delta_g"] & E \times_S E. \end{tikzcd}$$

Puisque E/S est étale et séparé, le morphisme diagonal Δ_g est une immersion ouverte et fermée ; donc d_E est une immersion ouverte et fermée, que l'on peut identifier au sous-schéma ouvert et fermé $\mathrm{Im}(d_E)$ [EGA I, 4.2.1]. On associe ainsi à toute classe d'isomorphisme d'objet de $\mathsf{E}(T/S)$ un sous-schéma ouvert et fermé de $T \times_S T$; l'exactitude (3.1.2) de la suite

$$T \times_E T \rightrightarrows T \xrightarrow{h} E$$

montre que ce procédé est injectif. Il reste donc à voir que cet ensemble de sous-schémas est fini ; c'est évident si S est noethérien. Si on suppose seulement que les composantes irréductibles de S sont en nombre fini, on invoque l'ensemble des points maximaux examiné après le lemme qui suit. □

3.3.2 Lemme. *Soient X un schéma et U une partie ouverte et fermée de l'espace sous-jacent à X. Notons $\widetilde{U} = (U, \mathcal{O}_{X|U})$ le schéma induit par X sur l'ouvert U, et $j : \widetilde{U} \to X$ l'immersion ouverte associée. Alors j est aussi une immersion fermée.*

Démonstration. On peut invoquer [EGA I, 4.2.2.] ; on peut aussi considérer l'ouvert fermé V complémentaire de U et l'immersion ouverte $j' : \widetilde{V} \to X$. La décomposition en somme directe $X = \widetilde{U} \sqcup \widetilde{V}$ conduit à l'isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres $\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} j_*(\mathcal{O}_{\widetilde{U}}) \times j'_*(\mathcal{O}_{\widetilde{V}})$; l'homomorphisme $\mathcal{O}_X \to j_*(\mathcal{O}_{\widetilde{U}})$ est donc surjectif. □

Soit $\mathsf{M}(X)$ l'ensemble des points génériques des composantes irréductibles d'un schéma X, encore nommés **les points maximaux** de X [EGA I, 0_I, 2.1.1]. Voici les principales propriétés que nous utiliserons.

3.3.3 Lemme. *Un ouvert fermé U d'un schéma X est égal à l'adhérence de son ensemble de points maximaux : $U = \overline{\mathsf{M}(U)}$.*

3.3.4 Lemme. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas.*

(i) *Si le morphisme f est plat, il induit une application $\mathsf{M}(f) : \mathsf{M}(X) \to \mathsf{M}(Y)$.*

(ii) *Si f est fidèlement plat, alors l'application $\mathsf{M}(f)$ est surjective.*

(iii) *Si f est plat et de présentation finie, alors les fibres de $\mathsf{M}(f)$ sont finies. En particulier, si l'ensemble des composantes irréductibles de Y est fini, il en est de même pour X.*

Démonstration. (i) Soit ξ un point maximal de X ; puisque f est plat, l'homomorphisme $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\xi}) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,f(\xi)})$ est fidèlement plat et il est, en particulier, surjectif ; l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,f(\xi)}$ a donc un seul idéal premier, i.e. $f(\xi)$ est un point maximal de Y ; ainsi, f induit un morphisme $\mathsf{M}(X) \to \mathsf{M}(Y)$.
(ii) Soit η un point maximal de Y ; le morphisme

$$f' : X' = X \times_Y \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,\eta}) \to \ \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,\eta})$$

est encore fidèlement plat ; donc le schéma X' est non vide, et l'image d'un point maximal ξ' de X' ne peut qu'être égale à η.
(iii) Supposons f plat et de présentation finie. Considérons, de nouveau, pour $\eta \in \mathsf{M}(Y)$, le morphisme $f' : X' \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,\eta})$; comme X'_{red} est de type fini sur le corps $\kappa(\eta)$, c'est un schéma noethérien, donc $\mathsf{M}(X') = \mathsf{M}(X'_{\mathrm{red}})$ est fini ; d'autre part, le monomorphisme $X' \to X$ est plat, d'où une injection $\mathsf{M}(X') \to \mathsf{M}(X)$ dont l'image s'identifie à la fibre en $\mathsf{M}(f)^{-1}(\eta)$. $\square$

3.4 Fonctorialités

Soit S un schéma dont l'ensemble des composantes irréductibles est fini, de sorte que le foncteur adjoint $T \mapsto \pi^s(T/S)$ existe sur $\mathsf{Pl.pf}_S$. Précisons quelle est l'image d'une flèche par ce foncteur : soient $f : T \to S$ et $f' : T' \to S$ deux objets de $\mathsf{Pl.pf}_S$; une flèche dans cette catégorie, est un morphisme de schémas $u : T' \to T$ tel que $f' = fu$; la propriété universelle de $h_{T'}$ montre qu'il existe un unique morphisme $\pi^s(u)$ pour lequel le carré suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h_{T'}"'] & T \arrow[d, "h_T"] \\ \pi^s(T') \arrow[r, "\pi^s(u)"'] & \pi^s(T) \end{tikzcd}$$

On explicite ici quelques propriétés générales de ces morphismes $\pi^s(u)$, en les reliant aux foncteurs $\mathsf{E}(u) : \mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S)$, introduits ci-après. Le terme « factorisation » a, ici encore, le sens restreint donné dans 3.1.3 : il s'agira de factorisations par un étale séparé.

3.4.1 Définition. Soient $f : T \to S$ et $f' : T' \to S$ deux objets de $\mathsf{Pl.pf}_S$, et $u : T' \to T$ un S-morphisme. Soit $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ une factorisation de f, et considérons la décomposition de $f' = fu$ en :

$$T' \xrightarrow{u} T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S.$$

Puisque f' et Δ_g sont universellement ouverts, il en est de même de hu ; le sous-schéma $E' = \mathrm{Im}(hu)$ est donc un ouvert de E, et il est quasi-compact sur S puisque T' l'est ; on a donc le carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h'"'] & T \arrow[d, "h"] \\ E' \arrow[r, "u'_E"'] & E \end{tikzcd}$$

où h' est surjectif et où u'_E est une immersion ouverte. On obtient ainsi une factorisation de f' en $T' \xrightarrow{h'} E' \xrightarrow{g'} S$, avec $g' = gu'_E$. Cette construction définit le foncteur $\mathsf{E}(u) : \mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S)$, que l'on écrira simplement, et par abus de notation,

$$\mathsf{E}(u)(h) \;=\; h';$$

dans cette formule le symbole h (resp. h') désigne donc l'objet $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ de $\mathsf{E}(T/S)$ (resp. l'objet $T' \xrightarrow{h'} E' \xrightarrow{g'} S$ de $\mathsf{E}(T'/S)$). La factorisation $\mathsf{E}(u)(h)$ est caractérisée à isomorphisme unique près comme un couple (u'_E, h') où u'_E est une immersion ouverte et où h' est surjectif, tels que $hu = u'_E h'$. Notons que lorsque le composé hu est surjectif, alors $\mathsf{E}(u)(h) = hu$.

On notera que le foncteur $\mathsf{E}(u)$ est défini sans hypothèse de finitude sur les points maximaux de S, ni d'hypothèse de platitude sur u, et que le passage $u \mapsto \mathsf{E}(u)$ est contravariant, alors que $u \mapsto \pi^s(u)$ est covariant. Noter aussi que π^s commute aux limites inductives puisque c'est un adjoint à gauche, mais que le foncteur contravariant E ne transforme pas une somme $T' \sqcup T''$ en le produit de catégories $\mathsf{E}(T'/S) \times \mathsf{E}(T''/S)$, essentiellement parce que, pour deux schémas $E', E'' \in \mathsf{Et.sep}_S$ il y a en général plusieurs factorisations $E' \sqcup E'' \to E \to S$.

3.4.2 Proposition. *Soient $u : T' \to T$ un morphisme dans $\mathsf{Pl.pf}_S$, et $\mathsf{E}(u) : \mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S)$ le foncteur qu'il induit entre les catégories de factorisations. Si le foncteur π^s existe, alors :*

1. *Le morphisme canonique $h_T : T \to \pi^s(T/S)$ induit une équivalence $\mathsf{E}(h_T)$ entre les catégories de factorisation, et un isomorphisme*

$$\pi^s(h_T) : \pi^s(T/S) \xrightarrow{\sim} \pi^s(\pi^s(T/S)/S).$$

2. *Pour que le morphisme $\pi^s(u)$ soit un isomorphisme il faut et il suffit que le foncteur $\mathsf{E}(u)$ soit une équivalence de catégories et que le morphisme composé $h_T \circ u : T' \to \pi^s(T/S)$ soit surjectif[2] ; cette dernière condition est évidemment vérifiée si u est surjectif.*

Démonstration. 1) Lorsque l'adjoint existe, le morphisme $\pi^s(u)$ s'insère dans le diagramme commutatif suivant, où v est surjectif puisque $\mathsf{E}(u)(h_T)$ est surjectif par définition, et où u' est une immersion ouverte.

(⋆)
$$\begin{tikzcd}
T' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h_{T'}"] \arrow[dd, bend right=60, "\mathsf{E}(u)(h_T)"'] & T \arrow[d, "h_T"] \\
\pi^s(T') \arrow[r, "\pi^s(u)"] \arrow[d, "v"] & \pi^s(T) \arrow[d, equal] \\
F \arrow[r, "u'"'] & \pi^s(T)
\end{tikzcd}$$

Pour chaque T, le morphisme $h_T : T \to \pi^s(T/S)$ induit, par définition, une équivalence de catégories

$$\mathsf{E}(h_T) : \mathsf{E}(\pi^s(T/S)/S) \xrightarrow{\sim} \mathsf{E}(T/S).$$

2. Je remercie Laurent Moret-Bailly de m'avoir montré qu'une version antérieure de cet énoncé, sans cette dernière hypothèse, est fausse

La définition de $\pi^s(h_T)$, lue dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "h_T"] \arrow[d, "h_T"'] & \pi^s(T) \arrow[d, equal] \\ \pi^s(T) \arrow[r, "\pi^s(h_T)"'] & \pi^s(\pi^s(T)), \end{tikzcd}$$

où h_T est un épimorphisme (3.1.2), implique immédiatement que $\pi^s(h_T)$ est un isomorphisme.

2) On vérifie immédiatement la commutativité du diagramme

$$(\star\star) \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{E}(\pi^s(T/S)/S) \arrow[r, "\mathsf{E}(h_T)"] \arrow[d, "\mathsf{E}(\pi^s(u))"'] & \mathsf{E}(T/S) \arrow[d, "\mathsf{E}(u)"] \\ \mathsf{E}(\pi^s(T'/S)/S) \arrow[r, "\mathsf{E}(h_{T'})"'] & \mathsf{E}(T'/S). \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme les foncteurs « horizontaux » sont des équivalences de catégories ; cela montre que si $\pi^s(u)$ est un isomorphisme alors $\mathsf{E}(u)$ est une équivalence ; par ailleurs, le diagramme $(\star)$ et la surjectivité de $h_{T'}$ montrent que le composé $h_T u$ est surjectif.

Supposons, réciproquement, que $\mathsf{E}(u)$ soit une équivalence de catégories ; alors l'image $\mathsf{E}(u)(h_T)$ de l'élément initial de $\mathsf{E}(T/S)$ est isomorphe à l'élément initial $h_{T'}$ de $\mathsf{E}(T'/S)$; d'après la caractérisation de $\mathsf{E}(u)(h_T)$ indiquée en 1) on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h_{T'}"'] & T \arrow[d, "h_T"] \\ \pi^s(T') \arrow[r, "u'"'] & \pi^s(T) \end{tikzcd}$$

où u' est une immersion ouverte ; comme le morphisme $h_T u$ est supposé surjectif, l'immersion ouverte u' est un isomorphisme. $\square$

Le résultat suivant m'a été signalé par Bruno Kahn.

3.4.3 Proposition. *Soit $f : T \to S$ un morphisme plat de présentation finie.*

i) Le foncteur

$$f^* : \mathsf{Et.sep}_S \to \mathsf{Et.sep}_T$$

admet un adjoint à gauche $f_!^{\text{ét}}$, donné, pour $F \in \mathsf{Et.sep}_T$, par la formule

$$f_!^{\text{ét}}(F) = \pi^s(F/S)$$

ii) (Transitivité de π^s) *Soit $U \in \mathsf{Pl.pf}_T$. Alors on a un isomorphisme canonique, et fonctoriel en U :*

$$\pi^s(U/S) \simeq \pi^s(\pi^s(U/T)/S).$$

Démonstration. i) Notons d'abord que le morphisme composé $F \to T \to S$ est plat et de présentation finie, de sorte que $\pi^s(F/S)$ est défini. Soit $E \in \mathsf{Et.sep}_S$. On a une suite d'isomorphismes

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Et.sep}_S}(\pi^s(F/S), E) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Pl.pf}_S}(F, E) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Et.sep}_T}(F, E \times_S T)$$

le premier par définition de π^s et le second par la propriété universelle du produit fibré. Cela démontre i), ces isomorphismes étant naturels en E.

ii) Le foncteur f^* de changement de base $E \mapsto T \times_S E$ donne lieu au diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Et.sep}_S \arrow[r, "\iota_S"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathsf{Pl.pf}_S \arrow[d, "f^*"] \\ \mathsf{Et.sep}_T \arrow[r, "\iota_T"'] & \mathsf{Pl.pf}_T \end{tikzcd}$$

Passant aux adjoints à gauche, on obtient l'isomorphisme canonique

$$^{\mathrm{ad}}\iota_S \circ {}^{\mathrm{ad}}f^* \simeq {}^{\mathrm{ad}}f^* \circ {}^{\mathrm{ad}}\iota_T$$

Traduisons cette formule : les adjoints $^{\mathrm{ad}}\iota$ sont par définition les foncteurs π^s ; l'adjoint $^{\mathrm{ad}}f^*$ qui est écrit à gauche porte sur les catégories $\mathsf{Pl.pf}$, c'est donc la restriction des scalaires au sens naïf (oubli de la base) ; tandis que le foncteur $^{\mathrm{ad}}f^*$ qui figure à droite concerne les schémas étales ; d'après i), il est donc isomorphe à $\pi^s(-/S)$; d'où l'isomorphisme :

$$\pi^s(U/S) \simeq \pi^s(\pi^s(U/T)/S).$$

□

3.5 Exemples

3.5.1. L'unicité de l'adjoint, lorsqu'il existe, montre que si S est le spectre d'un corps k, alors, d'après 2.1.1, on a un isomorphisme de foncteurs (en T)

$$\pi^s(T/S) \simeq \pi_0(T/S),$$

où, rappelons-le, $\pi_0(T/S)$ désigne le spectre de la clôture algébrique séparable de k dans l'anneau $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$.

