Séance #1. Max

- Panorama d'inégalités fonctionnelles et géométriques.
- Problèmes ouverts.

Inégalité isopérimétrique sur $\mathbb{R}^d$

- Ω, ouvert borné lisse :

$$\boxed{\frac{Per(\Omega)}{|\Omega|^{\frac{d-1}{d}}} \geq \frac{Per(B_1)}{|B_1|^{\frac{d-1}{d}}}}$$

$=$ ssi Ω est une boule.

- **Preuve** (Cabré, Ros-Oton, Serra)

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{Per\,\Omega}{|\Omega|} & \text{dans } \Omega. \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 1 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Lemme : $\Gamma_u = \{x \mid \forall y \in \overline{\Omega}, u(y) \geq u(x) + \nabla u(x).(y-x)\}$

$B(0,1) \subset \nabla u(\Gamma_u)$.

[$p \in \mathbb{R}^d$ / $|p| < 1$.

$x \in \overline{\Omega}$, $\min (u(y) - p.y) = u(x) - p.x$

Si $x \in \partial\Omega$, $\frac{\partial}{\partial n}(u(y) - p.y)\Big|_{y=x} \leq 0$

donc $\frac{\partial u}{\partial n}(x) \leq p.n < 1$. ↯

Donc $x \in \Omega$, donc $\nabla u(x) = p$.]

Donc

$$|B_1| \leq |\nabla u(\Gamma_u)| = \int_{\nabla u(\Gamma_u)} dx$$

$$= \int_{\Gamma_u} \underbrace{\det D^2 u}_{\geq 0} \, dx.$$

$$\leq \int_{\Gamma_u} \left(\frac{\Delta u}{d}\right)^d dx$$

$$|B_1| \leq \left(\frac{\operatorname{Per}\Omega}{d|\Omega|}\right)^d \underbrace{|\Gamma_u|}_{\leq |\Omega|}$$

puis $\operatorname{Per}(B_1) = d|B_1|$]

Cela donne le cas d'égalité, mais aussi la stabilité.

Thm (Cabré - Ros-Oton - Serra - 2016)

Σ, cône pointé sur 0 (convexe ouvert ?)

(*) $w : \Sigma \to \mathbb{R}_+$ continue, α-homogène tq $w^{1/\alpha}$ concave.

$$w(E) = \int_E w \, dx \quad , \quad Per_w(E) = \int_{\partial E \cap \Sigma} w \, d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

$(E \subset \Sigma)$
$$\hookrightarrow \frac{Per_w(E)}{w(E)^{\frac{D-1}{D}}} \geq \frac{Per_w(B_1 \cap \Sigma)}{w(B_1 \cap \Sigma)^{\frac{D-1}{D}}}$$

avec $D = d + \alpha$.

Thm 1.3

<u>Remarque</u> : $(*) \Rightarrow CD(0, D)$

Critère courbure dimension (théorie Bakry-Émery)

Travaux de Brendle.

Σ hypersurface compacte de $\mathbb{R}^{d+1}$.
$f \geq 0$ lisse sur Σ.

$$\int_\Sigma \sqrt{|\nabla^\Sigma f|^2 + f^2 H^2} + \int_{\partial\Sigma} f$$
$$\geq d\, |B_d(0,1)|^{1/d} \left(\int_\Sigma f^{\frac{d}{d-1}} \right)^{\frac{d-1}{d}}.$$

- Ici, H = courbure moyenne de Σ,

  $F_s : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{d+1}$, $F_0(x) = x$.

  $V(x) = \left.\frac{\partial F_s}{\partial s}\right|_{s=0}$, $V = 0$ sur $\partial\Sigma$.

  $\left.\frac{d}{ds} \mathrm{Vol}(F_s(\Sigma))\right|_{s=0} = \int_\Sigma H \langle V, n \rangle$,

- Motivation : surfaces minimales.

- Compléments : le cas d'égalité.

- dim = 2 (ok), dim ≥ 3 (ouvert)

Inégalité de log-Sobolev.

Thm (Gross 1975) $\gamma = \frac{e^{-|x|^2/2}}{(2\pi)^{d/2}}$.

$$\forall f \geq 0, \quad \int f \log f \, d\gamma - \int f d\gamma \log\left(\int f d\gamma\right) \leq \frac{1}{2} \int \frac{|\nabla f|^2}{f} d\gamma.$$

- Conséquence : $\forall f$ 1-lipschitz, $X \sim \mathcal{N}(0, I)$,
$$\mathbb{P}(f(X) \geq \mathbb{E}(f(X)) + r) \leq e^{-r^2/2}$$

démo : on considère $H = ? \int e^{\lambda f} d\gamma$

- Ext$^{\circ}$: si on se restreint à un convexe $\leq$ encore ok (Caffarelli).

- Autre résultat de Brendle. (2023)

Thm Σ hypersurface compacte sans bord de $\mathbb{R}^{d+1}$

$$\int_\Sigma f \log f \, d\gamma - \int f d\gamma \log \int f d\gamma \leq \frac{1}{2} \int \frac{|\nabla^\Sigma f|^2}{f} d\gamma + \int_\Sigma f \left(H - \frac{\langle x, \nu \rangle}{\sqrt{2}}\right)^2 d\gamma$$

Généralisation stricte de Gross.
$\Sigma = \{x_{d+1} = 0\}$.

Remarque :

Si on linéarise log-Sob en considérant $1+\varepsilon f$, on obtient l'inégalité de Poincaré.

→ comparer à Kolesnikov & Milman.
"qui se sont arrêtés à Poincaré."

• Voir Gross, autre papier, ensemble de niveau.

• $E \subset \mathbb{R}^d$, $\gamma(E) = \alpha$.
$t \mid \gamma_1(]-\infty, t]) = \alpha$
$$\mathrm{Per}_\gamma(E) \geq \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

inégalité isopérimétrique gaussienne

au moins 15 preuves

Q : preuve avec ABS ?

car le cas hypersurfaces est ouvert.