GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Courbes gauches et fibrés de rang* 2.
Note (*) de M. **Daniel Ferrand**, transmise par M. Jean-Pierre Serre.

En prolongeant des idées de Serre, on montre que l'ensemble des points rationnels d'une courbe localement intersection complète dans $\mathbf{P}_k^3$ est égal à l'ensemble des zéros d'une section d'un fibré vectoriel de rang 2.

ÉNONCÉS. — Soit $P = P_k^3$ l'espace projectif de dimension 3 sur un corps algébriquement clos k. Une courbe X de P, c'est-à-dire un sous-schéma fermé de dimension 1 de P, est dite *intersection complète* (de deux surfaces de degré d et d'), si son faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ admet comme résolution gauche le complexe de Koszul :

$$0 \to \mathcal{O}_P(-d-d') \to \mathcal{O}_P(-d) \oplus \mathcal{O}_P(-d') \to \mathcal{O}_P.$$

Plus généralement, on dit que X est le *schéma des zéros d'une section d'un fibré vectoriel* E de rang 2 s'il existe une application linéaire $E \to \mathcal{O}_P$ telle que le complexe de Koszul associé $0 \to \Lambda^2 E \to E \to \mathcal{O}_P$ soit une résolution gauche de $\mathcal{O}_X$. Pour que X soit intersection complète, il faut et il suffit alors que le fibré soit *décomposable.*

On ignore s'il existe des courbes lisses connexes de P qui ne sont pas ensemblistement intersection complète; les résultats qui suivent réduisent ce problème à l'étude des fibrés de rang 2 de P.

PROPOSITION 1. — *Soit* X *une courbe localement intersection complète dans* P *définie par l'idéal* I *de* $\mathcal{O}_P$. *Il existe une courbe* Y *de* P, *contenant* X, *qui est le schéma des zéros d'une section d'un fibré de rang* 2, *et dont l'idéal* J *est tel que* Ann (I/J) = I.

En particulier, on a $I^2 \subset J \subset I$, donc X est ensemblistement le schéma des zéros d'une section d'un fibré de rang 2.

L'idée d'imposer la condition Ann (I/J) = I provient de la théorie de la liaison de Peskine et Szpiro ([1]) : la courbe X est « liée à elle-même » par Y; ils ont remarqué, d'autre part, que la même méthode appliquée au cas affine conduit à un résultat plus fort : toute courbe localement intersection complète de l'espace affine de dimension 3 $\mathbf{A}_k^3$ est ensemblistement intersection complète. On sait, en effet, que les fibrés de $\mathbf{A}_k^3$ sont décomposables.

La proposition 1 est conséquence du résultat plus précis suivant.

PROPOSITION 2. — *Soit* X *une courbe de Cohen-Macaulay, de faisceau dualisant* ω_X, *définie par l'idéal* I *de* $\mathcal{O}_P$. *Soient* $n \in \mathbf{Z}$ *et* $u : I \to \omega_X(n)$ *une application linéaire surjective telle que l'application*

$$H^1(P, I(-n)) \to H^1(X, \omega_X)$$

soit nulle. Alors la courbe Y *de* P *définie par l'idéal* J = Ker (u) *est le schéma des zéros d'une section d'un fibré de rang* 2, ω_Y *est isomorphe à* $\mathcal{O}_Y(-n)$ *et* Ann (I/J) = I.

Si X est « de première espèce », c'est-à-dire si le cône projetant de X dans P est de Cohen-Macaulay, alors $H^1(P, I(m)) = 0$ pour tout $m \in \mathbf{Z}$; la condition imposée à u est alors automatiquement vérifiée.

Démonstration. — Ces énoncés sont des prolongements naturels des idées de Serre dans ce domaine; en effet, la démonstration repose sur les trois résultats suivants :

PROPOSITION 3. — *Soit* Y *une courbe de Cohen-Macaulay dans* P. *Pour que* Y *soit le schéma des zéros d'une section d'un fibré de rang* 2, *il faut et il suffit que* $\mathcal{O}_Y$ *soit isomorphe à* $\omega_Y(m)$ *pour un entier* $m \in \mathbf{Z}$ ([2]).

PROPOSITION 4. — *Soit* E *un fibré de rang* $\geqq 2$ *sur une courbe* X. *Si* E *est engendré par ses sections, il existe une section* $\mathcal{O}_X \to E$ *partout non nulle* ([3]).

On utilisera aussi la variante suivante du théorème de dualité :

PROPOSITION 5. — *Soit* X *une courbe de Cohen-Macaulay, propre sur un corps* k. *On désigne par* ω_X *le faisceau dualisant de* X *et par* $A = H^0(X, \mathcal{O}_X)$ *son anneau des sections globales. Pour tout* $\mathcal{O}_X$*-module cohérent* F, *l'application*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}X}(F, \omega_X) \to \mathrm{Hom}_A(H^1(F), H^1(\omega_X))$$

définie par $f \mapsto H^1(f)$ *est bijective* ([4]).