3.5.2. Lorsque S est un schéma de Dedekind et que le morphisme $f : T \to S$ est lisse, la factorisation $T \to E \to S$ de l'énoncé 2.2.1 est isomorphe à la factorisation $T \to \pi^s(T/S) \to S$.

3.5.3. Le foncteur π^s ne commute en général pas à la restriction aux ouverts de S, ni à la restriction à la fibre générique lorsque S est intègre (penser à $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}[i]$).

Cependant, on montrera en 6.1.3 que des propriétés de commutation à certains changements de base sont vérifiées si la base est normale, ou géométriquement unibranche, et que le morphisme est lisse.

Factorisations par un étale fini

3.5.4 Lemme. *Soient $f : T \to S$ un morphisme plat et de présentation finie et $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ une factorisation dans $\mathsf{E}(T/S)$. Si f est universellement fermé alors le morphisme g est fini.*

Démonstration. Puisque le morphisme h est surjectif et que gh est universellement fermé, g est universellement fermé ; ce morphisme est aussi séparé et à fibres finies discrètes ; c'est donc un morphisme fini [EGA IV_4, 18.12.4]. □

Nous ignorons si g est affine dès que f l'est.

3.5.5 Lemme. *Soit S un schéma local hensélien. Soient $f : T \to S$ un morphisme fidèlement plat de présentation finie et $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ une factorisation dans $\mathsf{E}(T/S)$. On suppose que T est connexe. Alors E est un schéma local et le morphisme étale g est* fini et local.

Démonstration. Le schéma E est quasi-fini et séparé sur S. Comme f est surjectif, il existe $e \in E$ tel que le point $g(e) = s$ soit le point fermé de S ; d'après l'implication $a) \Rightarrow c)$ de [EGA IV_4, 18.5.11], le schéma E est somme de deux schémas E' et E'', tels que $E' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{E,e})$ et que la restriction $g_{|E'} : E' \to S$ soit un morphisme fini. Mais T est connexe et le morphisme $h : T \to E' \sqcup E''$ est surjectif ; donc E'' est vide. □

3.5.6 Lemme. *Soient S un schéma connexe et I un ensemble ; on désigne par $T = \bigsqcup_I S$ le S-schéma somme d'une famille de copies de S, indexée par I. Soit $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ une factorisation dans $\mathsf{E}(T/S)$. Alors, il existe une application surjective $I \to J$, qui induit un morphisme $\bigsqcup_I S \to \bigsqcup_J S$ isomorphe à h.*

Démonstration. Le morphisme h est universellement ouvert ; par restriction à la composante de T d'indice i, on trouve une immersion ouverte $h_i : S \to E$ telle que $gh_i = 1_S$; comme g est séparé, l'immersion h_i est aussi fermée. On en déduit que pour $i, i' \in I$, $h_i(S) \cap h_{i'}(S)$ est un ouvert fermé de $h_i(S)$; puisque S est connexe, cette intersection est soit vide, soit égale à $h_i(S)$. La relation $i \sim i' \Leftrightarrow h_i(S) = h_{i'}(S)$ est donc une relation d'équivalence sur l'ensemble I, et le passage au quotient définit l'application cherchée $I \to J$. □

3.5.7 Proposition. *Soit S un schéma connexe. Soit $f : T \to S$ un morphisme surjectif plat et de présentation finie. On suppose qu'il existe un S-morphisme surjectif $u : T' \to T$, où T' est une somme finie de copies de S. Alors pour toute factorisation $T \to E \to S$, E est isomorphe à une somme finie de copies de S ; en particulier, si T est connexe alors la seule factorisation dans $\mathsf{E}(T/S)$ est donnée par $h = f$ et $E = S$.*

On peut interpréter l'existence de u en disant que T est recouvert par la famille des $s(S) \subset T$, où s parcourt l'ensemble des sections de f.

Démonstration. Soit $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ une factorisation dans $\mathsf{E}(T/S)$. En appliquant le lemme qui précède à la factorisation $T' \xrightarrow{hu} E \xrightarrow{g} S$, on voit que E est somme de copies de S ; si T est supposé connexe, la surjectivité de h implique que E est connexe, donc que g est un isomorphisme. □

Morphismes propres

La présentation du résultat qui suit m'a été indiquée par Bruno Kahn.

3.5.8 Proposition. *Soient S un schéma noethérien et $f : T \longrightarrow S$ un morphisme propre et lisse. Dans la factorisation de Stein*

$$T \xrightarrow{h} \mathrm{Spec}_S(f_\star(\mathcal{O}_T)) \xrightarrow{g} S,$$

le morphisme g est étale fini. Notons $A(T/S) = \mathrm{Spec}_S(f_\star(\mathcal{O}_T))$ l'enveloppe S-affine de T. On a les propriétés suivantes :

(1) Les fibres de h sont géométriquement connexes ;

(2) le morphisme $h : T \to A(T/S)$ est universel pour les morphismes de T vers un S-schéma étale de type fini, séparé ou non ;

(3) le morphisme canonique $a : \pi^s(T/S) \to A(T/S)$ est un isomorphisme ;

(4) la formation de l'enveloppe affine commute à tout changement de base $S' \to S$: le morphisme $A(S' \times_S T/S') \to S' \times_S A(T/S)$ est un isomorphisme ;

(5) comme en (4), mais pour les morphismes où S' est un point géométrique de S.

Romagny obtient des résultats analogues pour les morphismes géométriquement réduits (et pas seulement lisses), et dans le cadre des champs [Rom11, 3.2.5]. Voir aussi la remarque (5.3.4).

Démonstration. On a numéroté ces propriétés pour pouvoir facilement indiquer les dépendances logiques entre elles. Pour une démonstration du fait que g soit étale, voir [EGA III, 4.3.4, 7.8.7 et 7.8.10], ou bien [SGA 1, X 1.2], ou enfin [FAG, 8.5.16]. La propriété (1) est essentiellement le théorème de connexion de Zariski ([EGA III, 4.3.4]).

L'implication (1)$\Rightarrow$ (2) est démontrée en 1.3.3.

Montrons (3). Le morphisme $a : \pi^s(T/S) \to A(T/S)$ est défini par la propriété universelle de $\pi^s(T/S)$ puisque le schéma étale $A(T/S)$ est fini, donc séparé ; d'autre part, le morphisme propre f se factorise en $T \xrightarrow{h'} \pi^s(T/S) \xrightarrow{g'} S$, et g' est séparé de type fini ; comme h' est surjectif 3.1.2, g' est propre [EGA II, 5.4.3 (ii)] ; il est donc fini [EGA IV$_3$, 8.11.1] et en particulier affine : par la propriété universelle de l'enveloppe affine $A(T/S)$, on obtient un S-morphisme en sens inverse $b : A(T/S) \to \pi^s(T/S)$. Les deux propriétés universelles montrent que a et b sont inverses l'un de l'autre.

On aura remarqué que cette démonstration de (3) n'utilise ni la propriété (1), ni (2).

La propriété (5) est démontrée en [EGA III, 7.8.7]. Elle implique la propriété (4), selon laquelle le morphisme

$$u : A(S' \times_S T/S') \to S' \times_S A(T/S)$$

est un isomorphisme ; en effet, la source et le but de u sont deux S'-schémas finis étales, et, par hypothèse, le morphisme u induit un isomorphisme entre leurs fibres.

Montrons enfin que la conjonction des propriétés (5) et (3) implique (1) : d'après l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$ du lemme 1.3.3, on peut supposer que S est le spectre d'un corps algébriquement clos, et il faut vérifier la propriété (2) de la proposition dans ce cas ; mais si S est le spectre d'un corps tout S-schéma étale est séparé, donc le morphisme $h' : T \to \pi^s(T/S)$ est universel pour tous les étales ; et d'après (3) h' est isomorphe à $h : T \to A(T/S)$.

Ainsi la « propriété d'échange » (5) implique la propriété de connexion (1). □

4 L'adjoint comme quotient

4.1 Quotients étales séparés

Dans ce paragraphe, on interprète le morphisme universel $h_T : T \to \pi^s(T/S)$ comme le passage au quotient de T par une relation d'équivalence convenable, et nous en tirons les premières conséquences.

4.1.1 Théorème. *Soit $f : T \longrightarrow S$ un morphisme plat et de présentation finie de schémas. Soit $d : R \longrightarrow T \times_S T$ le graphe d'une relation d'équivalence, où d est une immersion ouverte et fermée. Alors le faisceau fppf quotient T/R est représentable par un schéma E quasi-compact étale et séparé sur S ; enfin, le morphisme $R \to T \times_E T$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Un théorème de M. Artin montre que T/R est un espace algébrique [LMB, 10.4] ; puisque l'immersion $R \longrightarrow T \times_S T$ est ouverte, cet espace algébrique est étale, et il est séparé puisque l'immersion est aussi fermée ; un autre théorème [LMB, A.2] implique qu'un espace algébrique étale et séparé est (représentable par) un schéma. □

Voir l'appendice pour des démonstrations plus élémentaires du théorème 4.1.1.

4.1.2 Théorème. [Relations d'équivalence associées aux factorisations]. *Soit $f : T \to S$ un morphisme plat de présentation finie. Le foncteur « carrés fibrés »*

$$\mathsf{Cf}_{T/S} : \mathsf{E}(T/S) \ \to \ \mathsf{R}(T/S), \quad \{T \to E \to S\} \longmapsto \{T \times_E T \longrightarrow T \times_S T\}$$

établit une équivalence entre la catégorie des factorisations $\mathsf{E}(T/S)$, au sens de (3.1.3), *et la catégorie $\mathsf{R}(T/S)$ des graphes de relations d'équivalence dans T qui sont ouverts et fermés dans $T \times_S T$.*

Démonstration. On a déjà remarqué (3.1.2) que, pour une factorisation $T \xrightarrow{h} E \to S$, le morphisme h est un épimorphisme effectif, i.e. que la suite

$$T \times_E T \rightrightarrows T \xrightarrow{h} E$$

est exacte dans la catégorie des schémas ; en particulier, le morphisme h définit E comme le schéma quotient de T par la relation $T \times_E T \longrightarrow T \times_S T$. Réciproquement, soit R une relation à graphe ouvert et fermé ; d'après le théorème 4.1.1 le faisceau quotient $E' = T/R$ est représentable par schéma étale et séparé, et le morphisme $R \to T \times_{E'} T$ est un isomorphisme. Le foncteur $R \mapsto (T \to T/R \to S)$ est donc quasi-inverse de celui de l'énoncé. □

4.1.3 Corollaire. *La relation d'équivalence R telle que le morphisme $T \to T/R$ soit universel pour les étales quasi-compacts et séparés est l'objet initial de la catégorie $\mathsf{R}(T/S)$ des relations d'équivalence à graphe ouvert et fermé dans $T \times_S T$.*

Démonstration. C'est le critère 3.1.5 transféré dans la catégorie des relations d'équivalence grâce au théorème précédent. □

4.1.4 Exemple. (Morphisme d'anneaux artiniens). Soit $A \to B$ un homomorphisme d'anneaux locaux artiniens, faisant de B un A-module libre de type fini. Notons $f : T = \mathrm{Spec}(B) \to S = \mathrm{Spec}(A)$ le morphisme de schémas associé. On va expliciter, pour ce morphisme, la relation d'équivalence « initiale »(4.1.3), et le schéma $\pi^s(T/S)$.

