

Mémoire de stage - M2 Mathématiques de l'Aléatoire de l'université
Paris-Saclay



Equivalence orbitale de Shannon

Corentin Correia
encadré par François Le Maître

Avril - Août 2023



Résumé

Ce mémoire présente le déroulement de ce stage sur l'équivalence orbitale de Shannon.

La conjugaison entre systèmes mesurés étant très compliquée à étudier (voir [FRW11]), on cherche une relation sensiblement moins forte. On introduit l'équivalence orbitale qui ne tient compte que de la partition en orbites des systèmes (à conjugaison près) mais qui est malheureusement triviale parmi les systèmes ergodiques, d'après le théorème de DYE [Dye59]. Un renforcement de cette notion, l'équivalence orbitale quantitative, consiste à imposer des contraintes sur les cocycles (des fonctions qui codent l'égalité des orbites de systèmes orbitalement équivalents et à quel point il faut les déformer pour qu'ils soient égaux). Le théorème de BELINSKAYA [Bel69] énonce qu'une contrainte d'intégrabilité sur l'un des deux cocycles apporte de la rigidité, on est ramené à un problème de flip-conjugaison, très proche du problème initial de la conjugaison. En équivalence orbitale quantitative, trouver un juste milieu entre la relation de conjugaison et la relation triviale entre systèmes n'est pas si facile. Grâce aux résultats de CARDERI, JOSEPH, LE MAÎTRE et TESSERA [CJLT23], on parvient à trouver ce juste milieu en demandant une condition d'intégrabilité moins forte sur les cocycles ou en demandant qu'ils soient Shannon. Toutes ces notions et résultats principaux sont expliqués dans la section 1.

Nous entrons ensuite dans le vif du sujet avec la section 2 dans laquelle nous expliquons l'équivalence orbitale de Shannon. C'est le principal thème de l'article [KL22] de KERR et LI, sur lequel s'appuie ce stage. Nous énonçons à la fin de cette deuxième section les deux théorèmes de l'article (dans ce mémoire il s'agit des théorèmes 2.8 et 2.10) et nous indiquons les objectifs de ce stage, à savoir présenter les preuves de ces théorèmes, voire tenter de généraliser le second.

Il n'est pas seulement question de systèmes mesurés classiques puisque le propos traite plus généralement d'actions de groupes, pour des groupes ayant des propriétés permettant d'étudier la dynamique des actions comme on le ferait pour le groupe \mathbb{Z} , ce sont les groupes moyennables. En complément du cas du groupe \mathbb{Z} , nous énonçons dans la section 1 les principaux résultats de théorie ergodique (théorème de récurrence de POINCARÉ, théorèmes ergodiques) et d'équivalence orbitale pour les actions de groupes moyennables et nous définissons dans la section 2 l'entropie dans ce cadre. En plus d'être satisfaisant, ce point de vue plus général offre une souplesse intéressante pour le calcul d'entropie dans le cas classique du groupe \mathbb{Z} , autant de raisons pour en parler dans les deux premières sections.

Dans la section 3, nous démontrons le théorème 2.8 de KERR et LI de préservation de l'entropie par équivalence orbitale de Shannon. Nous présentons la preuve seulement dans le cas du groupe \mathbb{Z} (théorème 2.9) pour plus de lisibilité mais nous indiquerons en note de bas de page les subtilités supplémentaires dans le cadre plus général de l'article [KL22].

Dans [CJLT23], les auteurs démontrent un résultat moins fort, la préservation de la finitude de l'entropie par équivalence orbitale de Shannon. Dans la section 4, nous nous demandons alors s'il est possible d'exploiter une formule issue des idées de la preuve de ce résultat pour obtenir une nouvelle preuve du théorème de KERR et LI. Une technique que nous développons ne permet pas d'aboutir, cependant nous avons remarqué que les idées pour l'élaborer nous mènent à une nouvelle preuve du théorème de BELINSKAYA, nous la présentons.

Avant de nous intéresser au second théorème énoncé dans [KL22] (le théorème 2.10 dans ce mémoire), voire à une généralisation obtenue lors de ce stage, nous allons introduire toutes les notions nécessaires à leur compréhension. Nous définissons dans la section 5 les transformations de rang 1 et plus particulièrement les odomètres. La famille des transformations de rang 1 admet plusieurs définitions équivalentes, par exemple celle par *cutting & stacking* qui offre une structure plus intéressante ainsi qu'une méthode pour construire une multitude d'exemples. Lors de ce stage, nous avons amélioré l'énoncé du théorème de BAXTER [Bax71] qui démontre qu'une transformation est de rang 1 si et seulement si elle satisfait la définition par *cutting & stacking*. En effet, nous avons en plus démontré qu'en passant d'une définition à l'autre, nous conservons ce qu'on appellera la vitesse de remplissage des tours de Rokhlin (proposition 5.12).

Enfin, la dernière section 6 traite du théorème 2.10 : les odomètres sont Shannon orbitalement équivalents à l'odomètre universel. Nous donnerons un énoncé avec une quantification plus précise des cocycles (théorème 6.1). La définition par *cutting & stacking* nous permet de généraliser aux transformations de rang 1 la construction d'une équivalence orbitale présentée dans [KL22], c'est cette construction plus générale que nous présentons. Nous cherchons à quantifier cette équivalence orbitale pour ainsi tenter d'étendre le théorème 2.10. Nous parvenons à le faire pour certaines transformations de rang 1 (théorème 6.13), par exemple pour la transformation de CHACON. Dans la partie 6.2, nous expliquons les difficultés rencontrées pour généraliser le théorème 2.10 aux transformations de rang 1, fortement liées à la vitesse de remplissage d'une suite de tours de Rokhlin et aux séparateurs intervenant dans une telle suite lors de la construction par *cutting & stacking*. Dans la partie 6.3, nous adopterons une nouvelle stratégie pour obtenir que l'odomètre universel est Shannon orbitalement équivalent à une transformation de rang 1 qui est fortement mélangeante, avec une quantification plus précise qui sera la même que celle du théorème 6.1. Ainsi l'exemple de la transformation de CHACON nous aura montré que le mélange faible n'est pas préservé par l'équivalence orbitale de Shannon (voire une forme quantitative un peu plus

forte), le théorème 6.16 aura en fait une conséquence bien plus forte : la forme d'équivalence orbitale quantitative en question ne préserve pas non plus le mélange fort.

Notations et conventions

Nous proposons ici un résumé des notations et conventions adoptées et souvent utilisées dans ce mémoire (nous ne mentionnons pas les notions n'apparaissant que localement dans ce document, par exemple l'entropie topologique que nous manipulons seulement dans la partie 3.1). Les termes techniques qui y figurent seront définies dans ce mémoire.

$(X, \mu), (Y, \nu)$	Désignent toujours des espaces probabilisés standard et sans atome.
$\text{Aut}(X, \mu)$	Ensemble des bijections bimesurables de X dans X préservant μ .
$\varphi_{\star}\mu$	Mesure de probabilité $\varphi_{\star}\mu(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$.
p.m.p.	« Préservant la mesure de probabilité » (<i>probability measure preserving</i>).
$\text{Orb}_T(x), \text{Orb}_{\alpha}(x)$	Orbite de $x \in X$ pour la transformation T ou pour l'action de groupe α .
$T^I x$ pour $I \subset \mathbb{Z}$	$\{T^n x \mid n \in I\}$,
OE	Adjectif « orbitalement équivalent » (<i>orbit equivalent</i>) ou groupe nominal « équivalence orbitale » (<i>orbit equivalence</i>).
G, H	Désignent toujours des groupes infinis dénombrables.
Δ	Différence symétrique : $A \Delta B := (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$.
$\mathcal{P}_f(E)$	Ensemble des parties finies d'un ensemble E .
$\lim \text{inv}_{F \rightarrow \infty}, \xrightarrow[F \rightarrow \infty]{\text{inv}}$	Notion de convergence pour des fonctions $f: \mathcal{P}_f(G) \rightarrow \mathbb{R}$ (voir la proposition 1.26).
$\mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$	\mathcal{Q} est plus fine que \mathcal{P} .
$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$	Partition jointe $\{P \cap Q \mid P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$.
\mathcal{P}^F	$\bigvee_{g \in F} \alpha(g^{-1})\mathcal{P}$ pour une action p.m.p. α d'un groupe G , $\bigvee_{i \in F} T^{-i}\mathcal{P}$ pour une action p.m.p. de \mathbb{Z} , c'est-à-dire la donnée de $T \in \text{Aut}(X, \mu)$.
\mathcal{P}^n	\mathcal{P}^F dans le cas de \mathbb{Z} avec $F = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
Observable	Application $f: X \rightarrow I$ mesurable avec I dénombrable, confondue avec sa partition associée $\{f^{-1}(i) \mid i \in I\}$.
$H_{\mu}(\mathcal{P})$	Entropie de Shannon de la partition \mathcal{P} , égale à $-\sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log \mu(P)$.
$h_{\mu}(T, \mathcal{P}), h_{\mu}(\alpha, \mathcal{P})$	Entropie de $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ par rapport à une partition \mathcal{P} ou d'une action p.m.p. α d'un groupe moyennable par rapport à une partition \mathcal{P} .
$h_{\mu}(T), h_{\mu}(\alpha)$	Entropie de $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ ou d'une action p.m.p. α d'un groupe moyennable.
$\mathcal{Q}_n^T, \mathcal{Q}_g^{\alpha}$	Partition associée à l'observable $\kappa_T(n, \cdot)$ (pour $T \in \text{Aut}(X, \mu)$, $n \in \mathbb{Z}$), ou à l'observable $\kappa_{\alpha}(g, \cdot)$ (pour une action α p.m.p. d'un groupe G , $g \in G$).

$x <_T y$	$\exists n > 0, y = T^n x$
Tour de Rokhlin pour $T \in \text{Aut}(X, \mu)$	De la forme $\mathcal{R} := (B, T(B), \dots, T^{h-1}(B))$, avec les $T^i(B)$ deux à deux disjoints.
T -partition	Partition de la forme $(B, T(B), \dots, T^{h-1}(B), X \setminus \bigsqcup_{0 \leq i \leq h-1} T^i(F))$, où $\mathcal{R} := (F, T(F), \dots, T^{h-1}(F))$ est une tour de Rokhlin, la T -partition est notée $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$.
$\mathcal{R}_1 \leqslant_T \mathcal{R}_2$	La tour de Rokhlin \mathcal{R}_2 est emboîtée dans la tour de Rokhlin \mathcal{R}_1 , c'est-à-dire que les étages de \mathcal{R}_1 sont des réunions d'étages de \mathcal{R}_2 .
R1^φ	Ensemble des transformations de rang 1 admettant une construction géométrique dont les tours de Rokhlin remplissent l'espace à une certaine vitesse, voir la définition 5.11.