Montrons comment déduire la proposition 1 de la proposition 2 : comme X est supposée localement intersection complète, le module conormal $N_{X/P} = I/I^2$ est localement libre de rang 2 et le module dualisant est inversible. Pour un entier n assez grand, le fibré de rang 2 $\mathcal{H}om(N_{X/P}, \omega_X)(n)$ est engendré par ses sections et $H^1(P, I(-n)) = 0$. D'après la proposition 4, il existe une application linéaire surjective $I/I^2 \to \omega_X(n)$ à laquelle on peut associer par le procédé de la proposition 2 une courbe Y; cette courbe a les propriétés requises puisque $H^1(P, I(-n)) = 0$.

Démontrons la proposition 2. — Par définition de Y, l'application

$$v = u \otimes \mathrm{I}d_{\mathcal{O}_P(-n)} : I(-n) \to \omega_X$$

s'insère dans le diagramme suivant, dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & I(-n) & \to & \mathcal{O}_P(-n) & \to & \mathcal{O}_X(-n) & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \omega_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_Y(-n) & \to & \mathcal{O}_X(-n) & \to & 0
\end{array}$$

La suite exacte de cohomologie et la nullité de $H^1(v)$ permettent de déduire du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
H^0(\mathcal{O}_X(-n)) & \to & H^1(I(-n)) & & \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle H^1(v)} & & \\
H^0(\mathcal{O}_X(-n)) & \longrightarrow & H^1(\omega_X) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_Y(-n))
\end{array}$$

que l'application $H^1(\omega_X) \to H^1(\mathcal{O}_Y(-n))$ est injective; en utilisant l'exactitude du foncteur $\mathrm{Hom}_B(., H^1(\omega_Y))$, où $B = H^0(\mathcal{O}_Y)$, et le théorème de dualité, on voit que l'application

$$w : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y(-n), \omega_Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\omega_X, \omega_Y)$$

déduite de l'injection $\omega_X \to \mathcal{O}_Y(-n)$ est surjective.

Introduisons le foncteur $E \mapsto E' = \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_P}(E, \mathcal{O}_P(n-4))$. Il est exact sur la catégorie des $\mathcal{O}_P$-modules cohérents de Cohen-Macaulay de dimension 1, et réflexif sur cette catégorie, i. e. pour tout tel module E, on a un isomorphisme $c_E : E \to E''$ fonctoriel en E; de plus, $\mathcal{O}'_X = \omega_X(n)$.

Pour simplifier l'écriture, posons $R = \mathcal{O}_X$ et $S = \mathcal{O}_Y$.

Soit $0 \to R' \xrightarrow{j} S \xrightarrow{p} R \to 0$ l'extension de $\mathcal{O}_P$-algèbres de R par R' qui définit S.

On déduit de la surjectivité de w, par tensorisation par S (n) et application du foncteur précédent que l'application $\mathrm{Hom}_S(S, S') \to \mathrm{Hom}_S(S, R)$ est surjective. En particulier, il existe une application $f : S \to S'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[d, "\wr"', "c_R"] \\ S' \arrow[r, "j'"] & R'' \end{tikzcd}$$

Il s'agit de voir que f est un isomorphisme (5). Or, on a

$$p' = p'(c_R)' c_{R'} = f' j'' c_{R'} = f' c_S j;$$

comme $f' c_S$ est S-linéaire, $\mathrm{Ker}(j') = \mathrm{Im}(p')$ est contenu dans $\bar{J}S'$, où $\bar{J} = I/J = \mathrm{Ker}(p)$; l'inclusion opposée est claire, donc j' induit un isomorphisme $R \otimes_S S' \xrightarrow{\sim} R''$, si bien que f est égal « modulo $\bar{J}$ » à l'isomorphisme c_R; comme $\bar{J}^2 = 0$, on voit que f est surjectif, donc que S' est un S-module monogène; comme $S \to \mathcal{E}nd_S(S')$ est un isomorphisme, f est bijectif.

Le fait que les idéaux $\mathrm{Ann}(\bar{J})$ et $\bar{J}$ soient égaux se vérifie facilement en identifiant le premier à $\mathcal{H}om_S(R, S)$, le second à R' (*via* j), et en tenant compte de l'isomorphisme $\mathcal{H}om_S(R, S') \xrightarrow{\sim} R'$.

(*) Séance du 7 juillet 1975.

(1) C. PESKINE et L. SZPIRO, *Inventiones Math.*, 26, 1974, p. 271-302.

(2) J.-P. SERRE, *Sur les modules projectifs* (*Séminaire Dubreil-Pisot*, n° 2. 1960/1961).

(3) Pour une démonstration, *voir*, par exemple D. MUMFORD, *Annals of Mathematics Studies n° 59*, Princeton University Press, 1966, p. 148.

(4) L'exposé du théorème de dualité le mieux adapté à la suite, est celui donné par A. ALTMAN et S. KLEIMAN, *Introduction to Grothendieck duality theory* (*Lecture Notes in Mathematics*, n° 146, Springer-Verlag, 1970).

(5) Un résultat analogue a été démontré par d'autres méthodes par R. FOSSUM, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 40, 1973, p. 395-400.

Équipe de Recherches associée au C. N. R. S., n° 451,
Université de Rennes,
avenue du Général-Leclerc,
B. P. n° 25 A
35031 *Rennes Cedex.*