Comme le schéma $T \times_S T$ est fini discret, le sous-schéma diagonal $\Delta \subset T \times_S T$ est porté par un *ensemble* ouvert et fermé ; notons $\widetilde{\Delta} \to T \times_S T$ l'immersion ouverte et fermée indiquée dans 3.3.2. Vérifions que ce sous-schéma $\widetilde{\Delta}$ est le graphe de la relation d'équivalence « initiale » ; ce schéma est évidemment minimal parmi les sous-schémas ouverts fermés de $T \times_S T$ qui contiennent Δ ; il reste donc à voir que c'est le graphe d'une relation d'équivalence. Or, cette relation est clairement réflexive et symétrique ; la transitivité se traduit par l'inclusion (cf. A.1.3)

$${p'_0}^{-1}(\widetilde{\Delta}) \cap {p'_2}^{-1}(\widetilde{\Delta}) \subset {p'_1}^{-1}(\widetilde{\Delta}).$$

Le schéma ${p'_i}^{-1}(\widetilde{\Delta})$ est un sous-schéma ouvert fermé de T^3 d'espace topologique sous-jacent l'ouvert et fermé ${p'_i}^{-1}(\Delta)$; ce schéma est donc égal à $\widetilde{{p'_i}^{-1}(\Delta)}$; or, l'inclusion

$$ {p'_0}^{-1}(\Delta) \cap {p'_2}^{-1}(\Delta) \subset {p'_1}^{-1}(\Delta) $$

est vraie puisqu'elle traduit la transitivité de la relation d'égalité dans T. □

Le schéma quotient $E = T/\widetilde{\Delta}$ est donc isomorphe à l'enveloppe S-étale $\pi^s(T/S)$, et on a un isomorphisme (4.1.1)

$$ \widetilde{\Delta} \xrightarrow{\sim} T \times_E T. $$

Puisque T est fini sur S, le morphisme diagonal $\Delta \to T \times_S T$ est une immersion fermée ; il résulte alors de l'isomorphisme précédent que l'immersion fermée $\Delta \to T \times_E T$ est surjective, donc que le morphisme $T \to E$ est radiciel ([EGA I, 3.7.1]) ; on retrouve ainsi, lorsque $T \to S$ est une extension finie de corps, la factorisation usuelle en extension radicielle et extension séparable ([A, V, §7, Prop. 12]).

Traduisons cela en termes des anneaux sous-jacents : soit $\mathfrak{n}$ l'idéal maximal de $B \otimes_A B$ image réciproque, par l'homomorphisme $B \otimes_A B \to B$, de l'idéal maximal de B ; alors le sous schéma ouvert et fermé $\widetilde{\Delta}$ de $T \times_S T = \mathrm{Spec}(B \otimes_A B)$ associé à l'ensemble ouvert et fermé $\{\mathfrak{n}\}$ est le spectre de $(B \otimes_A B)_{\mathfrak{n}}$, et le morphisme

$$ \mathrm{Spec}((B \otimes_A B)_{\mathfrak{n}}) \to \mathrm{Spec}(B \otimes_A B) $$

est le graphe de la relation « initiale » ; l'enveloppe étale $E = \pi^s(T/S)$ est donc le spectre de l'anneau défini par l'exactitude de la suite

$$ \Gamma(E, \mathcal{O}_E) \longrightarrow B \rightrightarrows (B \otimes_A B)_{\mathfrak{n}} $$

Lorsque A et B sont des corps, cette description de la clôture séparable se trouve déjà dans [Fév69], où sa vérification repose sur la remarque suivante : soit $A(x) \subset B$ le sous-corps engendré par un élément x du noyau de la double flèche ; alors l'homomorphisme $A(x) \otimes_A A(x) \to A(x)$ est plat, autrement dit $A(x)$ est étale sur A. □

Enfin, on peut étendre ce résultat au cas où A est un corps et où B est une algèbre de type fini sur A, à condition de réinterpréter le localisé $(B \otimes_A B)_{\mathfrak{n}}$ considéré ci-dessus ; en effet, lorsque B est local artinien, la partie multiplicative complémentaire de $\mathfrak{n}$ dans $B \otimes_A B$ est égale à l'ensemble des éléments de cet anneau dont l'image par le morphisme $m : B \otimes_A B \to B$ est inversible, et cette partie conduit au même anneau de fractions que la partie $1+\mathrm{Ker}(m) \subset B \otimes_A B$. Voici, sans démonstration, la généralisation annoncée.

4.1.5 Proposition. *Soient k un corps et R une k-algèbre de type fini. Notons J l'idéal noyau de l'homomorphisme $m : R \otimes_k R \to R$. Alors la clôture algébrique séparable de k dans R est l'anneau*

$$ \mathrm{Ker}[\, R \rightrightarrows (1 + J)^{-1}(R \otimes_k R)\,]. $$

4.2 Revêtements étales galoisiens

L'énoncé qui suit est bien connu (voir p.ex. [Sza, 5.3.8]), mais le théorème 4.1.2 permet d'en donner une démonstration essentiellement triviale. Inversement, on peut voir le théorème 4.1.2 comme la généralisation « naturelle » de la correspondance de Galois, les relations d'équivalences à graphe ouvert fermé remplaçant les sous-groupes du groupe de Galois ; cette analogie est déjà évoquée par GROTHENDIECK en 1960 (TDTE III, p.212-03).

Dans le contexte galoisien qui suit, il est nécessaire de se restreindre aux schémas intermédiaires qui sont *séparés* sur la base. En effet, on a vu en 1.1.3 qu'un morphisme fini étale $f : T \to S$, possédant une fibre fermée non connexe, admet une factorisation $T \to F \to S$, où $F \to S$ est un morphisme étale birationnel, universellement fermé, mais non séparé sur S, et donc non entier ; un tel F ne peut évidemment pas être associé à un sous-groupe.

4.2.1 Proposition. (Correspondance galoisienne) *Soient G un groupe fini et $f : T \to S$ un morphisme étale fini galoisien de groupe G, de sorte qu'on a un isomorphisme de S-schémas*

$$G \times T \to T \times_S T.$$

On suppose que T est connexe. Pour tout sous-groupe $H \subset G$, T/H est un schéma étale séparé et les morphismes $T \to T/H \to S$ forment une factorisation de f, au sens de 3.1. Réciproquement, pour une telle factorisation $T \to E \to S$, il existe un sous-groupe H de G tel que le carré

$$\begin{tikzcd} H \times T \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & T \times_E T \arrow[d] \\ G \times T \arrow[r, "\sim"] & T \times_S T \end{tikzcd}$$

soit cartésien. Cette correspondance entre sous-groupes et classes d'isomorphie de factorisations est bijective.

Démonstration. Pour un sous-groupe $H \subset G$, le morphisme $H \times T \to T \times_S T$ est le graphe (ouvert et fermé) d'une relation d'équivalence, et le quotient par cette relation est isomorphe au faisceau T/H, qui est donc un schéma étale et séparé sur S.

Réciproquement, considérons une factorisation $T \to E \to S$ et la relations d'équivalence associée $R = T \times_E T \to T \times_S T$. À chaque élément $g \in G$ est associée l'immersion $i_g : T \to T \times_S T,\ t \mapsto (gt, t)$. Comme R est un ouvert fermé de $T \times_S T$, $i_g^{-1}(R)$ est un ouvert fermé du schéma T, lequel est supposé connexe. Notons $H \subset G$ l'ensemble des $g \in G$ tels que $i_g^{-1}(R) = T$; on a donc $R = H \times T$.Vérifions, en termes ensemblistes, que H est un sous-groupe de G : un élément $h \in G$ est dans H si et seulement si on a $(ht, t) \in R$ pour tout $t \in T$; en particulier, pour h et h' dans H, on a, pour tout $t \in T, (ht, t) \in R$ et $(h't, t) \in R$; d'où l'on tire pour tout $t \in T$, $(hh't, h't) \in R$ et $(h't, t) \in R$; la transitivité de R entraîne que hh' est dans H ; H étant fini, c'est bien un sous-groupe de G. □

5 Des équivalences entre catégories de factorisations

Soient $f' : T' \to S$ et $f : T \to S$ des morphismes plats de présentation finie ; un morphisme $u : T' \to T$ dans $\mathsf{Pl.pf}_S$ induit un foncteur entre les catégories de factorisations (3.4.1)

$$\mathsf{E}(u) : \mathsf{E}(T/S) \ \to\ \mathsf{E}(T'/S),$$

et, si le foncteur adjoint existe, un S-morphisme

$$\pi^s(u) : \pi^s(T'/S) \to \pi^s(T/S).$$

On va dégager des propriétés de u qui impliqueront que $\mathsf{E}(u)$ est une équivalence ; si, de plus, le morphisme $h_T \circ u$ est surjectif (3.4.2), on pourra conclure que le morphisme $\pi^s(u)$ est un isomorphisme.

5.1

Rappelons (4.1.2) que le foncteur « carrés fibrés »

$$\mathsf{Cf}_{T/S} : \mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{R}(T/S)$$

qui associe à la factorisation $T \to E \to S$ l'ouvert fermé $T \times_E T \subset T \times_S T$, est une équivalence de catégories.

Introduisons, comme dans [EGA IV$_4$, 18.5.3], l'ensemble $\mathsf{Of}(X)$ des ouverts fermés d'un schéma X ; ce sont les sous-schémas induits sur les ouverts $U \subset X$, qui sont aussi (topologiquement) fermés ; il s'avère (3.3.2) que l'immersion ouverte associée $(U, \mathcal{O}_X|U) \to (X, \mathcal{O}_X)$ est alors aussi une immersion fermée. Cet ensemble $\mathsf{Of}(X)$ est ordonné par l'inclusion des sous-schémas, et on peut le considérer aussi comme une catégorie.

Le foncteur « oubli de la structure de relation d'équivalence » $\mathsf{R}(T/S) \to \mathsf{Of}(T \times_S T)$ est pleinement fidèle.

5.1.1 Lemme. *Soient $X \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{u} Z$ deux morphismes quasi-compacts et quasi-séparés de schémas. Alors l'image schématique de uv est un sous-schéma fermé de l'image schématique de u ; ces sous-schémas sont égaux si v est schématiquement dominant.*

Démonstration. Introduisons les applications canoniques $\theta_u : \mathcal{O}_Z \to u_\star(\mathcal{O}_Y)$ et $\theta_v : \mathcal{O}_Y \to v_\star(\mathcal{O}_X)$. L'application analogue θ_{uv} est la composée

$$\mathcal{O}_Z \xrightarrow{\theta_u} u_\star(\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{u_\star(\theta_v)} (uv)_\star(\mathcal{O}_X).$$

Le noyau de θ_u est donc contenu dans celui θ_{uv}, et lui est égal lorsque $u_\star(\theta_v)$ est injectif. Ces idéaux de $\mathcal{O}_Z$ définissent respectivement l'image schématique de u, et celle de uv. □

5.1.2 Lemme. *Soit $\omega : X' \to X$ un morphisme quasi-compact, quasi-séparé et schématiquement dominant de schémas. Pour toute immersion quasi-compacte $i : Z' \to X'$ on note $\widetilde{Z'}$ l'image schématique de Z' dans X relativement à ωi* (1.1.7). *Alors,*

1. *Pour $Z \in \mathsf{Of}(X)$ le fermé $\widetilde{\omega^*(Z)}$ est égal à Z.*
2. *Si $\omega^* : \mathsf{Of}(X) \to \mathsf{Of}(X')$ est une équivalence de catégories, alors tout sous-schéma ouvert fermé $Z' \in \mathsf{Of}(X')$ est isomorphe à $\omega^*(\widetilde{Z'})$; autrement dit le foncteur $\mathsf{Of}(X') \to \mathsf{Of}(X)$ défini par $Z' \mapsto \widetilde{Z'}$ est quasi-inverse de ω^*.*

   Enfin, pour des ouverts fermés Z'_1 et Z'_2 de X', on a $\widetilde{Z'_1 \cap Z'_2} = \widetilde{Z'_1} \cap \widetilde{Z'_2}$.
3. *Si l'application $\theta_\omega : \mathcal{O}_X \to \omega_\star(\mathcal{O}_{X'})$ est bijective, alors le foncteur $\omega^* : \mathsf{Of}(X) \to \mathsf{Of}(X')$ est une équivalence.*

Démonstration. 1) Considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \omega^* Z \arrow[r, "\omega_Z"] \arrow[d] & Z \arrow[d, "i"] \\ X' \arrow[r, "\omega"'] & X \end{tikzcd}$$

Puisque i est une immersion ouverte et que ω est schématiquement dominant, ω_Z est schématiquement dominant. Le lemme qui précède appliqué aux morphismes $\omega^* Z \xrightarrow{\omega_Z} Z \xrightarrow{i} X$ dit que l'image schématique de i, c'est-à-dire Z puisque i est une immersion fermée, est égale à l'image schématique $\widetilde{\omega^*(Z)}$.

2) Remarquons d'abord que pour $Z' \in \mathsf{Of}(X')$, $\widetilde{Z'}$ est un ouvert fermé de X : en effet, puisque ω^* est essentiellement surjectif, il existe $Z \in \mathsf{Of}(X)$ et un isomorphisme $Z' \simeq \omega^*(Z)$, mais alors, d'après 1., $\widetilde{Z'} \simeq \widetilde{\omega^*(Z)} = Z$, et Z est ouvert fermé dans X. L'application $Z' \mapsto \widetilde{Z'}$ définit donc un foncteur $\mathsf{Of}(X') \to \mathsf{Of}(X)$ qui est quasi-inverse de ω^*. D'où l'on tire que le foncteur $Z' \mapsto \omega^*(\widetilde{Z'})$ est isomorphe à l'identité. En particulier, en utilisant la pleine fidélité de ω^* , on voit que pour des ouverts fermés Z'_1 et Z'_2 de X', on a

$$\widetilde{Z'_1 \cap Z'_2} = \widetilde{Z'_1} \cap \widetilde{Z'_2}.$$

3) On suppose maintenant que l'application canonique

$$\theta_\omega : \mathcal{O}_X \to \omega_\star(\mathcal{O}_{X'})$$

est un isomorphisme ; en particulier, ω est schématiquement dominant et, d'après 1., pour $Z \in \mathsf{Of}(X)$, on a $\widetilde{\omega^*(Z)} = Z$. Pour voir que le foncteur ω^* est une équivalence il suffit donc de vérifier que pour un ouvert fermé Z' de X', l'image schématique $\widetilde{Z'}$ est un ouvert fermé de X et que le morphisme $\alpha' : Z' \to \omega^*(\widetilde{Z'})$ est un isomorphisme.