Table des matières

1	Introduction	8
1.1	Equivalence orbitale pour les actions p.m.p. de \mathbb{Z}	8
1.2	Principaux résultats	13
1.3	Généralisation aux actions de groupes moyennables	14
1.3.1	Equivalence orbitale pour des actions de groupes	14
1.3.2	Groupes moyennables	16
1.3.3	Principaux résultats d'équivalence orbitale pour des actions p.m.p. de groupes moyennables	18
2	Equivalence orbitale de Shannon et objectifs de ce stage	21
2.1	Quelques notations sur les partitions, partitions associées aux cocycles, équivalence orbitale de Shannon	21
2.1.1	Notations de base	21
2.1.2	Partitions et observables	21
2.1.3	Equivalence orbitale de Shannon	22
2.2	Entropie pour des actions de groupes moyennables	22
2.3	Théorèmes de KERR et LI	23
3	Préservation de l'entropie par équivalence orbitale de Shannon pour des actions pmp de \mathbb{Z}	25
3.1	Partition uniforme	26
3.2	Démonstration du théorème 2.9	26
3.2.1	Preuve du lemme 3.3	27
3.2.2	Preuve des lemmes 3.1 et 3.2	27
4	Idée d'une autre preuve du théorème de KERR et LI, nouvelle preuve du théorème de BELINSKAYA	30
4.1	Une formule à la base d'une nouvelle piste	30
4.2	Une tentative de diminution d'entropie du cocycle	31
4.2.1	Relations d'ordres sur les orbites	31
4.2.2	Définition d'une procédure P_A^T	32
4.2.3	Un résultat insuffisant pour répondre au problème	33
4.3	Nouvelle preuve du théorème de BELINSKAYA	34
4.3.1	L'hypothèse d'intégrabilité du cocycle et ses conséquences	34
4.3.2	Propriété des procédures P_A^T	36
4.3.3	Preuve du théorème de BELINSKAYA	37
5	Transformations de rang 1 et odomètres	39
5.1	Tours de Rokhlin	39
5.2	Transformations de rang 1	41
5.2.1	Définition originale et caractérisation	41
5.2.2	Une amélioration de la caractérisation, préservant la vitesse de remplissage	44
5.2.3	Construction des transformations de rang 1 par <i>cutting & stacking</i>	46
5.3	Odomètres	50
6	Equivalence orbitale de Shannon entre un odomètre et l'odomètre universel	55
6.1	Construction d'une équivalence orbitale entre une transformation de rang 1 et l'odomètre universel, quantification des cocycles	56
6.1.1	Présentation générale de la construction	56
6.1.2	La construction	57
6.1.3	Quelques justifications	60
6.1.4	Egalité des orbites, bornes des cocycles sur des parties de mesure contrôlée	65
6.1.5	Preuve du théorème 6.1	69
6.2	Obstructions et généralisation partielle aux transformations de rang 1	72
6.3	Mélange fort pour des transformations de rang 1	73

1 Introduction

Les espaces probabilisés seront toujours supposés **standards** et **sans atome**. Un espace probabilisé (X, μ) est dit standard si X est un espace polonais muni de sa σ -algèbre borélienne. Un espace probabilisé standard sans atome (X, μ) est toujours isomorphe à $([0, 1], \text{Leb})$, c'est-à-dire qu'il existe une bijection¹ bimesurable $\varphi: X \rightarrow [0, 1]$ vérifiant $\varphi_*\mu = \text{Leb}$, avec la notation $\varphi_*\mu(A) := \mu(\varphi^{-1}(A))$.

Une propriété importante des espaces standards est que leur σ -algèbre (modulo les négligeables) est un espace polonais pour la distance $(A, B) \mapsto \mu(A \Delta B)$.

1.1 Equivalence orbitale pour les actions p.m.p. de \mathbb{Z}

On note $\text{Aut}(X, \mu)$ l'ensemble des **bijections bimesurables** $T: X \rightarrow X$ telles que $T_*\mu = \mu$ (on dit que la transformation est **p.m.p.** pour *probability measure preserving*), identifiées à un négligeable près.

Remarque 1.1.

$T \in \text{Aut}(X, \mu)$ définit une action du groupe \mathbb{Z} sur X (ce qui explique le titre de cette partie). En effet, il suffit de définir une action de groupe $\alpha: \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ par $\alpha(n)x = T^n x$. Dans la partie 1.3, nous donnerons une définition plus générale pour des groupes et nous nous intéresserons à la famille des groupes moyennables dont \mathbb{Z} fait partie.

On note $\text{Orb}_T(x) := \{T^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ la T -orbite d'un élément x de X . On notera également $T^I x := \{T^n x \mid n \in I\}$ si I est une partie de \mathbb{Z} .

Une transformation $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ est dite **apériodique** si $T^n x \neq x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in X$. T est dite **ergodique** si toute partie mesurable **T -invariante**² est négligeable ou de mesure pleine.

Remarque 1.2.

1. T est apériodique si presque toute T -orbite n'est pas un cycle et donc hérite de la structure « linéaire » de \mathbb{Z} , au sens où on peut représenter ces T -orbites par un graphe isomorphe au graphe de Cayley usuel de \mathbb{Z} (voir la figure 1, à droite, pour visualiser la ressemblance de structure). Nous en parlerons également dans le cas d'une action libre d'un groupe (la liberté d'une action généralise la notion d'apériodicité pour une transformation bijective), voir la remarque 1.

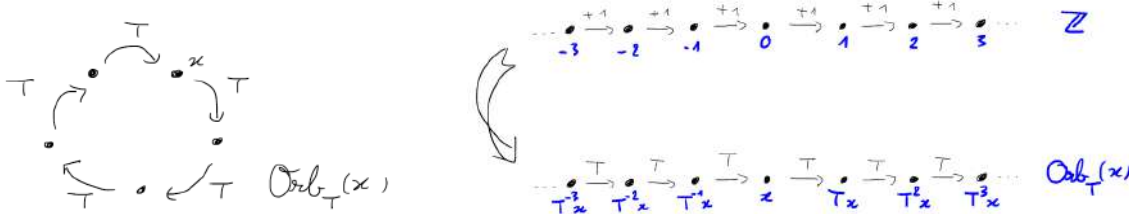


FIGURE 1 – À gauche, une structure cyclique de T -orbites dans le cas non apériodique. À droite, le graphe de Cayley usuel de \mathbb{Z} et la structure typique des T -orbites dans le cas apériodique.

2. L'ergodicité est une propriété qui donne des informations sur les orbites. En effet, si $TA = A$ (à un négligeable près), alors pour presque tout $x \in A$, la T -orbite de x est incluse dans A , donc A est une réunion de T -orbites. L'ergodicité énonce donc la chose suivante : si on considère une propriété mesurable et qui est propre aux orbites, alors presque toute orbite la satisfait ou presque toute orbite ne la satisfait pas (il suffit de considérer A qui est l'union des orbites satisfaisant la propriété).

1. C'est sous-entendu « à mesure nulle près », c'est-à-dire qu'il existe des parties mesurables $X_0 \subset X$ et $Y_0 \subset [0, 1]$ de mesure pleine telles que $\varphi: X_0 \rightarrow Y_0$ est une bijection.

2. Une partie mesurable A de X est T -invariante si $\mu(A \Delta T(A)) = 0$, c'est-à-dire si TA vaut A à un négligeable près pour la mesure μ . On peut se ramener à un mesurable \tilde{A} de différence symétrique négligeable avec A et vérifiant exactement $T\tilde{A} = \tilde{A}$ en posant $\tilde{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n A$.

Par exemple, si B est une partie mesurable de X , presque toute orbite visite B une infinité de fois ou presque toute orbite fait le contraire. Si B est non négligeable, alors ce sera la première possibilité d'après le théorème de récurrence de Poincaré.

Propriété 1.3. *Soit (X, μ) un espace de probabilité standard et $T \in \text{Aut}(X, \mu)$. Si T est ergodique, alors T est apériodique.*

Preuve de la propriété 1.3. Supposons T ergodique. Pour montrer l'apériodicité, il suffit de montrer que presque toute orbite est infinie. Considérons une famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties mesurables de X , deux à deux disjointes et de mesure non nulle (l'espace (X, μ) est isomorphe à $([0, 1], \text{Leb})$ dans lequel on peut facilement trouver une telle famille, d'où l'existence). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} T^i(A_n)$ est T -invariant et contient A_n donc l'ergodicité implique qu'il est de mesure pleine. Une intersection dénombrable de mesurables de mesure pleine est de mesure pleine, donc presque toute orbite visite tous les A_n une infinité de fois, d'où le résultat. \square

Exemple 1.4.

1. id_X est dans $\text{Aut}(X, \mu)$ mais n'est ni apériodique, ni ergodique.
2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la rotation $: x \in [0, 1] \rightarrow \{x + \alpha\} \in [0, 1]$, où $\{\cdot\}$ désigne la partie fractionnaire, est dans $\text{Aut}([0, 1], \text{Leb})$. Elle est ergodique si et seulement si α est irrationnel, on parle alors de rotation irrationnelle.
3. Le doublement de l'angle $x \in [0, 1] \rightarrow \{2x\} \in [0, 1]$ préserve Leb mais n'est pas inversible donc n'appartient pas à $\text{Aut}([0, 1], \text{Leb})$, cette application ne rentre pas dans le cadre de la théorie.
4. Etant donné un alphabet Σ de cardinal fini plus grand que 2 et ν une mesure de probabilité sur Σ , de support égal à Σ , on définit le décalage de Bernoulli $D: (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}} \rightarrow (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$. C'est un élément de $\text{Aut}(\Sigma^{\mathbb{Z}}, \nu^{\otimes \mathbb{Z}})$ qui est ergodique.
5. Nous définirons la classe des transformations de rang 1 dans $\text{Aut}(X, \mu)$, qui sont ergodiques. Dans cette classe, il y a les odomètres qui sont, à conjugaison près, des transformations agissant sur $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/q_n \mathbb{Z}$ par addition de $(1, 0, 0, \dots)$ avec retenue à droite (q_n entier plus grand ou égal à 2).

Nous définissons également les notions de mélanges fort et faible, nous en parlerons dans les sections 5 et 6.

Définition 1.5. *Soit T une transformation p.m.p. sur un espace probabilisé (X, μ) .*

1. *On dit que T est fortement mélangeante si pour tout A, B mesurables, on a*

$$\mu(T^n(A) \cap B) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu(A)\mu(B).$$

2. *On dit que T est faiblement mélangeante si pour tout A, B mesurables, on a*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(T^i(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Le mélange fort implique le mélange faible qui implique l'ergodicité. Du point de vue spectral, l'ergodicité est équivalente au fait que 1 est une valeur propre simple (ou n'est pas valeur propre pour l'opérateur de Koopman réduit) et le mélange faible est équivalente à l'absence de valeur propre autre que 1 dans le cercle unité (et ainsi 1 est automatiquement une valeur propre simple).

L'un des buts ultimes en théorie ergodique est de classer des systèmes à conjugaison près, ce qui permet de déterminer si deux systèmes sont « les mêmes » ou non.

Définition 1.6. *Deux transformations mesurables T et U , d'espaces respectifs (X, μ) et (Y, ν) et préservant la mesure sont dites conjuguées s'il existe une bijection bimesurables $\varphi: X \rightarrow Y$ telle que $\varphi_*\nu = \mu$ et $T = \varphi^{-1}U\varphi$.*

On a su classer certaines familles de systèmes à conjugaison près grâce à des invariants totaux, par exemple



FIGURE 2 – Illustration de la conjugaison entre deux transformations T et U . Appliquer T revient, à un changement de point de vue près donné par φ , à appliquer U .

1. l'entropie permet de classier à conjugaison près les décalages de Bernoulli (ORNSTEIN [Orn70], puis ORNSTEIN et WEISS [OW87] pour la généralisation aux actions de Bernoulli de groupes infinis dénombrables et moyennables³);
2. les systèmes à spectre discret sont classifiés par leur spectre (HALMOS et VON NEUMANN [HV42])⁴.

Cependant, classer tous les systèmes semble impossible, c'est un problème trop ambitieux. L'idée est donc d'affaiblir la notion de conjugaison, on ne demande pas que deux systèmes soient égaux à conjugaison près, mais qu'ils aient les mêmes orbites à conjugaison près, c'est la notion d'équivalence orbitale.

Définition 1.7. Deux transformations apériodiques $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ et $U \in \text{Aut}(Y, \nu)$ sont dites **orbitalement équivalentes (OE)** s'il existe des parties X_0 de X et Y_0 de Y de mesure pleine, respectivement T - et U -invariante, et $\varphi: X_0 \rightarrow Y_0$ une bijection bimesurable vérifiant $\varphi_*\mu = \nu$ et telle que T et $\varphi^{-1}U\varphi$ ont les mêmes orbites sur X_0 . φ est appelée une **équivalence orbitale (OE)** entre T et U .

Dans ce cas, on peut définir presque partout et de manière unique (grâce à l'apériodicité) des fonctions mesurables $c_T: X \rightarrow \mathbb{Z}$ et $c_U: Y \rightarrow \mathbb{Z}$ par

$$Tx = \varphi^{-1}U^{c_T(x)}\varphi(x) \text{ et } Uy = \varphi T^{c_U(y)}\varphi^{-1}(y),$$

c_T et c_U sont appelés les **cocycles** associés à cette équivalence orbitale. Plus généralement, on définira presque partout des fonctions $\kappa_T: \mathbb{Z} \times X \rightarrow \mathbb{Z}$ et $\kappa_U: \mathbb{Z} \times Y \rightarrow \mathbb{Z}$ par

$$T^n x = \varphi^{-1}U^{\kappa_T(n,x)}\varphi(x) \text{ et } U^n y = \varphi T^{\kappa_U(n,x)}\varphi^{-1}(y),$$

qu'on appellera également des **cocycles**.⁵ Remarquons qu'on a $\kappa_T(1, x) = c_T(x)$ et $\kappa_U(1, x) = c_U(x)$.

