Séance 2

Estimées de type Alexandrov pour les équations elliptiques.

Alexandrov 1958
Alexandrov 1960.
Bakelman 1961.
Pucci 1966.
Krylov 1976 (parabolique)
sont cités { Alexandrov 1963. Bakelman 1965 - 1970.
Krylov-Safonov 1979 1980 (Harnack)

Gilbarg-Trudinger 1983 (2nd ed)
Caffarelli 1989.
Caffarelli - Cabré 1995.

I – Alexandrov, Bakelman, Pucci.

(Cité par Caffarelli 1989).

1°) Alexandrov –

1958 : problème de Dirichlet pour l'équation de Monge-Ampère :

$$\det(D^2u) = \varphi(x, u, \nabla u)$$

1960 : unicité pour le problème de Dirichlet

$$\mathrm{Tr}(A D^2 u) = \varphi \text{ dans } G.$$

(apparition de l'enveloppe convexe)

(une estimée – cte).

(traite aussi : $\mathrm{Tr}(A D^2 u) + b.\nabla u + cu = 0$)

1963 : unicité et estimées pour la solution du problème de Dirichlet.

2°). Bakelman

1961 – Cadre quasi-linéaire. $D \subset \mathbb{R}^n$ borné.

$$\mathrm{Tr}(A(x, u, Du) D^2 u) = E(x, u, Du) \text{ dans } D$$

Dans la revue mathsinet apparaît l'estimée d'Aleksandrov,

$$\sup_{|D|} u \leq \frac{C}{\alpha_0} \|f\|_{L^n(D)}$$

pour $\begin{cases} Tr(AD^2u) = f. \\ u \equiv 0 \text{ au bord} \end{cases}$ avec $A(x) \geq \alpha_0 I$ (constante)

3°). <u>Pucci 1966</u>

Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^m$.

- $Tr(AD^2u) = f$ p.p. dans Ω.
  A uniformément elliptique
  $u \in H^{2,m}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, $f \in L^m(\Omega)$

  $\hookrightarrow |u(x)| \leq g(x) \|f\|_{L^m(\Omega)}$

  $g \geq 0$, bornée, s'annule quand $x \to \partial(\text{co}\,\Omega)$
  où $\text{co}\,\Omega$ = enveloppe convexe de Ω.

- Traite aussi $Tr(AD^2u) + b.\nabla u + cu$
  avec, $b, c \in L^m$ et $c \leq 0$.

II. Gilbarg et Trudinger

livre : " Elliptic PDEs of second order " – (2ème édition de 1983).

Chapitre 9 : Solutions fortes.

Opérateurs linéaires $L = \mathrm{Tr}(AD^2u) + b.\nabla u + cu$

Équation : $Lu = f$.

$\mathcal{D} = \det A$ et $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^{1/n}$.

Hypothèses : $0 \leq \lambda \leq \mathcal{D}^* \leq \Lambda$.

$$\boxed{\frac{|b|}{\mathcal{D}^*}, \frac{f}{\mathcal{D}^*} \in L^n(\Omega), \ c \leq 0 \text{ dans } \Omega.}$$

Théorème 9.1 (Alexandrov 1960-1968)

Ω domaine borné.

On considère $u \in W^{2,d}_{loc}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.

et on suppose que $Lu \geq f$ dans Ω p.p.

Alors : $\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \, \|f/\mathcal{D}^*\|_{L^d(\Omega)}$

où $C = C(d, \operatorname{diam} \Omega, \|b/\mathcal{D}^*\|_{L^n(\Omega)})$.

Par approximation, il suffit de le montrer pour $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. (car l'équation est linéaire).

<u>Lemme-clé</u> : (Lemme 9.2)

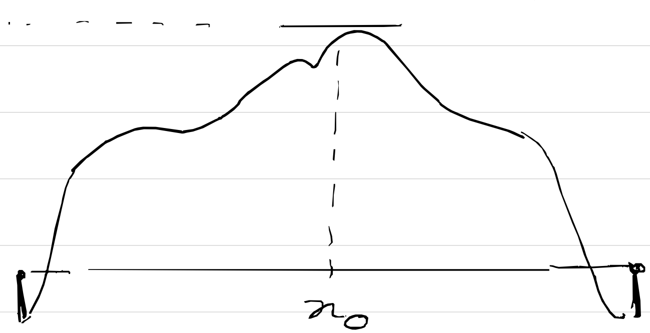
Pour $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, Ω borné,