Notons Z'' le sous-schéma associé (3.3.2) à l'ouvert fermé complémentaire de Z' dans X', et désignons par $\omega' : Z' \to X$ et $\omega'' : Z'' \to X$ les restrictions de ω à ces sous-schémas. Les isomorphismes de $\mathcal{O}_X$-algèbres

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \omega_\star(\mathcal{O}_{X'}) \xrightarrow{\sim} \omega'_\star(\mathcal{O}_{Z'}) \times \omega''_\star(\mathcal{O}_{Z''})$$

montrent que le morphisme

$$j : \widetilde{Z'} \sqcup \widetilde{Z''} \to X$$

est un isomorphisme. Considérons alors le diagramme suivant où le carré est cartésien et où le schéma V est donc isomorphe à $\omega^*(\widetilde{Z'})$:

$$\begin{tikzcd} Z' \sqcup Z'' \arrow[dr, "\alpha' \sqcup \alpha''"] \arrow[drr, "j'"] \arrow[ddr] & & \\ & V \sqcup W \arrow[r, "\bar{j}"'] \arrow[d] & X' \arrow[d, "\omega"] \\ & \widetilde{Z'} \sqcup \widetilde{Z''} \arrow[r, "j"'] & X \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\bar{j}$ est un isomorphisme puisque j en est un ; j' est aussi un isomorphisme par hypothèse ; donc $\alpha' \sqcup \alpha''$, et à fortiori α', sont des isomorphismes. □

5.1.3 Lemme. *Soient $f' : T' \to S$ et $f : T \to S$ des morphismes plats de présentation finie, et $u : T' \to T$ un S-morphisme de $\mathsf{Pl.pf}_S$; désignons, pour simplifier, par $\omega = u \times u$ le morphisme $T' \times_S T' \to T \times_S T$ induit par u, et par ω^* le foncteur image réciproque par ω. Considérons le diagramme de foncteurs*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{E}(T/S) \arrow[r, "\mathsf{Cf}_{T/S}"] \arrow[d, "\mathsf{E}(u)"'] & \mathsf{R}(T/S) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{R}(u)"'] & \mathsf{Of}(T \times_S T) \arrow[d, "\omega^*"] \\ \mathsf{E}(T'/S) \arrow[r, "\mathsf{Cf}_{T'/S}"'] & \mathsf{R}(T'/S) \arrow[r] & \mathsf{Of}(T' \times_S T'), \end{tikzcd}$$

où $\mathsf{R}(u)$ désigne l'induction habituelle pour les relations d'équivalence : $R \mapsto \omega^*(R)$ [SGA 3, V, 3, **a)**]. *Alors les deux carrés sont commutatifs (à isomorphisme canonique près).*

Démonstration. En effet, soit $T \xrightarrow{h} E \to S$ une factorisation, et soit $T' \xrightarrow{h'} E' \to S$ son image par $\mathsf{E}(u)$ (3.4.2) ; alors dans le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h'"'] & T \arrow[d, "h"] \\ E' \arrow[r, "u'_E"'] & E, \end{tikzcd}$$

h' est surjectif et u'_E est une immersion ouverte, de sorte qu'on a l'isomorphisme $R' = T' \times_{E'} T' \xrightarrow{\sim} T' \times_E T'$; de plus, dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[r, "\sim"] & T' \times_E T' \arrow[r] \arrow[d] & T \times_E T \arrow[r, equal] \arrow[d] & R \\ & T' \times_S T' \arrow[r, "u \times u"'] & T \times_S T & \end{tikzcd}$$

le carré est cartésien. Cela montre la commutativité du carré de gauche du diagramme de l'énoncé ; la commutativité du carré de droite découle de la définition même de l'image réciproque d'une relation d'équivalence. □

5.1.4 Théorème. *Gardons les hypothèses et les notations de* 5.1.3. *On suppose que u est schématiquement dominant, et que le morphisme ω^* induit, par image réciproque, une équivalence entre les catégories d'ouverts fermés :*

$$\omega^* : \mathsf{Of}(T \times_S T) \to \mathsf{Of}(T' \times_S T').$$

Alors les foncteurs $\mathsf{R}(u)$ et $\mathsf{E}(u)$ sont des équivalences de catégories.

Démonstration. Puisque le foncteur « oubli » $\mathsf{R}(T/S) \to \mathsf{Of}(T \times_S T)$ est pleinement fidèle, et que ω^* induit une équivalence sur les catégories d'ouverts fermés, il suffit de montrer que sa restriction $\mathsf{R}(u)$ aux relations d'équivalence est essentiellement surjective. Soit donc R' une relation d'équivalence dans T', dont le graphe est ouvert et fermé ; par hypothèse, il existe un ouvert fermé $R \in \mathsf{Of}(T \times_S T)$ tel que $R' = \omega^*(R)$. Il faut montrer que R est une relation d'équivalence dans T.

Comme d'habitude, nous écrirons les puissances d'un S-schéma en omettant l'indice S, donc $T^2 = T \times_S T$, etc. Notons d'abord que la platitude de f et celle de f' entraînent que $\omega = u \times u$ est schématique dominant, puisque u l'est (1.1.5), et idem pour $u \times u \times u$.

Pour un sous-schéma Z' de T'^2, on note $\widetilde{Z'}$ l'image schématique (1.1.6) du morphisme composé $Z' \to T'^2 \xrightarrow{\omega} T^2$. Si $U \subset T^2$ est ouvert fermé, alors le morphisme canonique

$$(\star) \qquad \widetilde{\omega^*(U)} \to U$$

est un isomorphisme (5.1.2, 1.) ; de plus pour des ouverts fermés Z_1' et Z_2' de T'^2, on a d'après 5.1.2, 2.), la relation ;

$$(\star\star) \qquad \widetilde{Z_1' \cap Z_2'} = \widetilde{Z_1'} \cap \widetilde{Z_2'}.$$

Reprenons l'ouvert fermé R de T^2 tel que $\omega^*(R)$ soit une relation d'équivalence dans T', et montrons que R est une relation d'équivalence ; il s'agit de vérifier les conditions (A.1.1), (A.1.2) et (A.1.3) de l'appendice qui expriment respectivement la réflexivité, la symétrie et la transitivité.

— (Réflexivité) Notons Δ' et Δ les sous-schémas diagonaux dans T'^2 et T^2 ; le morphisme $\Delta' \to \Delta$, induit par ω, est égal à u ; il est donc schématiquement dominant. La commutativité du carré

$$\begin{tikzcd} \Delta' \arrow[r, "u"] \arrow[d] & \Delta \arrow[d] \\ T'^2 \arrow[r, "\omega"'] & T^2 \end{tikzcd}$$

implique alors (5.1.1) que l'image schématique $\widetilde{\Delta'}$ de Δ' dans T^2, et l'adhérence schématique $\overline{\Delta}$ de Δ dans T^2 sont égales : $\overline{\Delta} = \widetilde{\Delta'}$. Puisque la relation $\omega^*(R)$ est réflexive par hypothèse, on a $\Delta' \subset \omega^*(R)$; d'où l'on tire, en tenant compte de $(\star)$, les inclusions suivantes.

$$\Delta \subset \overline{\Delta} = \widetilde{\Delta'} \subset \widetilde{\omega^*(R)} = R.$$

— (Symétrie) Considérons l'automorphisme σ de T^2 qui permute les facteurs. L'inclusion $R \cap \sigma R \subset R$ d'ouverts fermés de T^2 devient une égalité par image réciproque par le morphisme ω qui est schématiquement dominant. C'est donc une égalité.

— (Transitivité) Il s'agit de vérifier l'inclusion

$$p_0'^{-1}(R) \cap p_2'^{-1}(R) \subset p_1'^{-1}(R),$$

c'est-à-dire, d'après $(\star)$, l'inclusion

$$p_0'^{-1}(\widetilde{\omega^*(R)}) \cap p_2'^{-1}(\widetilde{\omega^*(R)}) \subset p_1'^{-1}(\widetilde{\omega^*(R)}).$$

Puisque les morphismes de projection $p_i : T^3 \to T^2$ sont plats, ils préservent la formation des images schématiques (1.1.6) ; on a donc $p_i'^{-1}(\widetilde{\omega^*(R)}) = p_i'^{-1}\widetilde{(\omega^*(R))}$. La formule $(\star\star)$ et le fait que $\omega^*(R)$ soit transitive, permettent de conclure. □

5.2 Cas où les fibres de u sont géométriquement connexes

5.2.1 Lemme. *Soit $\omega : X' \to X$ un morphisme submersif de schémas* [EGA I, 3.10]*, dont les fibres sont connexes. Alors l'application $\omega^* : \mathsf{Of}(X) \to \mathsf{Of}(X')$ est bijective.*

Démonstration. Comme nous ne considérons que la structure canonique de schéma sur un ensemble ouvert fermé (3.3.2), on peut identifier ω^* à l'application ensembliste sous-jacente ω^{-1}, portant sur l'ensemble $\mathsf{Of}(X)$.

Puisque l'application ω est supposée surjective, on a l'égalité $Z = \omega(\omega^{-1}(Z))$, et elle entraîne que ω^{-1} est injective sur l'ensemble $\mathsf{Of}(X)$. La surjectivité de ω^{-1} découle de ceci : soit $Z' \subset X'$ un ouvert fermé ; alors l'inclusion $Z' \subset \omega^{-1}(\omega(Z'))$ est une égalité ; en effet, pour $z' \in Z'$, la fibre $\omega^{-1}(\omega(z'))$ est connexe par hypothèse, et elle rencontre (en z') l'ouvert fermé Z' ; elle est donc contenue dans Z' ; par ailleurs, cette égalité montre que $\omega(Z')$ est un ouvert fermé de X, puisque son image réciproque par l'application submersive ω est un ouvert fermé de T'. □

5.2.2 Proposition. *Soient $f : T \to S$ et $f' : T' \to S$ des morphismes plats et de présentation finie, et $u : T' \to T$ un S-morphisme schématiquement dominant. On suppose que le morphisme u est universellement submersif et que ses fibres sont géométriquement connexes. Alors le foncteur*

$$\mathsf{E}(u) : \mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S)$$

est une équivalence de catégories. Si le foncteur π^s existe, alors le morphisme

$$\pi^s(u) : \pi^s(T'/S) \to \pi^s(T/S)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Que le foncteur $\mathsf{E}(u)$ soit une équivalence résulte de 5.1.4, compte tenu du lemme 5.2.1 appliqué au morphisme $\omega = u \times u : T' \times_S T' \to T \times_S T$. Par définition, un morphisme submersif est en particulier surjectif ; si l'adjoint existe, alors le morphisme $h_T \circ u : T' \to T \to \pi^s(T/S)$ est surjectif, et le critère 3.4.2 implique que $\pi^s(u)$ est un isomorphisme. □

Rappelons que tout morphisme surjectif et ouvert, ou surjectif et fermé, est submersif.

Un homéomorphisme universel (= entier radiciel et surjectif) est évidemment universellement submersif et ses fibres sont géométriquement connexes ; cela montre *l'invariance par homéomorphisme schématiquement dominant* du foncteur adjoint $T \mapsto \pi^s(T/S)$ lorsqu'il existe.