Par exemple, la conjugaison correspond à l'équivalence orbitale pour des cocycles c_T et c_U presque sûrement égaux à 1.

Propriété 1.8. Pour κ_T (ce sera aussi valable pour κ_U), on a l'**identité de cocycle** :

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \kappa_T(m+n, x) = \kappa_T(m, x) + \kappa_T(n, T^m x).$$

On a de plus l'égalité $\kappa_T(0, x) = 0$. On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \kappa_T(-n, x) = -\kappa_T(n, T^{-n}x), \tag{1}$$

3. Si G est un groupe, une action de Bernoulli de G est une action de groupe $G \curvearrowright \Sigma^G$ définie par $\alpha(g): (x_h)_{h \in G} \in \Sigma^G \mapsto (x_{gh})_{h \in G} \in \Sigma^G$. Avec $G = \mathbb{Z}$, $\alpha(1)$ est le décalage de Bernoulli de l'exemple 4. La notion de groupe moyennable et l'entropie d'une action d'un tel groupe seront définies ultérieurement (sous-partie 1.3.2 et partie 2.2 respectivement).

4. Les odomètres sont à spectre discret, de spectre bien connu. On a donc une description encore plus simple des classes de conjugaison dans cette famille, on obtient par exemple que l'odomètre dyadique et l'odomètre universel ne sont pas conjugués (voir la partie 5.3 pour les définitions et pour plus de précisions)

5. Si les T -orbites sont incluses dans les $\varphi^{-1}U\varphi$ -orbites, sans savoir si les inclusions inverses ont lieu, alors on peut encore définir c_T et κ_T .

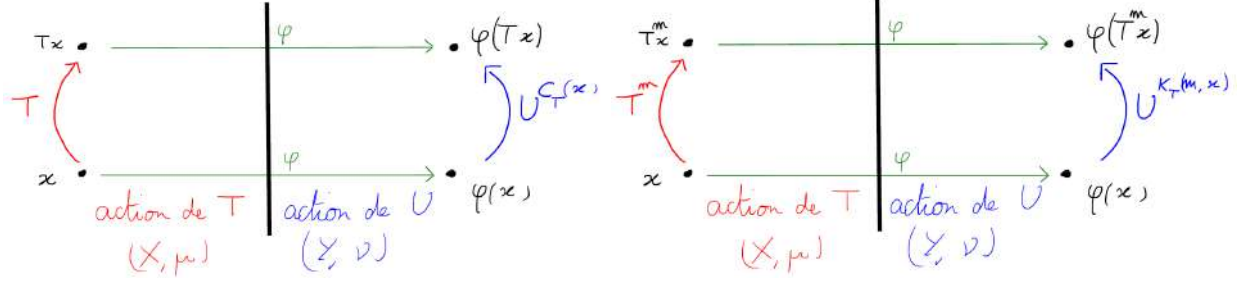


FIGURE 3 – Illustration du cocycle c_T à gauche, du cocycle généralisé κ_T à droite. Appliquer T (resp. T^m) à x revient à appliquer $U^{c_T(x)}$ (resp. $U^{\kappa_T(m,x)}$) à $\varphi(x)$.

$$\forall j, n \in \mathbb{Z}, \kappa_T(jn, x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} \kappa_T(j, T^{ij}x) & \text{si } n \geq 0 \\ -\sum_{i=1}^{|n|} \kappa_T(j, T^{-ij}x) & \text{si } n \leq 0 \end{cases} . \quad (2)$$

Par exemple, avec $j = 1$, on obtient

$$\kappa_T(n, x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} c_T(T^i x) & \text{si } n \geq 0 \\ -\sum_{i=1}^{|n|} c_T(T^{-i} x) & \text{si } n \leq 0 \end{cases} . \quad (3)$$

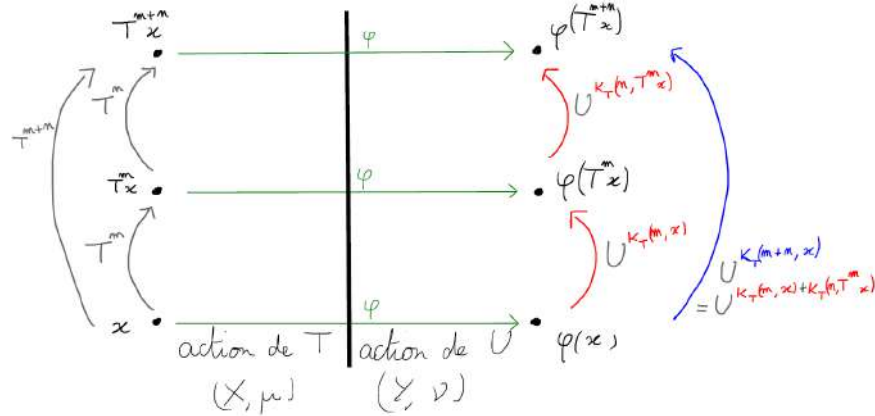
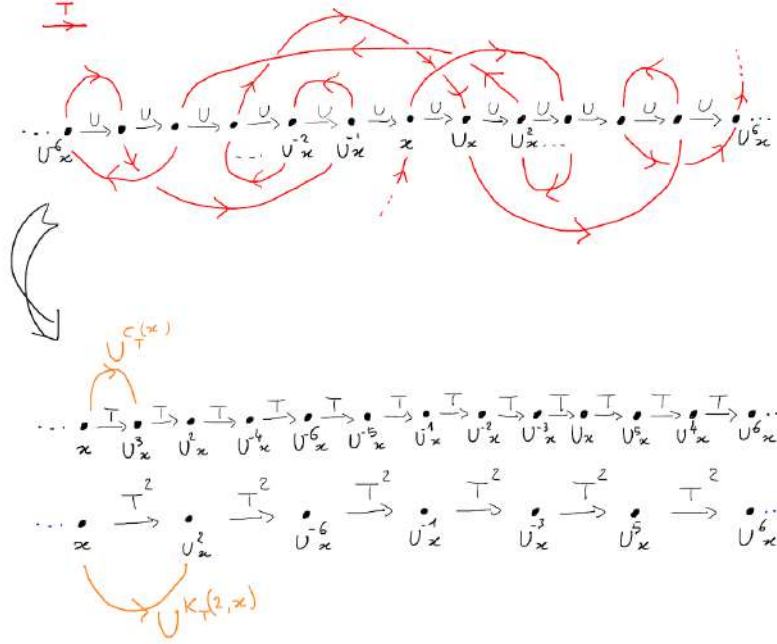


FIGURE 4 – Preuve « par dessin » de l'identité de cocycle.

Si $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ et $U \in \text{Aut}(Y, \nu)$ sont OE, nous nous permettrons de supposer sans perte de généralité que $(X, \mu) = (Y, \nu)$ et que id_X est une OE entre T et U , quitte à remplacer U par $\varphi^{-1}U\varphi$. Dans ce cas, on dit que T et U ont les **mêmes orbites**. Cela permet une simplification d'écriture, on a juste $T^n x = U^{\kappa_T(n,x)}x$ et $U^n x = T^{\kappa_U(n,x)}x$. Remarquons que $\kappa_T(\cdot, x): \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ est une bijection pour presque tout $x \in X$, par égalité des orbites.

Remarque 1.9.

Dans la figure 5, on a dessiné une dynamique pour T bien plus désordonnée que celle de U . Lorsque T et U sont orbitalement équivalentes, les cocycles c_T et c_U ont justement ce rôle de quantifier à quel point il a fallu déformer les actions pour qu'elles soient les mêmes, c'est-à-dire à quel point on est éloigné d'un problème de conjugaison



	$U^{-6}x$	$U^{-5}x$	$U^{-4}x$	$U^{-3}x$	$U^{-2}x$	$U^{-1}x$	x	Ux	U^2x	U^3x	U^4x	U^5x	U^6x
$\kappa_T(-2, \cdot)$	8	1	7	2	-3	-5		-3	-2		-3	-8	-1
$\kappa_T(-1, \cdot)$	2	-1	6	1	1	-4		-4	1	-3	1	-4	-2
$\kappa_T(1, \cdot) = c_T$	1	4	-2	4	-1	-1	3	4	-6	-1	2	-1	
$\kappa_T(2, \cdot)$	5	3	-1	8	3	-2	2	3	-8	-7		1	

FIGURE 5 – On propose ici une illustration pour bien visualiser ce qu’on a introduit. On peut supposer sans perte de généralité que T et U ont les mêmes orbites, ils induisent donc une action sur chacune des orbites. On dessine en haut un exemple d’action de T sur une orbite représentée avec l’ordre de U . Pour obtenir $c_T(x)$ (resp. $\kappa_T(2, x)$), il faut appliquer T (resp. T^2) à x et voir sur quel $U^n(x)$ on tombe (dessin du dessous). On présente ensuite un tableau de valeurs prises par des cocycles.

On gardera en tête cette image de fil rouge qui brode la U -orbite dans la figure 5. Dans la section 4, la stratégie sera de démêler ce fil pour se ramener à un T dont la dynamique va un peu plus dans le sens de celle de U .

Remarque 1.10.

On déduit de l’identité (3) que $\kappa_T(n, x)/|n|$ est une somme de Birkhoff. Nous nous en servons dans la partie 4.3 lorsque nous établirons une nouvelle preuve du théorème de BELINSKAYA (énoncé dans la partie suivante).

L’idée est que, si c_T est intégrable, de moyenne strictement positive et si T est ergodique, alors on a $\kappa_T(n, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\kappa_T(n, x) \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} -\infty$ pour presque tout $x \in X$ d’après le théorème ergodique ponctuel. Si T et U ont les mêmes orbites et en considérant la figure 5 dans laquelle on a représenté au-dessus la dynamique de T sur une orbite ordonnée selon U , cela revient à dire que $T^n x$ diverge vers la droite lorsque $n \rightarrow +\infty$, vers la gauche lorsque $n \rightarrow -\infty$.⁶

L’hypothèse d’intégrabilité de c_T donne donc une information cruciale sur la dynamique de T par rapport à celle de U , qui implique la rigidité exprimée dans le théorème de BELINSKAYA.

6. Pour être précis, c’est une divergence au sens d’une relation d’ordre totale sur presque toute U -orbite, définie par $x \leq_U y \iff \exists n \geq 0, y = U^n x$. Ici on utilise le fait que, par apériodicité de U , presque toute U -orbite hérite de la structure « linéaire » \mathbb{Z} (voir la remarque 1).

1.2 Principaux résultats

Nous avons voulu affaiblir la conjugaison. Le théorème suivant est dû à DYE [Dye59] et nous indique que nous avons créé une relation triviale entre les systèmes ergodiques, ce qui peut se comprendre par le fait que l'équivalence orbitale et l'ergodicité (voir la remarque 2) sont deux propriétés qui concernent les orbites.

Théorème 1.11 (DYE - 1959). *Si (X, μ) est standard et sans atome, alors toutes les transformations ergodiques de $\text{Aut}(X, \mu)$ sont OE.*

Ayant obtenu un affaiblissement trivial de la conjugaison, il faut renforcer la définition d'équivalence orbitale. Une manière de faire est d'imposer des contraintes sur les cocycles c_T et c_U (qui codent la déformation des actions, voir la remarque 1.9), nous donnons deux exemples.

1. On peut demander une OE pour laquelle c_T et/ou c_U sont **φ -intégrables**, c'est-à-dire $\int_X \varphi(|c_T(x)|) d\mu(x) < +\infty$ et/ou $\int_X \varphi(|c_U(x)|) d\mu(x) < +\infty$, pour une certaine fonction $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$.