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u + \frac{\operatorname{diam} \Omega}{|B_1|^{1/d}} \left(\int_{\Gamma^+} |\det D^2 u| \right)^{1/d}$$

où $\Gamma^+ = \{ y \in \Omega \mid \exists p \mid \forall x \in \Omega,\ u(x) \leq u(y) + p.(y-x) \}$

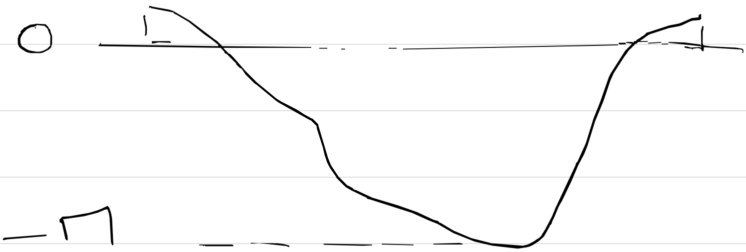
[On considère $v = u - \sup_{\partial\Omega} u \leq 0$ sur $\partial\Omega$

M



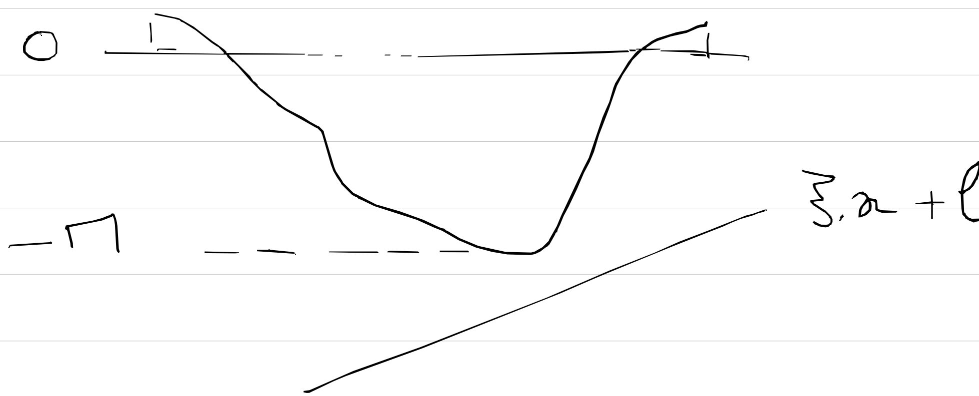
On renverse la figure, $w = -v$.

Sans perte de généralité, on suppose $M > 0$.



w^{**} = enveloppe convexe de w.
= plus grande fonction convexe W définie sur Ω et plus petite que w en tout point de Ω.

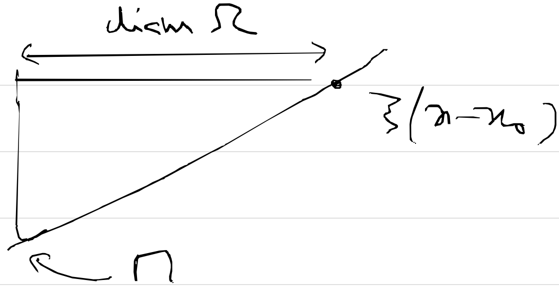
$\boxed{\text{Pour tout } \xi \in B_{M/\mathrm{diam}},\ \text{il existe } x \in \Omega \text{ tq } \xi = Dw(x) = Dw^{**}(x).}$



d'abord $\ell = -\infty$ puis on augmente ℓ

Affirmation : $\boxed{\text{le point de contact n'est pas au bord de } \Omega.}$

Si le contact a lieu au bord, alors:



Il existe $x_1 \in \Omega$ tq $-M = u(x_1)$.

$0 > -M \geq \xi\cdot(x_1-x_0)$ donc $|\xi\cdot(x_1-x_0)| \geq M$.

donc $|\xi|\,\mathrm{diam}\,\Omega \geq M$ = contradiction.

$$\text{donc } B_{\frac{M}{\mathrm{diam}\,\Omega}} \subset Du(\Gamma^-)$$

où $\boxed{\Gamma^- = \text{ensemble de contact}}$

Donc
$$|B_1|^{1/d}\,\frac{M}{\mathrm{diam}\,\Omega} \leq |Du(\Gamma_u)|^{1/d} \leq \left(\int_{\Gamma^-}|\det D^2u|\right)^{1/d}$$

par la <u>formule de l'aire</u>,
appliquée à $T = Du : \Omega \to \mathbb{R}^d$.
qui est bien lipschitzienne si $u \in C^2(\Omega)$