5.3 Cas où $\mathcal{O}_T \to u_\star(\mathcal{O}_{T'})$ est bijectif

5.3.1 Proposition. *Soient $f : T \to S$ et $f' : T' \to S$ des morphismes plats et de présentation finie, et $u : T' \to T$ un S-morphisme. On suppose que l'application canonique $\mathcal{O}_T \longrightarrow u_*(\mathcal{O}_{T'})$ est bijective. Alors le foncteur induit par u* (3.4.2)

$$\mathsf{E}(u) : \mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S),$$

est une équivalence de catégories. Supposons que les composantes irréductibles de S soient en nombre fini, et que le morphisme $f' : T' \to S$ soit universellement fermé. Alors, le morphisme

$$\pi^s(u) : \pi^s(T'/S) \to \pi^s(T/S)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. L'équivalence de catégories est une conséquence immédiate de 5.1.4 compte tenu du lemme (5.1.2). Supposons maintenant que les composantes irréductibles de S soient en nombre fini, de sorte que le foncteur adjoint existe. Comme l'hypothèse sur S se propage à T, les composantes connexes de ce schéma sont ouvertes, ce qui permet de supposer que T est connexe. La conclusion sur $\pi^s(u)$ découlera du critère 3.4.2 ; il faut donc vérifier que le morphisme $h_T \circ u$ est surjectif (on ne suppose pas ici que u soit surjectif). Soit $R \subset T \times_S T$ la relation d'équivalence qui définit $\pi^s(T/S)$, de sorte que h_T est le morphisme de passage au quotient $T \to T/R$. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[r] \arrow[d] & T' \times_S T \arrow[r, "f' \times 1"] \arrow[d, "u \times 1"] & T \\ R \arrow[r] & T \times_S T & \end{tikzcd}$$

où le schéma R_1 est l'image réciproque de la relation R par le morphisme $u \times 1$; on peut le décrire comme l'ensemble des $(x', x) \in T' \times_S T$ tels que $(u(x'), x) \in R$; il s'agit donc de vérifier que $(f' \times 1)(R_1) = T$. Or, le schéma R_1 est ouvert et fermé dans $T' \times_S T$ puisque c'est l'image réciproque de R, et il n'est pas vide puisqu'il contient les éléments de la forme $(x', u(x'))$, avec $x' \in T'$. La surjectivité du morphisme composé $R_1 \to T' \times_S T \to T$ provient donc de ce que le morphisme $f' \times 1_T$ est ouvert et fermé, et de la connexité de T. □

5.3.2 Remarque. Considérons, comme dans la proposition précédente, un morphisme $f' : T' \to S$ fidèlement plat de présentation finie, et universellement fermé ; notons $T = \mathrm{Spec}_S(f'_\star(\mathcal{O}_{T'}))$ l'enveloppe affine de f', de sorte que f' se factorise en $f' = fu$:

$$T' \xrightarrow{u} T \xrightarrow{f} S$$

où l'application $\mathcal{O}_T \to u_\star(\mathcal{O}_{T'})$ est bijective. Cependant, on ne peut pas appliquer la proposition précédente à cette situation car les hypothèses sur f' ne suffisent en général pas, à elles seules, à entraîner que f soit plat de présentation finie. Mais si f' est propre et séparable alors f est même étale fini, donc séparé ; la proposition ci-dessus redonne alors l'isomorphisme

$$\pi^s(u) : \pi^s(T'/S) \xrightarrow{\sim} \pi^s(T/S) = T$$

déjà signalé dans 3.5.

6 Cas d'une base normale. Prolongements

Soit $T \to S$ un morphisme lisse de présentation finie, où S est un schéma normal intègre, de point générique ξ. On va montrer qu'une factorisation (au sens restreint de 3.1.3) « générique » $T_\xi \to E_0 \to \xi$ se prolonge de façon unique en une factorisation $T \to E \to S$, dont la fibre en ξ est isomorphe à la factorisation générique donnée.

Dans le langage de 5.1, on peut dire le morphisme « réduction à la fibre générique » $T_\xi \to T$ établit une équivalence de catégories de factorisations

$$\mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T_\xi/S).$$

Remarquons que la démonstration de 2.2.1 fournit un tel prolongement (pour une base de Dedekind), mais par des méthodes qui semblent trop liées à la dimension 1 pour pouvoir être généralisées telles quelles en plus grande dimension.

6.1

Rappelons qu'un schéma X est dit *normal* si tous ses anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$ sont intègres et intégralement clos ([EGA IV_2, 5.13.5]).

Dans la suite, on a besoin d'une propriété du morphisme $f : T \to S$ qui assure qu'une hypothèse de normalité sur S se propage à T et à $T \times_S T$. C'est le cas si f est lisse de présentation finie, ou plus généralement si f est plat à fibres géométriquement normales [EGA IV_3, 11.3.13, (ii)] [3] . Nous nous limiterons aux morphismes lisses et donc à l'adjoint à gauche du foncteur d'inclusion

$$\iota_S : \mathsf{Et.sep}_S \to \mathsf{Sm}_S,$$

où Sm_S désigne la catégorie des schémas lisses de présentation finie sur S.

La normalité elle-même n'intervient dans la suite que par la propriété topologique suivante.

6.1.1 Lemme. *Soit X un schéma tel que le spectre $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ de chacun de ses anneaux locaux soit intègre (c'est le cas si X est normal). On suppose que l'ensemble des composantes irréductibles de X est fini. Alors :*

1. *Les composantes irréductibles sont ouvertes, et en particulier l'adhérence schématique d'un ouvert de X est une partie ouverte et fermée de X ;*
2. *soient U et V deux ouverts de X ; notons $\overline{U}$, $\overline{V}$ et $\overline{U \cap V}$ les adhérences schématiques. Alors on a*
$$\overline{U \cap V} = \overline{U} \cap \overline{V};$$
3. *si $U \subset X$ un ouvert schématiquement dense, alors l'application $Z \mapsto Z \cap U$ définit une équivalence de catégories.*
$$\mathsf{Of}(X) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Of}(U).$$

Démonstration. 1) Les composantes irréductibles de X sont deux à deux disjointes, et sont en nombre fini ; elles sont donc ouvertes.

2) Un ouvert contenant un point x contient un ouvert irréductible contenant x, à savoir l'intersection de cet ouvert avec l'unique composante irréductible de X contenant x ; de plus, un ouvert irréductible contenant un point $x \in \overline{U} \cap \overline{V}$ rencontre U et V, donc aussi leur intersection puisqu'il est irréductible ; on a donc $x \in \overline{U \cap V}$. L'inclusion dans l'autre sens est claire.

3) D'après 1), l'adhérence (dans X), $V \mapsto \overline{V}$ définit une application $\mathsf{Of}(U) \to \mathsf{Of}(X)$; elle est réciproque de l'application de l'énoncé. En effet, si $V \in \mathsf{Of}(U)$, alors $V = U \cap \overline{V}$ puisque V est un fermé de U ; de plus, l'application $\mathsf{Of}(X) \to \mathsf{Of}(X)$ définie par $Z \mapsto Z \cap U \mapsto \overline{Z \cap U} = \overline{Z} \cap \overline{U}$, est l'application identique puisque Z est fermé dans X et que $\overline{U} = X$ par hypothèse. □

6.1.2 Proposition. *Soient S un schéma normal dont les composantes irréductibles sont en nombre fini, et $f : T \to S$ un morphisme lisse de présentation finie. Soit $u : T' \to T$ une immersion ouverte quasi-compacte et dense. Alors le foncteur*

$$\mathsf{E}(u) : \mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S)$$

est une équivalence de catégories.

3. C'est aussi le cas pour un morphisme plat à fibres géométriquement réduites, et dont la fibre générique $T_\xi \to \xi$ est géométriquement normale [Laz79, Thm].

Démonstration. Remarquons d'abord que le morphisme composé $f' = fu$ est plat et de présentation finie puisque l'immersion u est quasi-compacte ; de plus, T étant, en particulier, réduit, l'ouvert dense $u(T')$ est même schématiquement dominant (1.1.5) ; puisque S est normal et que f est lisse le schéma $T \times_S T$ est normal ; ses composantes irréductibles sont en nombre fini d'après 3.3.4, *iii)* ; enfin l'ouvert $T' \times_S T' \subset T \times_S T$ est schématiquement dominant en raison de la platitude de f (1.1.5). Donc, d'après 6.1.1, 3), l'image réciproque par $u \times u$ induit une bijection

$$\mathsf{Of}(T \times_S T) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Of}(T' \times_S T').$$

Les hypothèses de 5.1.4 sont donc vérifiées, et on en tire la conclusion. □

6.1.3 Théorème. *Soient S un schéma intègre et normal, et ξ son point générique. Soit $f : T \longrightarrow S$ un morphisme lisse de présentation finie. Alors*

1. *Pour tout ouvert non vide U de S, le foncteur $\mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(U \times_S T/S)$ est isomorphe à la restriction à l'ouvert U, et c'est une équivalence de catégories.*
2. *Le morphisme canonique*
$$\pi^s(U \times_S T/U) \to U \times_S \pi^s(T/S)$$
est un isomorphisme.
3. *En passant à la limite sur les ouverts non vides U de S, on obtient l'équivalence de catégories*
$$\mathsf{E}(T/S) \xrightarrow{\sim} \mathsf{E}(T_\xi/\xi),$$
et l'isomorphisme
$$\pi^s(T_\xi/\xi) \xrightarrow{\sim} \pi^s(T/S)_\xi.$$

Démonstration. Soit U un ouvert non vide de S ; pour tout S-schéma X, on note X_U l'image réciproque de U dans X. L'image du morphisme composé $U \times_S T = T_U \to U \to S$ est contenue dans U, de sorte que toute factorisation, au sens de 3.1.3, de ce morphisme $T_U \to S$ est une factorisation de $T_U \to U$. On voit de même que $\mathsf{E}(T_\xi/S) = \mathsf{E}(T_\xi/\xi)$; dans la démonstration qui suit on écrira donc $\mathsf{E}(T_U)$ et $\mathsf{E}(T_\xi)$ à la place de $\mathsf{E}(T_U/S)$ et $\mathsf{E}(T_\xi/S)$.

Notons d'abord que le foncteur induit 3.4.2 par l'immersion ouverte $u : T_U \to T$

$$\mathsf{E}(u) : \mathsf{E}(T) \to \mathsf{E}(T_U)$$

est isomorphe au foncteur « restriction au-dessus de U » ; en effet, dans le carré cartésien obtenu par restriction

$$\begin{tikzcd} T_U \arrow[r, "u"] \arrow[d, "1\times h"'] & T \arrow[d, "h"] \\ E_U \arrow[r, "u'"'] & E \end{tikzcd}$$

le morphisme $1 \times h$ est surjectif, tout comme h, et u' est une immersion ouverte, et ces deux propriétés caractérisent $\mathsf{E}(u)(h)$(3.4.1).

L'ouvert T_U est dense dans T car $\xi \in U$, et parce que T est plat sur S(1.1.4). Puisque f est lisse, le schéma $T \times_S T$ est normal et on peut utiliser le lemme (6.1.1, 3)) : la restriction à T_U induit une équivalence de catégories

$$\mathsf{Of}(T \times_S T) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Of}(T_U \times_S T_U).$$

La proposition 5.1.4 entraîne alors que le foncteur $\mathsf{E}(u) : \mathsf{E}(T) \to \mathsf{E}(T_U)$ est une équivalence de catégories, d'où l'énoncé 1).

Reprenons le diagramme de 3.4.2 :

$$\begin{tikzcd} T_U \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h_{T_U}"] \arrow[dd, bend right, "1\times h_T = \mathsf{E}(u)(h_T)"'] & T \arrow[d, "h_T"] \\ \pi^s(T_U) \arrow[r, "\pi^s(u)"] \arrow[d, "v"] & \pi^s(T) \arrow[d, equal] \\ \pi^s(T)_U \arrow[r, "u'"'] & \pi^s(T) \end{tikzcd}$$

Puisque le foncteur $\mathsf{E}(u)$ est une équivalence de catégories il échange les éléments initiaux ; comme ce foncteur est donné par la restriction à U, le morphisme v est un isomorphisme de U-schémas étales

$$\pi^s(T_U) \xrightarrow{\sim} \pi^s(T)_U,$$

ce qui est une façon condensée d'écrire 2).

Montrons maintenant qu'il existe un ouvert non vide $U \subset S$ tel que le changement de base associé au morphisme $j_U : \xi \to U$ induise une équivalence de catégories $\mathsf{E}(T_U) \to \mathsf{E}(T_\xi)$. Comme, en général, le morphisme $T_\xi \to S$ n'est pas de présentation finie, ni ouvert, on ne peut pas utiliser la définition 3.4.2 pour relier les catégories de factorisation $\mathsf{E}(T_\xi)$ et $\mathsf{E}(T_U)$; c'est pourquoi on passe ici par le changement de base j_U^*.

Pour tout ouvert $U \subset S$, non vide donc contenant ξ, le foncteur $j_U^* : \mathsf{E}(T_U) \to \mathsf{E}(T_\xi)$ est pleinement fidèle : en effet, dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathsf{E}(T_U) \arrow[r] \arrow[d, "j_U^*"'] & \mathsf{Of}(T_U \times_S T_U) \arrow[d, "(j_U \times j_U)^*"] \\ \mathsf{E}(T_\xi) \arrow[r] & \mathsf{Of}(T_\xi \times_S T_\xi) \end{tikzcd}$$

les foncteurs horizontaux sont pleinement fidèles 5.1, ainsi que le foncteur $(j_U \times j_U)^*$ puisque $T_\xi \times_S T_\xi$ contient les points maximaux du schéma réduit $T_U \times_S T_U$ (3.3.3).

Considérons alors un objet de $\mathsf{E}(T_\xi)$, c'est-à-dire une factorisation « générique »,

$$T_\xi \to E_0 \to \xi.$$

Par passage à la limite ([EGA IV$_3$, 8.8.2]), il existe un ouvert U de S pour lequel il existe un diagramme $T_U \to F \to U$ prolongeant le diagramme générique, et on peut se ramener au cas où ce diagramme constitue une factorisation de $T_U \to U$ [EGA IV$_4$, 17.7.8,*ii*)]. Notant $\mathcal{U}$ l'ensemble des ouverts non vides de S, et $\overline{\mathsf{E}}$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de E, la limite inductive des changements de base $\xi \to U$ donne donc une bijection

$$\varinjlim_{\mathcal{U}} \overline{\mathsf{E}}(T_U) \to \overline{\mathsf{E}}(T_\xi).$$

Mais ces ensembles $\overline{\mathsf{E}}$ sont finis ; il existe donc un ouvert U de S tel que le foncteur

$$j_U^* : \mathsf{E}(T_U) \to \mathsf{E}(T_\xi)$$

soit une équivalence de catégories ; il échange donc les éléments initiaux de ces catégories, d'où l'on tire un isomorphisme

$$\pi^s(T_\xi) \xrightarrow{\sim} j_U^*(\pi^s(T_U)) = \pi^s(T_U)_\xi.$$

On a montré plus haut que le morphisme canonique $\pi^s(T_U) \to \pi^s(T)_U$ est un isomorphisme ; comme $j_U^*(\pi^s(T)_U) = \pi^s(T)_\xi$, on obtient, par composition, l'isomorphisme annoncé

$$\pi^s(T_\xi/\xi) \xrightarrow{\sim} \pi^s(T/S)_\xi.$$

□

6.1.4 Remarque. Cet énoncé reste vrai si au lieu de supposer que S est normal intègre, on suppose qu'il est géométriquement unibranche, c'est-à-dire si, en notant S' le normalisé de S, le morphisme $S' \to S$ est un homéomorphisme universel [EGA IV$_2$, 6.15.3].