On parle d'**équivalence orbitale φ -intégrable (φ -OE)** lorsqu'on demande une OE pour laquelle les deux cocycles sont φ -intégrables. Exemples : log-OE pour $\varphi(t) = \log(1+t)$, L^p -OE pour $\varphi(t) = t^p$, $0 < p < +\infty$.

On parle de **(φ, ψ) -OE** lorsque les conditions demandées sur c_T et sur c_U ne sont pas les mêmes (φ -intégrabilité pour c_T , ψ -intégrabilité pour c_U).

On peut également souhaiter que l'un des deux cocycles soit borné, dans ce cas on remplace φ ou ψ par \mathbf{L}^∞ , et on remplace par \mathbf{L}^0 si on n'impose pas de condition sur le cocycle en question. Exemple : (L^p, L^0) -OE ($c_T \in L^p(\mu)$, aucune condition sur c_U), (L^∞, \log) -OE ($c_T \in L^\infty(\mu)$, c_U est log-intégrable).

2. On peut demander une OE pour laquelle c_T et/ou c_U sont **Shannon**, c'est-à-dire que $\{c_T^{-1}(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et/ou $\{c_U^{-1}(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ sont des partitions d'entropie finie.

On parle d'**équivalence orbitale de Shannon (Shannon-OE)** lorsqu'on demande une OE pour laquelle les deux cocycles sont Shannon.

Dans ces exemples, on impose une information quantitative sur les cocycles. Intuitivement, l'équivalence orbitale consiste à déformer les actions pour qu'elles soient les mêmes, l'idée est donc de limiter cette déformation. On parle d'**équivalence orbitale quantitative**. Le théorème de BELINSKAYA [Bel69] est peut-être le premier résultat important d'équivalence orbitale quantitative, il concerne la (L^1, L^0) -intégrabilité (c'est-à-dire qu'on s'intéresse à la situation où l'un des cocycles est intégrable).

Théorème 1.12 (BELINSKAYA - 1968). *Supposons (X, μ) standard et sans atome. Soient T et U ergodiques et OE, c_T et c_U les cocycles associés à une OE entre les deux. Si c_T est dans $L^1(\mu)$, alors T et U sont **flip-conjugués**, c'est-à-dire que T est conjugué à U ou à U^{-1} .*

Nous présenterons une preuve de ce résultat dans la partie 4.3.

Récapitulons. On a voulu affaiblir la conjugaison, on a introduit l'équivalence orbitale qui est en fait une relation triviale. On a donc renforcé cette notion en demandant que l'un des deux cocycles soit intégrable et on a obtenu un problème trop proche de la conjugaison. L'intégrabilité d'un des deux cocycles a apporté de la rigidité. Que se passe-t-il si on impose une quantification moins forte que l'intégrabilité sur les cocycles, par exemple si on considère $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sous-linéaire (c'est-à-dire $\varphi(t)/t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$) ou si on demande que les cocycles soient Shannon ? D'après [CJLT23], on obtiendra une relation non triviale et moins forte que la conjugaison, le théorème de BELINSKAYA est en fait optimal.

Concernant la φ -intégrabilité, on a les résultats suivants.

Théorème 1.13 (CARDERI, JOSEPH, LE MAÎTRE, TESSERA - 2022). *Supposons (X, μ) standard et sans atome. Soit $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sous-linéaire et $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ ergodique. Alors il existe $U \in \text{Aut}(X, \mu)$ ergodique tel que T et U sont (φ, L^0) -OE mais pas flip-conjugués.*

Théorème 1.14 (CARDERI, JOSEPH, LE MAÎTRE, TESSERA - 2022). *Supposons (X, μ) standard et sans atome. Soit $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sous-linéaire et $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ ergodique tel que T^n est ergodique pour un certain $n \geq 2$. Alors il existe $U \in \text{Aut}(X, \mu)$ ergodique tel que T et U sont φ -OE mais pas flip-conjugués.*

Constatons la puissance de ces résultats en considérant par exemple $\varphi(t) = t/\log(1+t)$ qui est sous-linéaire et qui est asymptotiquement plus grande que t^p pour tout $0 < p < 1$. Ainsi la $(\bigcap_{0 < p < 1} L^p, L^0)$ -OE n'implique pas la flip-conjugaison, la $(\bigcap_{0 < p < 1} L^p)$ -OE non plus.

Quant à la contrainte d'être Shannon, on montre aussi dans [CJLT23] qu'une fonction $f: X \rightarrow \mathbb{Z}$ qui est φ -intégrable est Shannon dès que $\log(1+t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(\varphi(t))$, donc la φ -OE implique la Shannon-OE dès que $\log(1+t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(\varphi(t))$. On a ainsi le corollaire suivant.

Corollaire 1.15 (CARDERI, JOSEPH, LE MAÎTRE, TESSERA - 2022). *Supposons (X, μ) standard et sans atome. Soit $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ ergodique tel que T^n est ergodique pour un certain $n \geq 2$. Alors il existe $U \in \text{Aut}(X, \mu)$ ergodique tel que T et U sont Shannon-OE mais pas flip-conjugués.*

La φ -OE, pour $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sous-linéaire, et la Shannon-OE sont donc des relations sensiblement moins fortes que la conjugaison car elles n'impliquent pas la flip-conjugaison. De plus elles sont liées car la première implique la seconde dès que $\log(1+t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(\varphi(t))$.

Nous reviendrons plus tard sur la notion d'équivalence orbitale de Shannon lorsque nous énoncerons les résultats de KERR et LI qui constituent le principal intérêt de ce stage (voir la section 2). Nous verrons que cette forme d'équivalence orbitale quantitative préserve l'entropie.

Question 1.16. *Peut-on établir un théorème de DYE quantitatif? Autrement dit, existe-t-il $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ non bornée telle que toutes transformations ergodiques de $\text{Aut}(X, \mu)$ soient φ -OE?*

Si une telle fonction φ existe, alors elle est asymptotiquement plus petite que \log (car la φ -OE implique la Shannon-OE dès que $\log(1+t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(\varphi(t))$, et donc préserve l'entropie comme nous le verrons plus tard).

1.3 Généralisation aux actions de groupes moyennables

Nous ne considérerons que des groupes infinis dénombrables (sauf mention contraire).

1.3.1 Equivalence orbitale pour des actions de groupes

Comme indiqué dans la partie précédente, une transformation T inversible induit une action du groupe \mathbb{Z} sur X via $(n, x) \mapsto T^n x$. T correspond au générateur 1 de \mathbb{Z} . Dire que T est apériodique revient à dire que l'action de \mathbb{Z} associée est (essentiellement) libre : pour presque tout x , pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le résultat de l'action de n sur x ne vaut pas x .

Ainsi, nous considérerons de manière générale une action $G \curvearrowright (X, \mu)$ p.m.p. et libre d'un groupe infini dénombrable G , qui sera éventuellement **ergodique** (de même que pour $G = \mathbb{Z}$, on demandait que $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ soit p.m.p. et apériodique, éventuellement ergodique). Précisons la définition de « p.m.p. » et « ergodique » dans le cas d'une action $G \curvearrowright (X, \mu)$:

1. l'action est p.m.p. si pour tout $g \in G$, la bijection bimesurable $\alpha(g): X \rightarrow X$ préserve μ ;
2. l'action est ergodique si pour tout mesurable A vérifiant $\mu(gA \Delta A) = 0$ pour tout $g \in G$ (on dit que A est **G-invariant**), $\mu(A)$ vaut 0 ou 1.

On notera $\text{Orb}_\alpha(x) := \{\alpha(g)x \mid g \in G\}$ la α -orbite d'un élément x de X .

Remarque 1.17.

1. De même que pour \mathbb{Z} lorsqu'on parlait d'apériodicité (voir la remarque 1), la liberté d'une action α implique que presque toute α -orbite peut se représenter comme un graphe isomorphe à un graphe de Cayley du groupe (voir la figure 6 pour l'exemple du groupe \mathbb{Z}^2).
2. La définition d'une action p.m.p. d'un groupe dans le cas de \mathbb{Z} impose que chaque T^n soit p.m.p., ce qui est équivalent à seulement demander que T soit p.m.p., la raison profonde étant que \mathbb{Z} est engendré par 1. Les définitions selon les deux points de vue (transformation T ou action du groupe \mathbb{Z}) sont donc les mêmes. De même, les deux définitions de l'ergodicité sont équivalentes car un ensemble est \mathbb{Z} -invariant si et seulement s'il est invariant par action du générateur 1, c'est-à-dire s'il est T -invariant.
3. L'ergodicité d'une action $G \curvearrowright (X, \mu)$ ne signifie pas que pour tout $g \in G$, $\alpha(g): X \rightarrow X$ est ergodique. Par exemple dans le cas de \mathbb{Z} , l'ergodicité de T n'implique pas l'ergodicité de T^2 (un ensemble T^2 -invariant n'est pas T -invariant en général).

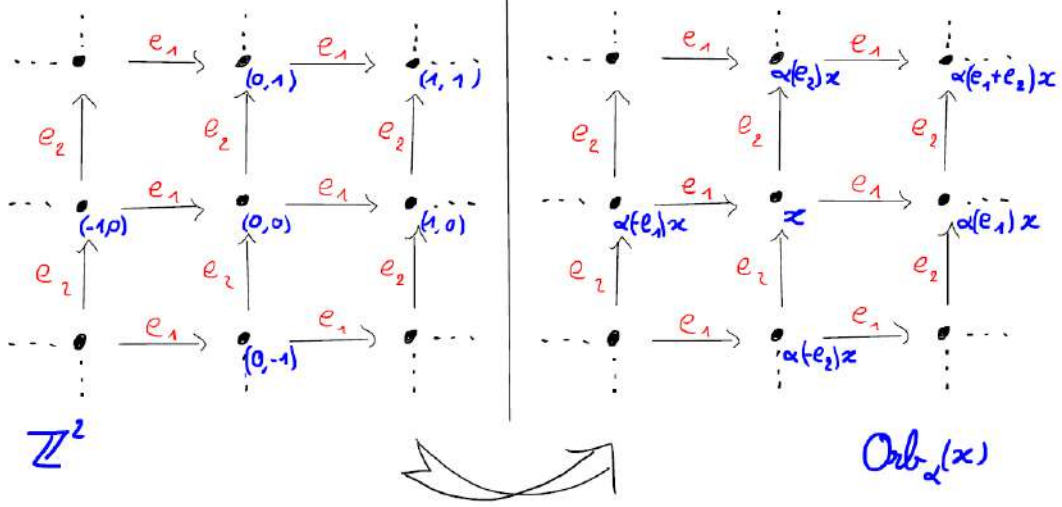


FIGURE 6 – Le graphe de Cayley usuel de \mathbb{Z}^2 (pour les générateurs usuels $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$) et la structure typique des α -orbites pour une action $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright (X, \mu)$ libre.

4. Nous ne considérerons pas d'action d'un groupe fini mais remarquons tout de même qu'une transformation $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ dont toutes les orbites sont de cardinal fini égal à $n > 0$ (T n'est donc pas apériodique) induit une action libre du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur (X, μ) . Il suffit de poser $\alpha(i \bmod n)x = T^i x$.

En généralisant à une action de groupes autres que \mathbb{Z} , on conserve le théorème de récurrence de POINCARÉ (voir [KL17], théorème 2.10). Nous verrons que nous conservons également le théorème ergodique L^2 de VON NEUMANN ainsi que les notions d'entropie (mesurée et topologique) dans le cas où le groupe est moyennable.

Théorème 1.18 (Théorème de récurrence de POINCARÉ). *Soit $G \curvearrowright (X, \mu)$ une action p.m.p. d'un groupe G infini et A un ensemble mesurable de X de mesure non nulle. Alors pour presque tout $x \in A$, l'ensemble des $g \in G$ tels que $\alpha(g)x \in A$ est infini.*

Définissons maintenant l'équivalence orbitale dans le cas d'actions de groupes.