. Pour traiter les termes d'ordre 1 ($b \cdot \nabla u$), on peut choisir d'intégrer une fonction $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ bien choisie :

$$\boxed{\int_{B_{\frac{\Omega}{\text{diam}}}} g(p)\,dp \leq \int_{\Gamma^-} g(\nabla u) \det D^2 u \, dx.}$$

avec $g(p) = \dfrac{1}{\left(|p|^{1-\frac{1}{d}} + \mu^{1-\frac{1}{d}}\right)^{d-1}}$

(Idée d'Alexandrov 1960) —

avec $\mu = \| f/\mathcal{D}^* \|_{L^n(\Gamma^-)}$. (si $f \neq 0$)

Voir [GT] pour les détails.

Formule de l'aire. Ω = ouvert borné.

Soit $T : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ lipschitz.
Alors T est diff p.p. et pour $A \subset B$ avec T différentiable en tout point de A, on a :

$$|T(A)| \leq \int_A |\det DT|$$

Federer (Thm 3.2.3, p 243)

Rem 1 : on ne prend pas en compte la multiplicité.

Rem 2 : on se ramène à $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^d$ en étendant T de façon lipschitzienne.

$$\tilde{T}_i(x) = \inf_{y \in \overline{\Omega}} \{ T_i(y) + L|y-x| \}$$

$L >$ constante de lipschitz de T_i.

Si $x \in \Omega$, alors infimum atteint en $y = x$; sinon :

$T_i(y) + L|y-x| < T_i(x)$, impossible.

III - Inégalité de Harnack pour les équations elliptiques complètement non-linéaires.

Equations elliptiques complètement nonlinéaires.

ex : $\sup_{\alpha} \inf_{\beta} \left(-\mathrm{Tr}(A_{\alpha\beta} D^2 u) + c_{\alpha\beta} \right) = f$

Processus de diffusion.

$$\partial_t u - \mathrm{Tr}(A(x) D^2 u) = f(x)$$

avec A uniformément elliptique.

Opérateurs de Pucci : pour $X \in S_d(\mathbb{R})$,

$$M^+(X) = \sup_{A \in \Sigma(\lambda, \Lambda)} \left(-\mathrm{Tr}(AX) \right)$$

où $\Sigma(\lambda, \Lambda) = \{ A \in S_d(\mathbb{R}), \lambda|\xi|^2 \leq A\xi.\xi \leq \Lambda|\xi|^2 \}$

$$M^-(X) = \inf_{A \in \Sigma(\lambda, \Lambda)} \left(-\mathrm{Tr}(AX) \right)$$

Caffarelli 1989.

$S^*(f) = \{ u : B_1 \to \mathbb{R},\ \mathcal{M}^+(D^2u) \geq -|f|(x)$
et $\mathcal{M}^-(D^2u) \leq |f|(x) \}$

au sens des solutions de viscosité.

<u>Théorème</u> (Krylov-Safonov 1979)

Pour $u \in S^*(f)$ dans B_1 tq $u \geq 0$ dans B_1, et $f \in C_0(B_1)$ et borné dans B_1,

$$\sup_{B_{1/2}} u \leq C \left(\inf_{B_{1/2}} u + \|f\|_{L^d(B_1)} \right)$$

avec $C = C(d, \lambda, \Lambda)$

<u>Repose sur l'estimée d'Aleksandrov</u>

ABP

$u \geq 0$ tq $\mathcal{M}^+(D^2u) \geq -|f|$ dans B_R
et f continue bornée sur B_R.
$u \in C^0(\overline{B_R})$ et $u \geq 0$ sur ∂B_R. Alors :

$$\sup_{B_R} u^- \leq CR\, \|f_+\|_{L^d(\Gamma_u)}$$

où Γ_u = ens de contact "après extension".

Importance de l'ensemble de contact pour le cas elliptique complètement non-linéaire.

Cabré 1997 (Cabré 1995)

Harnack sur les variétés
(Estimée ABP, amélioration de la constante universelle de l'inégalité).

Hypothèse géom : courbure sectionnelle positive.

Les hyperplans $\xi \cdot x$ sont remplacés par des paraboloïdes :

$$\varphi(x) = \frac{c}{2}|x - x_0|^2$$

(Savin 2007)

Imbert–Silvestre (2016)

$\varphi(x) = c|x - x_0|^{1/2}$ pour obtenir aussi une inégalité de Harnack.

(Schwab–Silvestre 2016
Silvestre 2014. Upper bounds...)