6.1.5 Corollaire (Compatibilité au produit)**.** *Soit S un schéma normal intègre de point générique ξ. Soient $f : T \longrightarrow S$ et $f' : T' \longrightarrow S$ deux morphismes lisses et de présentation finie. Alors le morphisme canonique*

$$\mu : \pi^s(T \times_S T'/S) \longrightarrow \pi^s(T/S) \times_S \pi^s(T'/S)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Le morphisme μ relie des S-schémas étales quasi-compacts et séparés ; il est surjectif puisque les morphismes h_T et $h_{T'}$ le sont (3.1.2), et par suite aussi le morphisme composé

$$T \times_S T' \to \pi^s(T \times_S T'/S) \to \pi^s(T/S) \times \pi^s(T'/S).$$

Il suffit donc (1.3.2) de voir que son morphisme générique

$$\pi^s(T \times_S T'/S)_\xi \longrightarrow \pi^s(T/S)_\xi \times_\xi \pi^s(T'/S)_\xi$$

est un isomorphisme. Suivant le théorème 6.1.3, et 3.5.1, cela se réécrit

$$\pi_0(T_\xi \times_\xi T'_\xi/\xi) \xrightarrow{\sim} \pi_0(T_\xi/\xi) \times_\xi \pi_0(T'_\xi/\xi).$$

L'énoncé sur S découle donc de la compatibilité au produit lorsque la base est un corps (2.1.1 (iv)). □

7 L'adjoint d'un étale

7.1 Adhérence d'une relation ouverte

7.1.1 Lemme. *Soit $f : T \to S$ un morphisme lisse de présentation finie. On suppose que S est normal et intègre. Soit $R \subset T \times_S T$ un ouvert qui est le graphe d'une relation d'équivalence. Alors l'adhérence schématique $\overline{R}$ de R dans $T \times_S T$ est un ouvert fermé qui est le graphe d'une relation d'équivalence.*

Démonstration. Comme il est rappelé en (6.1), le schéma $T^2 = T \times_S T$ est normal et ses composantes irréductibles sont en nombre fini ; par suite (6.1.1) $\overline{R}$ est un sous-schéma ouvert et fermé dans T^2 ; il définit une relation qui est clairement réflexive et symétrique ; sa transitivité équivaut (A.1.3) à l'inclusion

$$p_0'^{-1}(\overline{R}) \cap p_2'^{-1}(\overline{R}) \subset p_1'^{-1}(\overline{R}).$$

Or, les projections $p'_i : T^3 \to T^2$ sont des morphismes plats, qui préservent donc les adhérences schématiques (1.1.7) ; d'où les égalités $p_i'^{-1}(\overline{R}) = \overline{p_i'^{-1}(R)}$; pour conclure on utilise la compatibilité de l'adhérence aux intersections (6.1.1) et le fait que R est une relation d'équivalence. □

7.1.2 Proposition. (L'adjoint d'un étale) *Soit S un schéma intègre et normal, et $f : T \to S$ un morphisme étale de présentation finie. Alors le morphisme*

$$h_T = h : T \to \pi^s(T/S)$$

est un isomorphisme local [EGA I, 4.4.2] *; plus précisément, T admet un recouvrement par des ouverts U sur lesquels le morphisme h induit un isomorphisme de U sur l'ouvert $h(U)$.*

De plus, ce morphisme h est aussi l'enveloppe séparée de $T \to S$ au sens suivant : tout morphisme de S-schémas $h' : T \to F$, où F est séparé sur S, est de la forme $h' = uh$ pour un unique morphisme $u : \pi^s(T/S) \to F$ (On ne suppose pas que F soit plat ni de type fini sur S).

Démonstration. Comme f est étale, le morphisme diagonal $T \to T \times_S T$ est une immersion ouverte ; le lemme qui précède (7.1.1) montre que l'adhérence R du sous-schéma diagonal est une partie ouverte et fermée de $T \times_S T$ qui est le graphe d'une relation d'équivalence. Elle est évidemment la relation d'équivalence minimale à graphe ouvert fermé ; le quotient T/R définit donc $\pi^s(T/S)$.

Montrons que le morphisme h est un isomorphisme local. On peut recouvrir T par des ouverts U tels que $h(U)$ soit contenu dans un ouvert affine de S, donc tels que le morphisme $U \to S$ soit séparé. La relation induite par R sur un tel ouvert est $R_U = R \cap (U \times_S U)$; c'est donc l'adhérence schématique dans $U \times_S U$ du sous-schéma diagonal, lequel est fermé puisque U est séparé sur S ; donc R_U est ce sous-schéma diagonal ; ainsi, R_U est la relation triviale sur U, et h induit un isomorphisme $U \simeq h(U)$.

Montrons enfin que h est l'enveloppe séparée de f. Posons $E = \pi^s(T/S)$; on a vu au début de la démonstration que la relation $R = T \times_E T$ qui définit E est l'adhérence schématique de la diagonale ; cela implique que le morphisme $\Delta_h : T \to T \times_E T$ est schématiquement dominant 1.1.7. Soit $h' : T \to F$ un morphisme vers un S-schéma séparé. Considérons le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\Delta_h"] \arrow[d, "\Delta_{h'}"'] & T \times_E T \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dashed, "w"] \\
T \times_F T \arrow[r, "\psi"'] & T \times_S T.
\end{tikzcd}$$

Les morphismes φ et ψ sont des immersions fermées puisque E et F sont séparés sur S, et on a vu que Δ_h est schématiquement dominant ; on en tire l'existence du morphisme w rendant les triangles commutatifs. Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
T \times_E T \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "w"'] & T \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & E \arrow[d, dashed, "u"] \\
T \times_F T \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & T \arrow[r, "h'"'] & F.
\end{tikzcd}$$

La ligne supérieure est exacte puisque h est fidèlement plat quasi-compact, donc un épimorphisme effectif [SGA 1, VIII 5.3] ; d'où l'existence et l'unicité de u. □

7.2 L'espace des composantes connexes des fibres

C'est le lieu ici d'évoquer rapidement l'espace algébrique π_0 qui représente les composantes connexes des fibres géométriques d'un morphisme lisse ; cet espace algébrique est signalé par M. Artin, Lemma

1.17 de son article *Néron Models*, dans [Art86] ; puis dans le livre de LAUMON – MORET-BAILLY [LMB, 6.8] pour les schémas, et enfin généralisé pour les champs par M. ROMAGNY [Rom11, 6.2.6], où le morphisme n'est plus supposé lisse mais seulement géométriquement réduit, et où on représente plutôt « les composantes connexes ouvertes »(voir son article pour une définition en forme). Voici l'énoncé pour les schémas.

Soit $f : T \longrightarrow S$ un morphisme lisse de présentation finie de schémas. Alors il existe un espace algébrique $\pi_0(T/S)$ *qui est étale et quasi-compact sur S et un morphisme $h : T \longrightarrow \pi_0(T/S)$ ayant les propriétés suivantes :*
— *(a) Pour tout point géométrique ξ de S, $\pi_0(T/S)(\xi)$ s'identifie à l'ensemble des composantes connexes de T_ξ ;*
— *(b) les fibres de h sont géométriquement connexes (donc géométriquement irréductibles, puisque h est lisse) ;*
— *(c) tout morphisme de S-schémas $T \to E$, où E est étale sur S, se factorise par h ;*
— *(d) la formation de $\pi_0(T/S)$ commute à tout changement de base sur S.*

Cet espace π_0 est construit comme le faisceau quotient T/R pour la relation d'équivalence dont le graphe $R \subset T \times_S T$ est la réunion des composantes connexes des fibres de la première projection $p : T \times_S T \to T$, qui rencontrent la diagonale.

Indiquons succinctement comment la propriété (a) conduit à cette relation R : soit ξ un point géométrique de S ; deux points x et y de T_ξ sont dans la même composante connexe C de T_ξ si on a $(x, y) \in C \times C \subset T_\xi \times_\xi T_\xi$; notant $C(x)$ la composante connexe de x, le graphe de la relation : « être dans la même composante connexe » est donc

$$\bigcup_{x \in T_\xi} x \times C(x);$$

or, $x \times C(x)$ est la composante connexe de $p_\xi^{-1}(x) = x \times T_\xi$ qui rencontre la diagonale. Cette remarque et un peu de travail conduisent à la description donnée de la relation d'équivalence R. Le théorème [EGA IV$_3$, 15.6.5] montre alors que R est un sous-schéma ouvert de $T \times_S T$.

Notons qu'aucune des quatre propriétés énoncées ci-dessus pour π_0 n'est en général vérifiée pour π^s.

7.3 Le morphisme $\pi_0(T/S) \to \pi^s(T/S)$

La propriété universelle (c) de π_0 montre qu'il existe un morphisme d'espaces algébriques $\theta : \pi_0(T/S) \to \pi^s(T/S)$, que l'on peut préciser :

7.3.1 Proposition. *On suppose que S est normal intègre et que le morphisme $T \to S$ est lisse. Soit R l'ouvert de $T \times_S T$ qui est le graphe de la relation d'équivalence qui définit $\pi_0(T/S)$(7.2). Alors l'adhérence schématique $\overline{R}$ de R dans $T \times_S T$ est le graphe de la relation d'équivalence qui définit $\pi^s(T/S)$.*

De plus, tout morphisme de S-espaces algébriques $\pi_0(T/S) \to F$, où F est séparé, se factorise de façon unique par θ ; en d'autres termes, θ fait de $\pi^s(T/S)$ l'enveloppe séparée de $\pi_0(T/S)$.

Rappelons qu'un espace algébrique étale *et séparé* est (représentable par) un schéma ([LMB, A.2]), ou ([Knu71, 6.16]).

Démonstration. Que l'adhérence $\overline{R}$ soit le graphe ouvert et fermé d'une relation d'équivalence est établi dans (7.1.1). Montrons que cette relation est minimale parmi les relations à graphe ouvert fermé dans $T \times_S T$, i.e. que c'est la relation d'équivalence R' qui définit $\pi^s(T/S)$. L'existence du morphisme $\pi_0(T/S) \to \pi^s(T/S)$ entraîne l'inclusion $R \subset R'$; puisque le sous-schéma R' est fermé, il contient $\overline{R}$, et la minimalité de R' implique l'égalité cherchée.

La démonstration de la deuxième partie est analogue à celle de la fin de 7.1.2 : le diagramme commutatif suivant résume la situation.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, equal] & T \times_{\pi_0} T \arrow[r, "j"] \arrow[d] & T \times_{\pi^s} T \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dashed, "w"] & \overline{R} \\
& T \times_F T \arrow[r, "\psi"'] & T \times_S T &
\end{tikzcd}$$

Les morphismes φ et ψ sont des immersions fermées puisque π^s et F sont séparés sur S, et j est schématiquement dominant (1.1.6) ; on en tire l'existence du morphisme w rendant les triangles commutatifs. On termine la démonstration comme dans 7.1.2. $\square$

7.3.2 Exemple. Cet exemple est signalé dans [LMB, 6.8.1] ; c'est l'ouvert de lissité de la courbe de Mumford citée p.210 de [BLR90]. Il met en lumière quelques différences entre les foncteurs π_0 et π^s.

On pose $S = \operatorname{Spec}(A)$, où $A = \mathbf{R}[[t]]$, et on prend pour T le complémentaire de l'origine dans $\operatorname{Spec}(A[X,Y]/(X^2+Y^2-t))$.

Le morphisme $f : T \to S$ est lisse, sa fibre générique $T_\eta \to \eta$ est géométriquement irréductible. La fibre fermée $T_s \to s$ est isomorphe au morphisme

$$\operatorname{Spec}(\mathbf{C}[X]_X) \to \operatorname{Spec}(\mathbf{R}).$$

On en tire les propriétés suivantes.