Définition 1.19. *Deux actions p.m.p. et libres $G \curvearrowright (X, \mu)$ et $H \curvearrowright (Y, \nu)$ sont dites **orbitalement équivalentes (OE)** s'il existe des parties X_0 de X et Y_0 de Y de mesure pleine, respectivement G - et H -invariante, et $\varphi: X_0 \rightarrow Y_0$ une bijection bimesurable vérifiant $\varphi_*\mu = \nu$ et telle que les actions*

$$(g, x) \mapsto \alpha(g)x \text{ et } (h, y) \mapsto \varphi^{-1}(\beta(h)\varphi(x))$$

ont les mêmes orbites sur X_0 . φ est appelée une **équivalence orbitale (OE)** entre α et β .

Dans ce cas, on peut définir presque partout et de manière unique (grâce à la liberté des actions) des fonctions mesurables $\kappa_\alpha: G \times X \rightarrow H$ et $\kappa_\beta: H \times Y \rightarrow G$ par

$$\alpha(g)x = \varphi^{-1}(\beta(\kappa_\alpha(g, x))\varphi(x)) \text{ et } \beta(h)y = \varphi(\alpha(\kappa_\beta(h, y))\varphi^{-1}(y)),$$

appelées **cocycles**.

Remarquons qu'on perd ici les cocycles c_T et c_U qu'on avait pour le groupe \mathbb{Z} , du fait qu'un groupe n'est en général pas engendré par un seul élément. Pour \mathbb{Z} , grâce à l'identité (3), on obtient κ_T et κ_U à partir de $c_T = \kappa_T(1, \cdot)$ et $c_U = \kappa_U(1, \cdot)$, ces dernières suffisent pour coder (à conjugaison près) l'égalité entre les T - et les U -orbites. Pour un groupe G quelconque, ce qui serait un analogue des fonctions c_T et c_U seraient les $\kappa_\alpha(g, \cdot)$ et les $\kappa_\beta(h, \cdot)$ pour g et h respectivement dans une partie génératrice de G et de H , cela est dû à l'identité de cocycle dans le cas d'une action de groupe (voir la propriété 1.20 ci-dessous).

On peut également supposer sans perte de généralité (quitte à remplacer l'action β par un conjugué), que $\text{Aut}(X, \mu) = \text{Aut}(Y, \nu)$ et que id_X est une OE entre les deux actions. Dans ce cas, on dit que α et β ont les

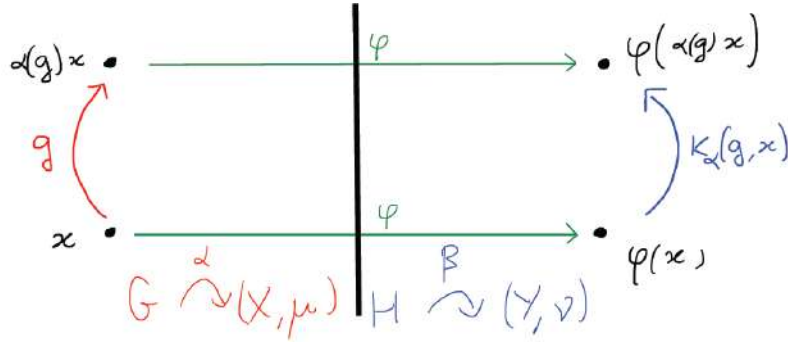


FIGURE 7 – Illustration du cocycle κ_α . Faire agir $g \in G$ sur x pour l'action α revient à faire agir $\kappa_\alpha(g, x) \in H$ sur $\varphi(x)$ pour l'action β .

mêmes orbites et les relations définissant les cocycles s'écrivent tout simplement $\alpha(g)x = \beta(\kappa_\alpha(g, x))x$ et $\beta(h)x = \alpha(\kappa_\beta(h, x))x$.

Propriété 1.20. Pour κ_α (ce sera aussi valable pour κ_β), on a l'identité de cocycle :

$$\forall g_1, g_2 \in G, \kappa_\alpha(g_1 g_2, x) = \kappa_\alpha(g_1, \alpha(g_2)x) \kappa_\alpha(g_2, x).$$

On a de plus l'égalité $\kappa_\alpha(e_G, x) = e_H$ (avec e_G et e_H les neutres respectifs de G et H). On en déduit

$$\forall g \in G, \kappa_\alpha(g^{-1}, x) = \kappa_\beta(g, \alpha(g^{-1})x)^{-1}, \quad (4)$$

$$\forall g_1, \dots, g_n \in G, \kappa_\alpha(g_1 \dots g_n, x) = \kappa_\alpha(g_1, \alpha(g_2 \dots g_n)x) \kappa_\alpha(g_2, \alpha(g_3 \dots g_n)x) \dots \kappa_\alpha(g_{n-1}, \alpha(g_n)x) \kappa_\alpha(g_n, x). \quad (5)$$

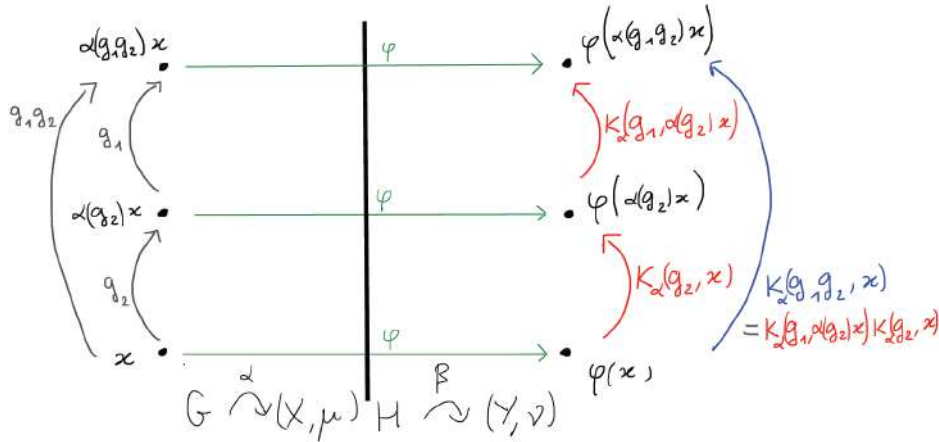


FIGURE 8 – Preuve « par dessin » de l'identité de cocycle pour des actions de groupes.

1.3.2 Groupes moyennables

Définition 1.21. Soit G un groupe infini dénombrable. On dit qu'une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties finies de G est de **Følner** si pour tout $g \in G$,

$$\frac{1}{|F_n|} |gF_n \Delta F_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On dit que G est **moyennable** si G admet une suite de Følner.

Remarque 1.22.

Dans la définition des suites de Følner, on peut se restreindre aux éléments g d'une partie génératrice du groupe G . Par exemple dans \mathbb{Z} , pour vérifier qu'une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties finies de \mathbb{Z} est de Følner, il suffit de montrer que $\frac{1}{|F_n|} |(1 + F_n) \Delta F_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Intuitivement, si (F_n) est une suite de Følner, alors pour $g \in G$, gF_n vaut quasiment F_n pour n très grand. Les F_n pour n grands sont quasiment invariants et donc captent la structure du groupe G . On pourrait comprendre intuitivement un groupe moyennable comme étant un groupe admettant une suite d'ensembles finis qui résume sa structure de groupe.

Si ce groupe agit sur un espace, alors ces ensembles finis résument la dynamique de l'action. Par exemple, pour une action de \mathbb{Z} (groupe moyennable dont $([0, n])_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Følner), c'est-à-dire la donnée d'une transformation bimesurable T , on comprend de mieux en mieux la dynamique de T en connaissant ce qui se passe aux temps $0, 1, 2, \dots, n$ pour n très grand, c'est pourquoi l'intervalle de temps $[0, n]$ joue un rôle important dans les théorèmes ergodiques et dans les calculs d'entropie (cela fonctionne aussi pour $[-n, n]$). Pour une action d'un groupe moyennable, on garde cette idée. On établit des théorèmes ergodiques et on définit des notions d'entropie à partir de l'action de F_n pour n grand.

Exemple 1.23.

1. Un groupe G fini est moyennable (considérer $F_n = G$).
2. $([0, n])_{n \in \mathbb{N}}$ et $([-n, n])_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites de Følner de \mathbb{Z}^d . Ainsi \mathbb{Z}^d est moyennable.
3. Un groupe G localement fini, c'est-à-dire qui est une union croissante de sous-groupes finis G_n , est moyennable (car la suite des G_n est de Følner). Par exemple, le groupe \mathfrak{S}_∞ des permutations de \mathbb{N} à support fini est moyennable.
4. On peut construire beaucoup de groupes moyennables grâce aux propriétés de stabilité suivantes :
 - (a) un produit fini de groupes moyennables est moyennable, par exemple tout groupe abélien finiment engendré est moyennable (d'après le théorème de structure) ;
 - (b) un groupe admettant un sous-groupe d'indice fini qui est moyennable est moyennable, par exemple tout groupe virtuellement abélien (c'est-à-dire admettant un sous-groupe abélien d'indice fini) et finiment engendré est moyennable.
5. Le groupe libre à d générateurs $\mathbb{F}_d = \langle g_1, \dots, g_d \rangle$ n'est pas moyennable si $d \geq 2$. Intuitivement, la structure de ce groupe est trop riche pour que les ensembles finis soient quasiment invariants, une suite d'ensembles finis ne peut pas résumer une structure aussi complexe.

En effet, supposons par l'absurde que ce groupe admette une suite de Følner (F_n) . Alors un des générateurs g_i vérifie pour une infinité de $n \in \mathbb{N}$ la propriété « l'ensemble F'_n des mots réduits de F_n qui commencent par g_i ou g_i^{-1} est de cardinal plus petit ou égal à $|F_n|/d$ ». Il existe également $g \in \{g_i, g_i^{-1}\}$ tel que pour les $n \in \mathbb{N}$ concernés, l'ensemble $F''_n \subset F'_n$ des mots réduits de F_n qui commencent par g est de cardinal plus grand ou égal à $|F_n|/(2d)$. Notons $F''_n := F'_n \setminus F''_n$ et considérons un entier n pour lequel la propriété est vérifiée. gF_n contient gF''_n donc

$$|(gF_n) \setminus F_n| \geq |(gF''_n) \setminus F_n|.$$

Or gF''_n est un ensemble de mots réduits commençant par g donc $(gF''_n) \setminus F_n = (gF''_n) \setminus F''_n$. On obtient donc

$$|(gF_n) \setminus F_n| \geq |(gF''_n) \setminus F''_n| \geq |gF''_n| - |F''_n| \geq \left(1 - \frac{1}{d} - \frac{1}{2d}\right) |F_n| = \left(1 - \frac{3}{2d}\right) |F_n| \geq \frac{1}{4} |F_n|.$$

Ainsi $|gF_n \Delta F_n|/|F_n|$ est plus grand ou égal à $\frac{1}{4}$ pour une infinité de n , la quantité ne peut donc pas tendre vers 0, d'où la contradiction.

Nous allons donner une caractérisation des suites de Følner, dans laquelle on peut quantifier l'invariance de F_n quand n devient de plus en plus grand (de même que pour une suite réelle convergente, on pourrait quantifier avec des voisinages la proximité de ses termes à sa limite).

Définition 1.24. *Etant données F et K des parties finies de G et $\delta > 0$, on dit que F est (K, δ) -invariante si on a*

$$|\{f \in F \mid Kf \subset F\}| \geq (1 - \delta)|F|$$

(la proportion de $f \in F$ qui envoie K dans F vaut au moins $1 - \delta$).

Proposition 1.25 (voir [KL17], après la définition 4.32). *Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties finies de G . Il y a équivalence entre :*

- i) $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Følner de G ;*
- ii) pour toute partie finie K de G et pour tout $\delta > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que F_n est (K, δ) -invariante pour tout $n \geq N$;*
- ii') l'énoncé ii) en se restreignant aux parties finies K incluses dans une partie génératrice de G .*

Notons $\mathcal{P}_f(\mathbf{E})$ l'ensemble des parties finies d'un ensemble E . Nous allons maintenant introduire une notion de convergence pour une fonction $\mathcal{P}_f(G) \rightarrow \mathbb{R}$, dont les suites de Følner incarnent la caractérisation séquentielle et la notion de (K, δ) -invariance correspond intuitivement à la caractérisation « par voisinage » (si on veut poursuivre l'analogie avant la définition 1.24). L'équivalence entre les assertions s'obtient facilement grâce à la proposition 1.25.

Proposition 1.26. *Soit $f: \mathcal{P}_f(G) \rightarrow \mathbb{R}$ et $L \in \mathbb{R}$. Il y a équivalence entre :*

- i) pour toute suite de Følner $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f(F_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} L$;*
- ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie K de G et $\delta > 0$ tels que $|f(F) - L| \leq \varepsilon$ pour toute partie finie F qui est (K, δ) -invariante ;*
- ii') l'énoncé ii) en se restreignant aux parties finies K incluses dans une partie génératrice de G .*

Dans ce cas, on dit que $f(F)$ converge vers L lorsque F devient de plus en plus invariante, noté $\mathbf{f}(F) \xrightarrow[F \rightarrow \infty]{\text{inv}} L$ ou $L = \lim \text{inv}_{F \rightarrow \infty} \mathbf{f}(F)$.

On peut remarquer que les énoncés *ii')* rendent les études beaucoup plus simples pour des groupes engendrés par très peu d'éléments. Par exemple pour \mathbb{Z} , K est fixé, égal à $\{1\}$, et le problème est réduit au paramètre δ .

La proposition précédente met en évidence un nouveau mode de convergence dont les suites de Følner incarnent une caractérisation séquentielle. Nous verrons dans la partie 2.2 que c'est en fait ce mode de convergence qui a lieu pour définir l'entropie mesurée/topologique d'une action par rapport à une partition/un recouvrement ouvert, on généralisera par la même occasion les énoncés qu'on connaissait et qui sont prérequis au début de la partie en question. Remarquons déjà qu'on conserve le théorème ergodique L^2 de VON NEUMANN dans le cadre d'une action d'un groupe moyennable (voir [KL17], théorème 4.22).

Théorème 1.27 (Théorème ergodique L^2 , cas ergodique). *Soit $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} \text{Aut}(X, \mu)$ une action p.m.p. et ergodique d'un groupe G moyennable. Pour tout $f \in L^2(\mu)$, pour toute suite de Følner (F_n) de G , $\left(\frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} f(\alpha(g) \cdot)\right)_{n \geq 1}$ tend vers $\int_X f d\mu$ dans $L^2(\mu)$.*

Sans ergodicité, la limite est la projection dans $L^2(\mu)$ de f dans l'ensemble des fonctions G -invariantes. La convergence L^1 a lieu lorsque f est intégrable. On peut également se demander s'il existe un théorème ergodique ponctuel lorsque f est intégrable. C'est le cas avec une hypothèse supplémentaire sur la suite de Følner (voir [KL17], théorème 4.28).

1.3.3 Principaux résultats d'équivalence orbitale pour des actions p.m.p. de groupes moyennables

Le théorème de DYE est encore vrai dans le cas général d'actions de groupes moyennables, ce résultat est dû à ORNSTEIN et WEISS [OW80].

Théorème 1.28 (ORNSTEIN, WEISS - 1980). *Si (X, μ) est standard et sans atome, alors deux actions p.m.p., libres et ergodiques d'un groupe infini dénombrable et moyennable, sur (X, μ) , sont OE.*

On peut se demander s'il existe un théorème de BELINSKAYA dans ce cadre. Il faut d'abord définir l'intégrabilité d'un cocycle, ce qu'on peut faire dès que le groupe est finiment engendré puisqu'on va pouvoir généraliser la valeur absolue qu'on a sur \mathbb{Z} .

Etant donné un groupe G **finiment engendré** et S une partie **génératrice finie**, qu'on peut supposer **symétrique** quitte à la remplacer par $S \cup S^{-1}$, on définit pour tout $g \in G$, $|g|_G$ le plus petit nombre n d'éléments $s_1, \dots, s_n \in S$ tels que $g = s_1 \dots s_n$, avec la convention $|e_G|_G = 0$ (le mot vide est de taille nulle). $|\cdot|_G$ est appelée la **métrique de mots** associée à la partie génératrice finie et symétrique S .

L'intérêt de considérer un groupe finiment engendré est que deux métriques de mots $|\cdot|_G$ et $|\cdot|'_G$ associées à deux parties génératrices finies symétriques S et S' sont **bi-lipschitziennes**. En effet, si $g \in G$ s'écrit $s_1 \dots s_n$ avec $n = |g|_G$ et $s_1, \dots, s_n \in S$, alors on peut ensuite écrire chaque s_i comme un produit de $|s_i|'_G$ éléments de S' et obtenir que g s'écrit comme un produit d'au plus $n \times \max_{s \in S} |s|'_G$ éléments de S' , ce qui donne $|g|'_G \leq C|g|_G$ avec $C = \max_{s \in S} |s|'_G$.

Grâce à cette propriété, les définitions suivantes ne dépendent pas de la partie finie génératrice choisie.

Définition 1.29. Soient $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X, \mu)$ et $H \overset{\beta}{\curvearrowright} (Y, \nu)$ deux actions p.m.p., libres et ergodiques de groupes moyennables, infinis et finiment engendrés. On suppose qu'elles sont OE et on note κ_α et κ_β les cocycles associés à une OE entre les deux actions.

On dit que κ_α est **intégrable** si

$$\forall g \in G, \int_X |\kappa_\alpha(g, x)|_G d\mu < +\infty,$$

où $|\cdot|_G$ est une métrique de mot associée à une partie génératrice finie et symétrique de G . Même définition pour l'intégrabilité de κ_β .

On dit que les deux actions sont **L^1 -orbitalement équivalentes (L^1 -OE)** s'il existe une OE pour laquelle les deux cocycles sont intégrables.

On définit de même la **φ -intégrabilité** du cocycle κ_α comme étant la φ -intégrabilité de chaque $|\kappa_\alpha(g, \cdot)|_G$, $g \in G$. Le cocycle est dit **borné** s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $g \in G$, $|\kappa_\alpha(g, \cdot)|_H / |g|_G$ est borné par C sur X .

Dans la sous-partie 2.1.3, nous définirons également ce qu'est un cocycle Shannon pour une action de groupe en général.

Remarque 1.30.

1. $|\cdot|_{\mathbb{Z}}$ est en fait la valeur absolue si on choisit la partie génératrice $\{-1, 1\}$. Dans le cas de \mathbb{Z} , en utilisant l'identité de cocycle et la T -invariance, on obtient que l'intégrabilité de κ_T au sens de la définition que nous venons de donner est équivalente à l'intégrabilité de $c_T: X \rightarrow X$.
2. Dans la définition d'un cocycle borné, on ne demande pas que chaque $|\kappa_\alpha(g, \cdot)|_H$ soit borné. On veut un contrôle de $\kappa_\alpha(g, \cdot)$ par $|g|_G$, uniforme sur tous les $g \in G$. En utilisant l'identité de cocycle (5), il suffit de demander que chaque $|\kappa_\alpha(s, \cdot)|_H$, pour s dans une partie S génératrice symétrique finie, soit borné sur X pour obtenir un cocycle borné. En effet, si C est une borne des $|\kappa_\alpha(s, \cdot)|_H$ et si $g \in G$ s'écrit comme un produit $s_1 \dots s_n$ d'éléments de S , avec $n = |g|_G$, alors

$$|\kappa_\alpha(g, x)|_H = |\kappa_\alpha(s_1, _)\dots\kappa_\alpha(s_n, _)|_H \leq \sum_{i=1}^n |\kappa_\alpha(s_i, _)|_H \leq Cn = C|g|_G$$

où le symbole $_$ remplace $\alpha(s_{i+1} \dots s_n)x$ pour plus de lisibilité.

Pour des actions de \mathbb{Z} par exemple, si c_T est constant égal à 1, on aura alors $\kappa_T(n, \cdot)$ constant égal à n . Donc $|g|$ est l'ordre de grandeur raisonnable de $|\kappa_\alpha(g, \cdot)|_H$ lorsqu'on cherche à définir la notion de cocycle borné.

Malheureusement, le théorème de BELINSKAYA n'est plus du tout valable dans le cas général⁷ car la L^∞ -OE (plus forte que l'intégrabilité des cocycles) sur \mathbb{Z}^d ($d \geq 2$) ne préserve pas le mélange [FF86].

7. La flip-conjugaison pour un groupe quelconque se définit comme la conjugaison modulo un automorphisme de groupe. Dans \mathbb{Z} , les automorphisme de groupe sont $id_{\mathbb{Z}}$ et $-id_{\mathbb{Z}}$ donc la flip-conjugaison entre T et U signifie que pour l'un des deux automorphismes, noté ψ , pour tout $n \in \mathbb{Z}$, T^n et $U^{\psi(n)}$ sont conjugués, ce qui correspond bien à la définition de la flip-conjugaison qu'on avait donnée dans le cas du groupe \mathbb{Z} .

Théorème 1.31 (FIELDSTEEL, FRIEDMAN - 1986). *Si (X, μ) est standard et sans atome, alors toute action p.m.p. ergodique du groupe \mathbb{Z}^d ($d \geq 2$) sur $\text{Aut}(X, \mu)$ est L^∞ -OE à une action mélangeante.*

L'équivalence orbitale intégrable donne quand même des informations sur la géométrie⁸ du groupe [Aus16b].

Théorème 1.32 (BOWEN - 2016). *Supposons (X, μ) standard et sans atome. Si deux actions p.m.p., libres et ergodiques de groupes finiment engendrés sont L^1 -OE, alors les deux groupes ont la même croissance.*

Nous ne donnerons pas de définition précise de la croissance d'un groupe finiment engendré. Informellement, deux groupes G et H finiment engendrés ont la même croissance si $|\{g \in G \mid |g|_G \leq n\}|$ et $|\{h \in H \mid |h|_H \leq n\}|$ grandissent à la même vitesse lorsque $n \rightarrow +\infty$. Par exemple, si $G = \mathbb{Z}$, la quantité croît comme n , et pour $H = \mathbb{Z}^2$, la quantité croît comme n^2 , il ne peut donc pas y avoir d'actions de \mathbb{Z} et de \mathbb{Z}^2 qui soient L^1 -OE.

8. On pourra d'ailleurs remarquer dans la preuve du théorème de Belinskaya, qu'on donnera dans la partie 4.3, que l'utilisation de l'hypothèse d'intégrabilité de c_T s'appuie sur la géométrie du groupe \mathbb{Z} (voir également la remarque 1.10). De manière générale, en équivalence orbitale (non nécessairement quantitative), la géométrie d'un groupe apporte déjà un peu d'informations car elle donne une structure aux orbites lorsque les actions sont libres.

2 Equivalence orbitale de Shannon et objectifs de ce stage

2.1 Quelques notations sur les partitions, partitions associées aux cocycles, équivalence orbitale de Shannon

2.1.1 Notations de base

Les partitions sont toujours supposées dénombrables et mesurables.

Si \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont deux partitions, on dit que \mathcal{Q} est **plus fine** que \mathcal{P} ou **raffine** \mathcal{P} , noté $\mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$, si toute pièce de \mathcal{P} est une union de pièces de \mathcal{Q} . La partition jointe de \mathcal{P} et \mathcal{Q} , notée $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, est la partition la moins fine qui raffine \mathcal{P} et \mathcal{Q} . On montre que $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ vaut $\{P \cap Q \mid P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$.

Etant donnée une partition \mathcal{P} de X , une action $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X, \mu)$ et F une partie finie du groupe G , \mathcal{P}^F désigne la partition jointe $\bigvee_{g \in F} \alpha(g^{-1})(\mathcal{P})$. Dans le cas particulier d'une action de \mathbb{Z} , avec $T \in \text{Aut}(X, \mu)$, on a $\mathcal{P}^F = \bigvee_{i \in F} T^{-i}(\mathcal{P})$ et on notera \mathcal{P}^n si $F = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Mêmes notations pour un recouvrement ouvert fini \mathcal{U} d'un espace topologique (cela servira pour l'entropie topologique).

Pour finir, on suppose connues les propriétés de l'entropie de Shannon d'une partition (monotonie par rapport à la relation de finesse, sous-additivité pour des partitions jointes, majoration par le logarithme du cardinal de la partition, etc). μ sera très souvent la notation pour désigner la mesure de probabilité, on notera donc H au lieu de H_μ , h au lieu de h_μ .