— (i) Pour toute factorisation $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$, où h est surjectif et g étale (séparé ou non), g est un isomorphisme ; en particulier $\pi^s(T/S) = S$;

— (ii) le morphisme canonique $\pi^s(T_s/s) = \operatorname{Spec}(\mathbf{C}) \to \pi^s(T/S)_s = \operatorname{Spec}(\mathbf{R})$ n'est pas un isomorphisme (l'isomorphisme $\pi^s(T_\xi/\xi) \simeq \pi^s(T/S)_\xi$ de 6.1.3, établi pour la fibre générique, n'est donc plus vrai pour la fibre fermée) ;

— (iii) la fibre fermée du morphisme $h : T \to \pi^s(T/S) = S$ est irréductible mais pas géométriquement connexe (alors que la fibre fermée de $T \to \pi_0(T/S)$ est géométriquement connexe) ;

— (iv) l'espace algébrique $\pi_0(T/S)$ *n'est pas un schéma.*

(i) Comme la fibre générique $T_\eta \longrightarrow \eta$ est géométriquement irréductible et que $h_\eta : T_\eta \to E_\eta$ est fidèlement plat, le morphisme étale $E_\eta \to \eta$ est géométriquement irréductible, donc un isomorphisme ; en particulier, les points fermés de E sont dans la fibre fermée E_s. Le morphisme $T_s \to E_s$ est fidèlement plat et T_s est connexe, l'espace discret E_s a donc un seul point, noté e ; comme c'est l'unique point fermé de E le morphisme canonique $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{E,e}) \longrightarrow E$ est un isomorphisme. Cela montre que le morphisme g est affine fidèlement plat et birationnel ; c'est un isomorphisme.

(ii) et (iii). Clair.

(iv) (Nous devons cet argument à M. Romagny). Notons $K = \kappa(\eta)$ le corps des fractions de A, et posons $P = \pi_0(T/S)$. Cet espace algébrique est étale et commute aux changements de base ; lorsque la base est le spectre d'un corps k, cet espace est le spectre de la clôture séparable de k dans l'anneau des sections globales du schéma. Comme $T_\eta \to \eta$ est géométriquement irréductible, K est algébriquement fermé dans $\Gamma(T_\eta)$, donc $P_\eta \simeq \operatorname{Spec}(K)$. Comme la fibre fermée $T_s \to s$ est isomorphe à $\operatorname{Spec}(\mathbf{C}[X]_X) \to \operatorname{Spec}(\mathbf{R})$ la fermeture algébrique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}[X]_X$ est égale à $\mathbf{C}$. Cela montre que P n'est pas un schéma. En effet, soit e l'unique point de P_s ; si P était un schéma étale sur le trait hensélien $S = \operatorname{Spec}(\mathbf{R}[[t]])$, le morphisme composé

$$\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{P,e}) \longrightarrow P \longrightarrow S$$

serait fini [EGA IV$_4$, 18.5.11, c')], donc libre ; ce qui est impossible puisque le rang générique est 1, et le rang spécial 2.

Comme me l'a montré L. Moret-Bailly le morphisme $\theta : \pi_0(T/S) \to \pi^s(T/S)$ de cet exemple n'est pas un isomorphisme local. Plus générallement,

7.3.3 Lemme. *Soient F un schéma et $\theta : E \to F$ un F-espace algébrique tel que le morphisme diagonal $E \to E \times_F E$ soit une immersion ouverte. Si θ est un isomorphisme local, E est un schéma.*

Démonstration. L'hypothèse signifie qu'il existe un schéma U et un morphisme étale surjectif $u : U \to E$ tel que le composé θu soit un isomorphisme local de schémas ; d'après cette dernière propriété, il existe un recouvrement de F par des ouverts $j : V \to F$ tels que les sections $V \to U$ de l'isomorphisme local θu recouvrent U. Pour chacune de ces sections, sa composée avec u est (représentable par) une immersion ouverte $V \to E$, comme on le voit par le diagramme suivant, où le carré est cartésien

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d] & V \times_F E \arrow[r, "j\times 1"] \arrow[d] & E \\ E \arrow[r, "\Delta_\theta"'] & E \times_F E & \end{tikzcd}$$

Enfin, puisque u est surjectif, ces immersions ouvertes $V \to E$ recouvrent E, lequel est donc un schéma. □

A Autres démonstations du théorème 4.1.1

Rappelons l'énoncé du théorème en question.

Soit $f : T \longrightarrow S$ un morphisme plat et de présentation finie de schémas. Soit $d : R \longrightarrow T \times_S T$ une immersion ouverte et fermée, graphe d'une relation d'équivalence dans T. Alors le faisceau fppf quotient T/R est représentable par un schéma E quasi-compact étale et séparé sur S. Le morphisme $R \to T \times_E T$ est un isomorphisme, i.e. la relation d'équivalence est effective. Enfin, le schéma quotient T/R est construit *comme un ouvert d'un schéma affine sur S.*

Notons que si $T \to S$ est un morphisme quasi-compact étale et séparé, et si on prend pour relation le morphisme diagonal lui-même $T \to T \times_S T$, on obtient directement le résultat bien connu que T est quasi-affine sur S. En admettant ce point, ainsi que l'effectivité des données de descente fpqc pour de tels schémas [SGA 1, IX, 4.1, p.182], L. Moret-Bailly propose une troisième démonstration, plus courte, de ce théorème ; elle est donnée en A.4.

Nous donnons ici une démonstration directe de ce théorème : elle n'utilise que les définitions et les propriétés les plus élémentaires des objets introduits, et pas les résultats profonds de M. Artin.

A.1 Notations et lemmes préliminaires

Par souci de référence, nous adoptons les conventions d'indices proposées par P. GABRIEL dans [SGA 3, V, §§1 à 3]. En particulier, les morphismes de projection entre produits, $p_k : T^n \longrightarrow T^{n-1}$ sont indexés de 0 à $n-1$, l'indice k désignant la composante *omise* ; ainsi, $p_0(x_0, x_1, x_2) = (x_1, x_2)$.

Mais, contrairement à GABRIEL, et en suivant un usage répandu, nous notons R et R' ce qu'il note T_1 et T_2.

Dans l'écriture des puissances d'un S-schémas, la lettre S en indice sera désormais omise.

Une relation d'équivalence dans un S-schéma T est la donnée d'un sous-schéma $d : R \to T^2$ tel que pour tout S-schéma Z l'ensemble $R(Z) = \mathrm{Hom}_S(Z, R)$ soit le graphe d'une relation d'équivalence dans $T(Z)$; le schéma $R \subset T^2$ représente les $(x, y) \in T^2(Z)$ qui sont équivalents (notation $x \sim y$). On détaille ces données et hypothèses en A.1.1, A.1.2 et A.1.3.

A.1.1. (Réflexivité) *Une relation d'équivalence sur T comporte une immersion $d : R \to T^2$, et un morphisme de S-schémas $s : T \to R$ qui factorisent le morphisme diagonal :*

$$d \circ s \;=\; \Delta_{T/S}.$$

A.1.2. (Symétrie) *L'automorphisme σ de permutation des facteurs de T^2 stabilise R.*

Pour énoncer ce qui correspond à la propriété de « transitivité », on introduit les morphismes $d_0 = p_0 d$, et $d_1 = p_1 d$: $R \rightrightarrows T$, ainsi que le schéma

$$R' \;=\; (R, d_0) \times_T (R, d_1)$$

Utilisant le fait que le carré suivant est cartésien

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "p'_0"] \arrow[d, "p'_2"'] & T^2 \arrow[d, "p_1"] \\ T^2 \arrow[r, "p_0"'] & T \end{tikzcd}$$

on peut écrire $R' \;=\; {p'_0}^{-1}(R) \cap {p'_2}^{-1}(R)$, et on dispose donc d'une immersion $d' : R' \longrightarrow T^3$ qui permet d'identifier R' à un sous-schéma de T^3 ; en notant d'_i les morphismes induits par les projections p'_i, on a alors $d'_0(x, y, z) = (y, z)$, $d'_1(x, y, z) = (x, z)$ et $d'_2(x, y, z) = (x, y)$; ainsi $R'(Z)$ s'identifie à l'ensemble des triplets (x, y, z) tels que $x \sim y$ et $y \sim z$; la *transitivité* se traduit donc par l'inclusion

A.1.3. ${p'_0}^{-1}(R) \cap {p'_2}^{-1}(R) \subset {p'_1}^{-1}(R)$.

Précisons que le symbole ${p'_i}^{-1}(R)$ désigne ici le sous-schéma $(R, d) \times_{T^2} (T^3, p'_i)$ de T^3, image réciproque de R par $p'_i : T^3 \to T^2$.

Le résultat suivant résume les propriétés générales qui seront utilisées..

A.1.4 Lemme. [SGA 3, V,1, p.257] *Soit R une relation d'équivalence dans le S-schéma T. Alors dans le diagramme*

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[r, shift left, "d'_1"] \arrow[r, shift right, "d'_0"'] \arrow[d, "d'_2"'] & R \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"] & T \\ R \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & T & \end{tikzcd}$$

la première ligne est exacte, et R' s'identifie au produit fibré $(R, d_0) \times_T (R, d_0)$; les deux carrés de gauche de même indice sont cartésiens. $\square$

A.1.5 Lemme. *Soit $f : T \longrightarrow S$ un S-schéma, et*

$$R \overset{d_1}{\underset{d_0}{\rightrightarrows}} T$$

une relation d'équivalence dans T dans la catégorie des S-schémas. Par le changement de base $T \longrightarrow S$, on obtient la relation d'équivalence dans $T \times T$ (dans la catégorie des schémas sur T, via p_0)

$$R \times T \overset{d_1 \times 1}{\underset{d_0 \times 1}{\rightrightarrows}} T \times T$$

Considérons R (resp. R') comme schéma sur T via d_0 (resp. via $d_0 d'_0 = d_0 d'_1$), et notons $d'' : R' \longrightarrow R \times T$ le morphisme de composantes d'_2 et $d_0 d'_0$. Alors, dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[r, shift left, "d'_1"] \arrow[r, shift right, "d'_0"'] \arrow[d, "d''"'] & R \arrow[d, "d"] \\ R \times T \arrow[r, shift left, "d_1 \times 1"] \arrow[r, shift right, "d_0 \times 1"'] & T \times T \end{tikzcd}$$

les deux carrés sont cartésiens. $\square$

A.2 Enveloppe affine

Soit $f : T \longrightarrow S$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé de schémas, de sorte que $f_\star(\mathcal{O}_T)$ est une $\mathcal{O}_S$ algèbre quasi-cohérente. L'*enveloppe affine* du S-schéma T est le schéma affine sur S

$$T^{\mathrm{aff}} = \mathrm{Spec}_S(f_\star(\mathcal{O}_T)),$$

muni de son morphisme canonique

$$i_T : T \longrightarrow T^{\mathrm{aff}}$$

Voir ([EGA I, 9.1.21], où T^{aff} est noté T^0). L'application $Z \mapsto i_T^{-1}(Z) = Z \times_{T^{\mathrm{aff}}} T$ établit une bijection entre les ensembles des sous-schémas ouverts et fermés de T^{aff} et de T (**??**),

$$i_T^\star : \mathsf{Of}(T) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Of}(T^{\mathrm{aff}}).$$

On étend cette construction aux relations d'équivalence :
Soit $d_0, d_1 : R \rightrightarrows T$ une relation d'équivalence dans le S-schéma T ; supposons que les morphismes canoniques $f : T \longrightarrow S$ et $g : R \longrightarrow S$ soient quasi-compacts et quasi-séparés ; les $\mathcal{O}_S$-algèbres $f_\star(\mathcal{O}_T)$ et $g_*(\mathcal{O}_R)$ sont donc quasi-cohérentes, ainsi que, par suite, l'algèbre

$$\mathcal{A} = \mathrm{Ker}(\ f_\star(\mathcal{O}_T) \rightrightarrows g_*(\mathcal{O}_R)\ ).$$

Introduisons le S-schéma

$$A = \mathrm{Spec}_S(\mathcal{A}).$$

Le morphisme canonique $\beta : A \to S$ est affine.

A.2.1 Lemme. *Le morphisme composé $\alpha : T \to T^{\mathrm{aff}} \to A$ est schématiquement dominant, i.e. l'application $\mathcal{O}_A \longrightarrow \alpha_\star(\mathcal{O}_T)$ est injective.*

Démonstration. En effet, l'image directe de cette application par le morphisme $\beta : A \longrightarrow S$ est l'application

$$\beta_\star(\mathcal{O}_A) = \mathcal{A} \longrightarrow \beta_\star\alpha_\star(\mathcal{O}_T) = f_\star(\mathcal{O}_T),$$

laquelle est injective par définition, et le morphisme β est affine. $\square$

A.2.2 Lemme. *La suite de morphismes* $R \overset{d_1}{\underset{d_0}{\rightrightarrows}} T \xrightarrow{\alpha} A$ *induit, par image réciproque, une suite exacte d'ensembles*

$$\mathsf{Of}(A) \ \to\ \mathsf{Of}(T) \ \rightrightarrows\ \mathsf{Of}(R).$$

Autrement dit, si W est un sous-schéma ouvert et fermé de T tel que $d_0^{-1}(W) = d_1^{-1}(W)$, alors, il existe un unique sous-schéma ouvert et fermé V dans A tel que $\alpha^{-1}(V) = W$.

Démonstration. Reprenons la suite exacte de $\mathcal{O}_S$-algèbres quasi-cohérentes

$$\mathcal{A} \longrightarrow f_\star(\mathcal{O}_T) \rightrightarrows g_*(\mathcal{O}_R)\ .$$

Passant aux spectres, on obtient la suite de S-schémas affines

$$A \longleftarrow T^{\mathrm{aff}} \leftleftarrows R^{\mathrm{aff}}$$

Cette suite n'est pas toujours exacte mais elle induit sur les ensembles d'ouverts fermés une suite exacte puisque les ouverts fermés de $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ correspondent aux idempotents de $\Gamma(S, \mathcal{A})$. Pour conclure la démonstration, il suffit d'utiliser l'isomorphisme $\mathsf{Of}(T) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Of}(T^{\mathrm{aff}})$. $\square$

A.3 Démonstration du théorème 4.1.1

On suppose dans la suite que $f : T \longrightarrow S$ est un morphisme plat de présentation finie ; il est donc, en particulier, quasi-compact et quasi-séparé ([EGA I, 6.3.7]). On considère le graphe d'une relation d'équivalence dans T

$$d : R \longrightarrow T \times_S T,$$

telle que d soit une immersion ouverte et fermée.