2.1.2 Partitions et observables

Problème 2.1. *Lorsqu'on dispose de deux actions d'un groupe G , quelle est l'action concernée lorsqu'on écrit \mathcal{P}^F ? Par exemple pour $G = \mathbb{Z}$, lorsqu'on dispose de $T, U \in \text{Aut}(X, \mu)$, la partition \mathcal{P}^F désigne-t-elle $\bigvee_{i \in F} T^{-i}(\mathcal{P})$ ou $\bigvee_{i \in F} U^{-i}(\mathcal{P})$?*

On définit souvent une partition \mathcal{P} à partir d'une **observable**, c'est-à-dire une certaine application mesurable $f: X \mapsto I$ avec I dénombrable (très souvent I inclus dans un groupe dénombrable), en posant $\mathcal{P} := \{f^{-1}(i) \mid i \in I\}$. Ce sera souvent le cas ici avec f de la forme $\kappa_\alpha(g, \cdot)$. Chaque pièce est entièrement caractérisée par la valeur prise par l'observable dessus.

Problème 2.2. *Les partitions qu'on définit de cette manière codent une certaine information qui peut devenir de plus en plus compliquée à visualiser au fur et à mesure des différentes opérations sur celles-ci (par exemple lorsqu'on joint de telles partitions). Il nous faut une notation plus visuelle pour ne pas perdre de vue l'information codée.*

Une partition \mathcal{P} définit elle-même une observable $\mathcal{P}: x \in X \mapsto \mathcal{P}(x) \in \mathcal{P}$ où $\mathcal{P}(x)$ est la pièce qui contient x . On utilisera donc le point de vue plus pratique consistant à confondre observable f et partition \mathcal{P} associée. On écrira par abus $\mathcal{P} = f$, on se permettra de noter $H(f)$ au lieu de $H(\mathcal{P})$, qui vaut donc $\sum_{i \in I} -\mu(f^{-1}(i)) \log \mu(f^{-1}(i))$, « $P \in f$ » signifiera « $P \in \mathcal{P}$ », etc. Le cardinal $|f|$ d'une observable sera définie comme le cardinal de l'ensemble des éléments de son image dont l'image réciproque n'est pas négligeable, ce qui correspond au cardinal de la partition associée si par convention on ne compte pas les pièces négligeables.

On vérifie les propriétés suivantes vis-à-vis des opérations sur les partitions :

1. si f et g sont des observables de \mathcal{P} et \mathcal{Q} respectivement, alors (f, g) est une observable de $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$;
2. étant donnée une action $G \overset{\alpha}{\curvearrowright} (X, \mu)$, $f(\alpha(g)\cdot)$ est une observable de $\alpha(g^{-1})\mathcal{P}$, par exemple \mathcal{P}^F est d'observable $(f(\alpha(g)\cdot))_{g \in F}$;
3. si C est une partie mesurable de X , alors $f|_C$ est une observable de la partition $\mathcal{P}_C := \{P \cap C \mid P \in \mathcal{P}\}$ de C .

Avec ces exemples, on constate l'importance de la notation pour ne pas perdre de vue l'information qui est codée par une partition, par exemple pour la partition jointe $\mathcal{P}^F = (f \circ T^m)_{m \in F}$: on identifie chaque pièce de ce qu'on observe de chaque $f \circ T^m$, $m \in F$, la notation est beaucoup plus visuelle. Un autre intérêt est de lever l'ambiguïté de la notation \mathcal{P}^F lorsqu'on dispose de deux transformations bimesurables T et U : est-ce $\bigvee_{m \in F} T^{-m}(\mathcal{P})$ ou $\bigvee_{m \in F} U^{-m}(\mathcal{P})$?

\mathcal{P}^F concernera l'action de T et on notera $(\mathcal{P} \circ U^m)_{m \in F}$ pour l'action de U , ce sera utile dans la sous-partie 3.2.2.

2.1.3 Equivalence orbitale de Shannon

Considérons deux actions $G \xrightarrow{\alpha} (X, \mu)$ et $H \xrightarrow{\beta} (Y, \nu)$ p.m.p., libres et OE et notons $\kappa_\alpha: G \times X \rightarrow H$ et $\kappa_\beta: H \times X \rightarrow G$ les cocycles associés à une OE entre les deux actions.

Définition 2.3. 1. κ_α définit des partitions \mathcal{Q}_g^α , $g \in G$, définies par

$$\mathcal{Q}_g^\alpha := \{X_{g,h}^\alpha \mid h \in H\} \text{ avec } X_{g,h}^\alpha := \{x \in X \mid \kappa_\alpha(g, x) = h\} = (\kappa_\alpha(g, \cdot))^{-1}(h).$$

Autrement dit, \mathcal{Q}_g^α est d'observable $\kappa_\alpha(g, \cdot)$. De même, on définit les partitions \mathcal{Q}_h^β , pour $h \in H$.

2. On dit que κ_α est **Shannon** si pour tout $g \in G$, $H(\mathcal{Q}_g^\alpha) < +\infty$. Même définition pour κ_β .
3. On parle d'**équivalence orbitale de Shannon (Shannon-OE)** s'il existe une OE pour laquelle les deux cocycles sont Shannon.

Nous allons constater pour la première fois l'avantage visuel de la notation des partitions avec des observables pour établir le fait suivant.

Proposition 2.4. *Conservons les mêmes notations. Considérons une partie finie génératrice S de G . Alors κ_α est Shannon si et seulement si les partitions \mathcal{Q}_s^α , $s \in S$, sont toutes d'entropie finie.*

Preuve de la proposition 2.4. Supposons que les partitions \mathcal{Q}_s^α , $s \in S$, sont toutes d'entropie finie. Grâce à l'identité (4), on peut supposer sans perte de généralité que S est symétrique. Considérons $g \in G$, qu'on peut donc écrire $g = s_1 \dots s_k$ avec $s_i \in S$. D'après l'identité de cocycle (5),

$$\kappa_\alpha(g, \cdot) = \kappa_\alpha(s_1, \alpha(s_2 \dots s_k \cdot)) \kappa_\alpha(s_2, \alpha(s_3 \dots s_k \cdot)) \dots \kappa_\alpha(s_{k-1}, \alpha(s_k \cdot)) \kappa_\alpha(s_k, \cdot)$$

donc $\kappa_\alpha(g, \cdot)$ est une observable de \mathcal{Q}_g^α qui s'exprime en fonction des $\kappa_\alpha(s_i, \alpha(\gamma_i \cdot))$, $1 \leq i \leq k$, pour certains $\gamma_i \in G$. Donc on a $\mathcal{Q}_g^\alpha \leq \bigvee_{1 \leq i \leq k} \alpha(\gamma_i^{-1})(\mathcal{Q}_{s_i}^\alpha)$. Par sous-additivité de l'entropie, le fait que l'action est p.m.p. et la finitude de l'entropie des $\mathcal{Q}_{s_i}^\alpha$ par hypothèse, on obtient que \mathcal{Q}_g^α est d'entropie finie. \square

Remarque 2.5.

1. Pour $G = \mathbb{Z}$, c'est-à-dire la donnée de $T \in \text{Aut}(X, \mu)$, on obtient que κ_T est Shannon si et seulement si \mathcal{Q}_1^T est d'entropie finie. Or \mathcal{Q}_1^T est d'observable $\kappa_T(1, \cdot) = c_T$. C'est donc cohérent avec la définition qui a été donnée dans la partie 1.2.
2. En première lecture, on peut d'ailleurs considérer cette preuve dans le cas précis $G = \mathbb{Z}$, avec la partie génératrice finie $\{1\}$. L'identité de cocycle (3) montre que $\kappa_T(n, \cdot)$ s'exprime en fonction d'un nombre fini de $c_T(T^i \cdot)$ et donc \mathcal{Q}_n^T est moins fine qu'une partition jointe d'un nombre fini de $T^{-i}(\mathcal{Q}_1^T)$.

2.2 Entropie pour des actions de groupes moyennables

On suppose connus les définitions et résultats suivants dont nous allons présenter la généralisation dans le cas d'une action d'un groupe moyennable :

1. l'entropie (mesurée) d'une transformation T d'un espace mesuré (X, μ) par rapport à une partition \mathcal{P} : $h(T, \mathcal{P}) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{P}^n)$;
2. l'entropie topologique de T d'un espace topologique compact (X, \mathcal{O}) par rapport à un recouvrement ouvert fini \mathcal{U} : $h_{top}(T, \mathcal{U}) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log N(\mathcal{U}^n)$ où N compte le cardinal minimal d'un sous-recouvrement ;
3. l'entropie de T : $h(T) := \sup_{\mathcal{P}} h(T, \mathcal{P})$;
4. l'entropie topologique de T : $h_{top}(T) := \sup_{\mathcal{U}} h_{top}(T, \mathcal{U})$;
5. les théorèmes suivants : les deux dernières bornes supérieures sont atteintes respectivement pour une partition \mathcal{P} génératrice (théorème de Kolmogorov-Sinaï) et pour un recouvrement ouvert fini \mathcal{U} générateur ;
6. le principe variationnel : $h_{top}(T) = \sup_{\mu} h(T)$ où la borne supérieure porte sur toutes les mesures de probabilité sur X préservées par T .

L'entropie (mesurée) pour des actions de \mathbb{Z} est un invariant incontournable pour la relation de conjugaison. ORNSTEIN a même démontré en 1970 qu'elle classe complètement les décalages de Bernoulli pour des actions de \mathbb{Z} [Orn70]. Une fois l'entropie généralisée pour des actions de groupes moyennables, WEISS et lui-même ont étendu ce résultat en 1987 aux actions de Bernoulli de groupes moyennables [OW87].

Comme indiqué dans la sous-partie 1.3.2, les suites de Følner jouent le même rôle crucial que $([0, n])_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathbb{Z} , nous l'avons déjà vu avec la généralisation du théorème ergodique L^2 de VON NEUMANN, nous allons le constater maintenant avec les entropies. C'est la notion de convergence présentée dans la sous-partie en question qui a lieu pour définir les entropies, nous la rappelons ici.

Rappel 2.6 (Convergence $\lim \text{inv}$). *Soit $f : \mathcal{P}_f(G) \rightarrow \mathbb{R}$ et $L \in \mathbb{R}$. On dit que $f(F)$ converge vers L lorsque F devient de plus en plus invariante, noté $f(F) \xrightarrow[F \rightarrow \infty]{\text{inv}} L$ ou $L = \lim \text{inv}_{F \rightarrow \infty} f(F)$ si l'une des conditions équivalentes est satisfaite :*

- i) pour toute suite de Følner $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f(F_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} L$;*
- ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie K de G et $\delta > 0$ tels que $|f(F) - L| \leq \varepsilon$ pour toute partie finie F qui est (K, δ) -invariante ;*
- ii') l'énoncé ii) en se restreignant aux parties finies K incluses dans une partie génératrice de G .*

Les entropies mesurée et topologique peuvent maintenant être définies grâce au théorème suivant (voir [KL17], parties 9.3 et 9.9).

Théorème 2.7. • *Considérons une partition \mathcal{P} de X et une action p.m.p $G \xrightarrow{\alpha} (X, \mu)$ d'un groupe dénombrable et moyennable. Alors la limite $\lim \text{inv}_{F \rightarrow \infty} \frac{1}{|F|} H(\mathcal{P}^F)$ existe et on la note $\mathbf{h}(\alpha, \mathcal{P})$ (entropie de l'action α par rapport à la partition \mathcal{P}).*

De plus, $\mathbf{h}(\alpha, \mathcal{P}) = \inf_{F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z})} \frac{1}{|F|} H(\mathcal{P}^F) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|F_n|} H(\mathcal{P}^{F_n})$ pour toute suite (F_n) de Følner.