Comme plus haut, le schéma de base S sera sous-entendu dans l'écriture des produits fibrés de S-schémas.

Notons F le faisceau fppf quotient de d_0, d_1 et considérons le diagramme commutatif de faisceaux

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] \arrow[d, "i_R"'] & T \arrow[r, "p"] \arrow[d, "i_T"'] \arrow[dr, "\alpha"] & F \arrow[d, dashed, "j"] \\
R^{\mathrm{aff}} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & T^{\mathrm{aff}} \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

La ligne du haut est exacte par définition du quotient F, alors que celle du bas ne l'est en général pas ; mais on dispose cependant d'un morphisme de faisceaux $j : F \longrightarrow A$. On va montrer que sous les hypothèses du théorème, ce morphisme j est représentable par une immersion ouverte ; cela entraînera que F est (représentable par) un schéma, et que ce schéma est quasi-affine sur S.

Par le changement de base $T \longrightarrow S$, on obtient la relation d'équivalence de T-schémas sur $T \times T$

$$\begin{tikzcd}
R \times T \arrow[r, shift left, "d_1 \times 1"] \arrow[r, shift right, "d_0 \times 1"'] & T \times T
\end{tikzcd}$$

Son enveloppe affine (sur T) est $\alpha \times 1 : T \times T \longrightarrow A \times T$, puisque T est plat sur S (1.1.4).

Le diagramme suivant illustre les données relatives à la relation R, et à α ; le carré de droite est cartésien, ainsi que les carrés de gauche de même indice.

Le morphisme composé $R \xrightarrow{d} T \times T \xrightarrow{\alpha \times 1} A \times T \to T$ est égal à d_0.

$(\star)$

$$\begin{tikzcd}
R' \arrow[r, shift left, "d'_1"] \arrow[r, shift right, "d'_0"'] \arrow[d, "d''"'] & R \arrow[d, "d"] & \\
R \times T \arrow[r, shift left, "d_1 \times 1"] \arrow[r, shift right, "d_0 \times 1"'] \arrow[d] & T \times T \arrow[r, "\alpha \times 1"'] \arrow[d] & A \times T \arrow[d] \\
R \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & T \arrow[r, "\alpha"'] & A
\end{tikzcd}$$

Considérons l'immersion ouverte et fermée $d : R \to T \times T$; ses images réciproques par $d_0 \times 1$ et par $d_1 \times 1$ sont égales à d'' puisque les deux carrés à gauche sont cartésiens. D'après le lemme A.2.2, il existe donc une immersion ouverte et fermée $\delta : V \to A \times T$ dont l'image réciproque par $\alpha \times 1$ est égale à d ; elle donne lieu au carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "v"] \arrow[d, "d"'] & V \arrow[d, "\delta"] \\
T \times T \arrow[r, "\alpha \times 1"'] & A \times T
\end{tikzcd}$$

où le morphisme v est schématiquement dominant, tout comme $\alpha \times 1$.

Considérons le diagramme obtenu en composant les morphisme verticaux composables de $(\star)$:

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[r, shift left, "d'_1"] \arrow[r, shift right, "d'_0"'] \arrow[d, "d'_2"'] & R \arrow[r, "v"] \arrow[d, "d_1"] & V \arrow[d, "\varphi"] \\ R \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & T \arrow[r, "\alpha"'] & A \end{tikzcd}$$

où φ est le morphisme composé $V \xrightarrow{\delta} A \times T \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} A$; les trois carrés sont cartésiens. Puisque φ est plat et de présentation finie son image est un ouvert ; ce morphisme se factorise donc en $V \xrightarrow{\psi} U \xrightarrow{\iota} A$, où ψ est fidèlement plat de présentation finie et où ι est une immersion ouverte. Comme d_1 est surjectif, le morphisme α se factorise lui aussi par ι, soit $\alpha = \iota u$; on obtient finalement le diagramme

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[r, shift left, "d'_1"] \arrow[r, shift right, "d'_0"'] \arrow[d, "d'_2"'] & R \arrow[r, "v"] \arrow[d, "d_1"] & V \arrow[d, "\psi"] \\ R \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & T \arrow[r, "u"'] & U \end{tikzcd}$$

Il s'agit de montrer que $u : T \to U$ représente le quotient T/R. Or, ψ est un morphisme fppf, et les trois carrés du diagramme sont cartésiens (pour le carré de droite, $\{\psi v, ud_1\}$, il faut se souvenir que $\{\iota\psi v, \iota ud_1\} = \{\varphi v, \alpha d_1\}$ est cartésien, et que ι est un monomorphisme !). Il suffit donc de montrer que $v : R \to V$ représente le quotient pour la ligne du haut. Or, le lemme A.1.4 montre que ce quotient est donné par $d_0 : R \to T$; le morphisme v se factorise donc en $R \xrightarrow{d_0} T \xrightarrow{w} V$, et il reste à voir que w est un isomorphisme.
On a signalé plus haut que v est schématiquement dominant ; cela implique que w l'est aussi. Par ailleurs, Le morphisme $w : T \to V$ est une section du morphisme composé $V \to A \times T \to T$, lequel est séparé puisque $\delta : V \to A \times T$ est une immersion et que $A \times T \to T$ est affine ; w est donc une immersion fermée. Mais une immersion fermée schématiquement dominante est un isomorphisme. $\square$

A.4 Troisième démonstration du théorème 4.1.1, par L. Moret-Bailly

Pour un schéma X sur un corps k, on définit le *nombre géométrique de composantes connexes* de X, $n'(X)$ comme le nombre de composantes connexes de $X \otimes_k \Omega$ pour une (quelconque) extension algébriquement close Ω de k [EGA IV$_2$, 4.5].

A.4.1 Lemme. *Soit $f : T \to S$ un morphisme surjectif de présentation finie, avec S quasi-compact. Le nombre géométrique de composantes connexes des fibres $T_s = f^{-1}(s)$, pour s parcourant S, est une famille bornée, i.e. $m(f) = \max(n'(T_s), s \in S)$ est fini.*

Démonstration. On peut supposer que S est affine, puis que f provient, par un changement de base $S \to S_0$, d'un morphisme $f_0 : T_0 \to S_0$ où S_0 est noethérien et f_0 de type fini ; on aura alors $m(f) \leq m(f_0)$; on peut donc supposer que S est affine et noethérien. En vertu de [EGA IV$_3$, 9.7.8], pour tout $s \in S$, il existe un ouvert U contenant s tel que pour tout $s' \in U \cap \bar{s}$, on ait $n'(T_{s'}) = n'(T_s)$. Un raisonnement classique par récurrence noethérienne permet alors de construire une partition finie (S_α) de S par des sous-schémas localement fermés de S, telle que les applications $s \mapsto n'(T_s)$ soient constantes sur chaque S_α ; pour plus de détails, voir [EGA I, $\mathrm{O_I}$, 2.5.2]. □

On reprend dans la suite les hypothèses du théorème 4.1.1 ; en particulier, $f : T \to S$ est un morphisme plat de présentation finie. On raisonne par récurrence sur $m(f)$.

A.4.2 Lemme. *Si $m(f) = 1$, alors le quotient T/R est isomorphe à S.*

Démonstration. Les fibres de $T \times_S T \to T$ sont géométriquement connexes, et rencontrent R puisque la relation d'équivalence contient la diagonale ; mais R est un ouvert fermé de $T \times_S T$, donc $R = T \times_S T$; comme f est fidèlement plat quasi compact, la suite $T \times_S T \rightrightarrows T \longrightarrow S$ est exacte, i.e. on a $T/R = S$. □

A.4.3. Supposons que f admette une section $g : S \to T$. Le saturé de g est un ouvert fermé U de T, puisqu'il est défini par le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr] \arrow[d] & & R \arrow[d, "d"] \\ T \arrow[r, equal] & S \times_S T \arrow[r, "g\times 1"'] & T \times_S T \end{tikzcd}$$

Notons V l'ouvert fermé complémentaire, de sorte que $T = U \sqcup V$. Notons R_U et R_V les relations induites par R sur U et V respectivement. On vérifie formellement que $R_U = U \times_S U$ et donc que le quotient U/R_U est isomorphe à S. D'autre part, chacune des fibres T_s rencontre U puisque U contient la section g ; on en déduit l'inégalité stricte $m(V \to S) < m(T \to S)$. L'hypothèse de récurrence entraîne que le quotient V/R_V est un schéma étale et séparé sur S, et on peut conclure que $T/R = U/R_U \sqcup V/R_V$ est lui aussi un schéma étale et séparé sur S.

A.4.4. Cas général. On utilise *l'universalité* des faisceaux T/R sur Sch_S, ce qui signifie ceci : pour un morphisme $S' \to S$, le faisceau sur $\mathsf{Sch}_{S'}$ déduit de T/R par image réciproque est isomorphe au faisceau $S' \times_S T/S' \times_S R$; il est, en particulier, canoniquement muni d'une donnée de descente relative $S' \to S$.

Appliquons au problème initial sur S, le changement de base $T \to S$; au-dessus de T le morphisme f acquiert une section ; d'après le point précédent, le faisceau devient donc représentable par un schéma étale et séparé sur T, donc quasi-affine sur T, et ce schéma est muni d'une donnée de descente relative à $T \to S$. Mais d'après ([SGA 1, IX, 4.1, p.182]), une donnée de descente sur un tel schéma est effective, autrement dit, le schéma en question provient de S. □

Références

[Art86] M. Artin, Néron Models, in Arithmetic Geometry (G. Cornell and J. Silverman, eds.),Springer-Verlag (1986).

[BLR90] S. Bosch, W. Lütkebhomert, M. Raynaud, *Néron Models*, Ergebnisse der Math. (3), vol. 21, Springer-Verlag, (1990).

[DG] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson (1970).

[FAG] B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, S. L. Kleiman, N. Nitsure, A. Vistoli, *Fundamental Algebraic Geometry*, Math. Surveys, vol.123, AMS, (2005).

[Fév69] P. Février, Propriétés de l'anneau $K \otimes_k K$ pour une extension de corps $k \to K$, *Mémoire de DEA, Université de Paris VI* (non publié), (1969).

[Knu71] D. Knutson, *Algebraic Spaces*, LNM vol. 203, Springer-Verlag (1971).

[Laz79] M. Lazarus, Fermeture intégrale et changement de base, *C. R. Acad. Sc. Paris*, T. 289, (9 juillet 1979).

[LMB] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Springer-Verlag (2000).

[Ray67] M. Raynaud, Passage au quotient par une relation d'équivalence plate, *pp.78-85* in *: Proc.Conf.Local Fields (Driebergen) (éd T.A. Springer)*, (1967).

[Ray70] M. Raynaud, *Anneaux henséliens*, LNM 169, Springer, (1970).

[Rom11] M. Romagny, Composantes connexes et irréductibles en familles, *Manuscripta math.* **136**, 1-32, (2011).

[Sza] T. Szamuely, *Galois Groups and Fundamental Groups*, Cambridge Uni. Press(2009)

Sigles

[A] N. Bourbaki, *Algèbre, ch. 4 à 7.* Masson, (1981). Translated into English as *Algebra II.* Springer, (2003).

[AC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative.* Translated into English as *Commutative Algebra*, chap. 1–7. Springer, (1989).

[TG] N. Bourbaki, *Topologie générale*, chap. 1 à 4, Masson, (1990).

[EGA I] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique I*, Grundleheren Math. Wiss., vol. 166, Springer-Verlag (1971).

[EGA II] A. Grothendieck, J. Dieudonné *Éléments de Géométrie algébrique, II : Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Publ. Math. IHÉS no 8 (1961).

[EGA III] A. Grothendieck, J. Dieudonné *Éléments de Géométrie algébrique, III : Étude cohomologique des faisceaux cohérents*, Publ. Math. IHÉS no 11 (1961) et 17 (1963).

[EGA IV_1] A. Grothendieck, J. Dieudonné *Éléments de Géométrie algébrique* Publ. Math. IHÉS no. 20, (1964).

[EGA IV_2] A. Grothendieck, J. Dieudonné *Éléments de Géométrie algébrique* Publ. Math. IHÉS no. 24, (1965).

[EGA IV_3] A. Grothendieck, J. Dieudonné *Éléments de Géométrie algébrique* Publ. Math. IHÉS no. 28, (1966).

[EGA IV_4] A. Grothendieck, J. Dieudonné *Éléments de Géométrie algébrique* Publ. Math. IHÉS no. 32, (1967).

[SGA 1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Documents mathématiques n^o 3, Soc. Math. France (2003).

[SGA 3] M. Demazure, A. Grothendieck, *Schémas en groupes*, Documents mathématiques n^o 7, Soc. Math. France, (2011).

[SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (vol. II), Lect. Notes in Math. vol. 270, Springer-Verlag (1972).

Sorbonne Université
Institut Mathématique de Jussieu
IMJ-PRG, Case 247
4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

daniel.ferrand@imj-prg.fr