- *Considérons un recouvrement ouvert \mathcal{U} d'un espace topologique compact (X, \mathcal{O}) et une action continue $G \xrightarrow{\alpha} (X, \mu)$ d'un groupe dénombrable et moyennable. Alors la limite $\lim \text{inv}_{F \rightarrow \infty} \frac{1}{|F|} \log N(\mathcal{U}^F)$ existe et on la note $\mathbf{h}_{\text{top}}(\alpha, \mathcal{U})$ (entropie topologique de l'action α par rapport au recouvrement ouvert \mathcal{U}).*

Concernant les prérequis énoncés au début de cette sous-partie, ce théorème permet de généraliser les définitions 1 et 2 pour des actions. On définit ensuite $\mathbf{h}(\alpha)$ et $\mathbf{h}_{\text{top}}(\alpha)$ de la même manière que dans 3 et 4. On conserve les résultats importants indiqués dans 5 et 6 (théorème de Kolmogorov-Sinaï pour l'entropie mesurée, son analogue pour l'entropie topologique et le principe variationnel).

Dans le cas du groupe \mathbb{Z} avec $[0, n]$, la construction classique s'appuie sur le lemme sous-additif de Fekete. On utilise une généralisation de ce lemme pour le cas général d'un groupe moyennable. On a en plus un énoncé de forte sous-additivité (voir [KL17], proposition 4.49), permettant d'établir la formule de l'entropie mesurée avec la borne inférieure (ce n'est a priori pas vrai pour l'entropie topologique).

Outre le fait de généraliser les notions d'entropie à une certaine famille de groupes, on obtient un peu plus de souplesse dans le calcul d'entropie dans le cas du groupe \mathbb{Z} , nous le constaterons dans la partie 3.2.

2.3 Théorèmes de KERR et LI

Nous entrons maintenant dans le vif du sujet. Les résultats dans [CJLT23] montrent que l'équivalence orbitale de Shannon n'implique pas la flip-conjugaison. Mais alors quelle information peut-elle apporter? David KERR et Hanfeng LI apporte une réponse.

Théorème 2.8 (de KERR et LI sur la préservation de l'entropie par équivalence orbitale de Shannon). *Soit G et H deux groupes infinis, finiment engendrés et virtuellement⁹ abéliens. Si $G \xrightarrow{\alpha} (X, \mu)$ et $H \xrightarrow{\beta} (Y, \nu)$ sont deux actions p.m.p., libres et OE, et que parmi les deux cocycles associés à l'OE, $\kappa_\alpha : G \times X \rightarrow H$ est Shannon, alors $\mathbf{h}(\alpha) \leq \mathbf{h}(\beta)$.*

9. Un groupe vérifie virtuellement une propriété si elle est vérifiée par un sous-groupe d'indice fini. Exemple : virtuellement abélien, virtuellement cyclique. Les groupes virtuellement abéliens (comprenant les groupes virtuellement cycliques) sont moyennables (voir l'exemple 4).

De ce résultat asymétrique, on obtient que si les actions sont en plus Shannon-OE, alors $h(\alpha) = h(\beta)$.

Historiquement, ce théorème fait suite aux travaux de AUSTIN dans [Aus16a] qui traite de l'invariance de l'entropie par L^1 -OE. KERR et LI se sont alors demandés s'il était possible d'affaiblir l'hypothèse en demandant seulement la Shannon-OE. Ce résultat a été prouvé en deux temps. Une preuve a d'abord été donnée dans [KL19] lorsque G n'est pas virtuellement⁹ cyclique¹⁰. Les auteurs sont ensuite parvenus à traiter le cas virtuellement cyclique dans [KL22], ce qui permet d'établir un énoncé pour les actions p.m.p. du groupe \mathbb{Z} .

Théorème 2.9 (Traduction du théorème 2.8 dans le cas du groupe \mathbb{Z}). *Soit $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ et $U \in \text{Aut}(Y, \nu)$ deux transformations apériodiques. Si elles sont OE et que parmi les deux cocycles associés à l'OE, $c_T: X \mapsto \mathbb{Z}$ est Shannon, alors $h(T) \leq h(U)$.*

Donc deux transformations T et U apériodiques et Shannon-OE ont même entropie.

Dans [KL22], en plus de démontrer le théorème 2.8 dans le cas qu'il restait à traiter (c'est-à-dire G virtuellement cyclique), les auteurs donnent un exemple concret de transformations bimesurables, p.m.p., apériodiques, qui sont Shannon-OE mais pas flip-conjuguées.

Théorème 2.10 (de KERR et LI sur la Shannon-OE entre certains odomètres). *Tout odomètre¹¹ est Shannon-OE à l'odomètre universel.*

Les objectifs de ce stage étaient de lire l'article [KL22], de le comprendre et d'essayer de généraliser le théorème 2.10 aux transformations de rang 1 (une classe contenant les odomètres et définie dans la partie 5.2).

Une fois la preuve du théorème 2.8 comprise (dans le cadre de [KL22]), l'intérêt était ensuite de la rédiger dans le cas de \mathbb{Z} . Il s'avère que la démonstration est allégée, aussi bien en résultats intermédiaires qu'en notations, puisque \mathbb{Z} est cyclique et donc admet la structure de groupe la plus simple parmi les groupes infinis virtuellement cycliques.

Nous nous sommes aussi demandés s'il était possible de trouver une nouvelle preuve du théorème 2.9 en utilisant un résultat de [CJLT23]. En effet, au vu de ce dernier, on peut conclure si on parvient à trouver un mécanisme pour se ramener à des cocycles d'entropie arbitrairement petite. Cette piste n'a pas abouti. Une technique utilisée, qui donc ne nous a pas permis de conclure, a en revanche permis d'obtenir une autre preuve du théorème de BELINSKAYA.

Quant à l'équivalence orbitale de Shannon entre toute transformation de rang 1 et l'odomètre universel, hypothétique généralisation du théorème 2.10, nous avons obtenu un résultat partiel. Il s'agit du théorème 6.13, qui concerne par exemple la transformation de CHACON. De manière générale, pour toute transformation de rang 1, nous avons pu construire une équivalence orbitale avec l'odomètre universel, en généralisant la construction de KERR et LI, et nous n'avons pas pu la quantifier pour toutes ces transformations. D'ailleurs, nous avons quantifié un peu plus précisément les cocycles de l'OE construite par les auteurs entre tout odomètre et l'odomètre universel (théorème 6.1). Enfin, nous avons pu montrer que l'odomètre universel est Shannon orbitalement équivalente (on peut même donner une quantification plus précise) à une transformation de rang 1 qui est mélangeante, il s'agit du théorème 6.16 dont la preuve s'appuie sur une construction stochastique de transformations de rang 1 fortement mélangeantes, due à ORNSTEIN [Orn72], et sur une stratégie légèrement différente dans la construction de l'équivalence orbitale. Le mélange fort n'est donc pas préservé par cette forme d'équivalence orbitale quantitative.

10. Pour résumer, AUSTIN était également confronté à cette disjonction de cas. Une fois qu'on parvient à réduire le cas virtuellement cyclique au cas de \mathbb{Z} , le problème est plus facile à traiter dans le cas de la L^1 -OE grâce au théorème de BELINSKAYA. Le raisonnement ne fonctionne donc plus sous l'hypothèse de Shannon-OE.

11. Nous définirons ces transformations dans la partie 5.3.

3 Préservation de l'entropie par équivalence orbitale de Shannon pour des actions pmp de \mathbb{Z}

Nous proposons dans cette section la preuve du théorème 2.9, adaptée de celle qui a été rédigée dans [KL22] pour des groupes G et H infinis, finiment engendrés, avec G virtuellement cyclique et H virtuellement abélien. Comme indiqué dans la partie précédente, la démonstration est simplifiée lorsque G et H valent \mathbb{Z} , c'est la raison pour laquelle nous nous restreignons à ce cas. Nous expliquerons succinctement en note de bas de page les étapes supplémentaires que nécessite le cas général dans les preuves. Même si nous ne considérons que le groupe \mathbb{Z} , nous verrons que nous utiliserons le fait qu'il est moyennable. En effet, les résultats obtenus dans la partie 2.2 nous donnent une souplesse supplémentaire de calcul d'entropie pour les actions de \mathbb{Z} (« supplémentaire » relativement aux résultats qu'on connaissait déjà et qui sont énoncés comme prérequis au début de cette même partie).

Quitte à conjuguer U , nous supposons que $\mathbf{Aut}(X, \mu) = \mathbf{Aut}(Y, \nu)$ et que id_X est l'OE pour laquelle c_T est Shannon. En particulier, **T et U ont les mêmes orbites.**

Si T et U vérifient les hypothèses du théorème 2.9 et ont les mêmes orbites, alors elles admettent la même décomposition ergodique (car l'équivalence orbitale impose que T et U ont la même partition en orbite et l'ergodicité ne tient compte que des propriétés des orbites). D'après la formule intégrale de l'entropie d'une partition, les cocycles sont Shannon sur presque toute composante ergodique. Supposons qu'on a démontré le théorème dans le cas ergodique, alors on obtient le résultat sur chaque composante ergodique de T et U . Cependant, la conclusion ne portera pas sur l'entropie associée à μ mais sur l'entropie associée à la mesure de la composante ergodique en question. On se sert donc de la formule intégrale de l'entropie par rapport à la décomposition ergodique, pour reconstituer $h(T)$ et $h(U)$ à partir des entropies sur chaque composante et ainsi obtenir $h(T) \leq h(U)$. Pour une référence sur la décomposition ergodique, voir par exemple [Gla03], théorème 3.22, ainsi que le théorème 14.25 pour les formules intégrales. **Il suffit donc de démontrer ce théorème dans le cas ergodique.**

En reprenant les notations de la définition 2.3, on pose

$$\tilde{h}(\kappa_T) := \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k} H(\mathcal{Q}_k^T).^{12}$$

Le but est de démontrer les lemmes suivants. On en déduira immédiatement le théorème 2.9.

Lemme 3.1. *Soient $T, U \in \mathbf{Aut}(X, \mu)$ deux transformations ergodiques. On suppose qu'elles ont les mêmes orbites et que c_T est Shannon. Alors $h(T) \leq h(U) + \tilde{h}(\kappa_T)$.*

Lemme 3.2. *Soient $T, U \in \mathbf{Aut}(X, \mu)$ deux transformations ergodiques. On suppose qu'elles ont les mêmes orbites et que c_T est Shannon. Alors $\tilde{h}(\kappa_T) = 0$.*

Pour démontrer le lemme 3.1, nous utilisons un résultat intermédiaire. Il reste vrai en remplaçant $\llbracket 0, n \rrbracket$ par une suite de Følner quelconque, mais $\llbracket 0, n \rrbracket$ est suffisant dans le cas de \mathbb{Z} pour obtenir le lemme 3.1.

Lemme 3.3. *Soient $T, U \in \mathbf{Aut}(X, \mu)$ deux transformations ergodiques. On suppose qu'elles ont les mêmes orbites. Soit $\delta > 0$. Alors pour n assez grand, on dispose d'un ensemble mesurable X_n de X tel que*

1. $\mu(X_n) \geq 1 - \delta$;
2. $\forall x \in X_n$, $\kappa_T(\llbracket 0, n \rrbracket, x)$ est $(\{1\}, \delta)$ -invariante.

Pour une certaine partition \mathcal{Q} (qui sera \mathcal{P}^R , avec les notations de la preuve du lemme 3.1 présentée dans la sous-partie 3.2.2), on se servira du lemme 3.3 pour approcher

$$\lim \operatorname{inv}_{F \rightarrow \infty} \frac{1}{|F|} \log |(\mathcal{Q} \circ U^m)_{m \in F}|$$

à la précision ε en prenant F de la forme $\kappa_T(\llbracket 0, n \rrbracket, x)$. Cette limite existe et est liée à $h(U)$ dès que \mathcal{Q} est U -uniforme, une notion que nous expliquons dans la partie suivante 3.1.

12. Dans [KL22], on définit cette quantité dans le cas général d'un groupe G virtuellement cyclique. Il s'agit de $\inf_g \frac{1}{|G:\langle g \rangle|} H(\mathcal{Q}_g^\alpha)$ où la borne inférieure porte sur l'ensemble des $g \in G$ qui engendrent un sous-groupe distingué d'indice fini de G . Pour de tels éléments g , on montre que cela vaut aussi $\inf_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{|G:\langle g^k \rangle|} H(\mathcal{Q}_{g^k}^\alpha)$.

Nous rappelons que la notation \mathcal{Q}^F est réservée à l'action de T et on note $(\mathcal{Q} \circ U^m)_{m \in F}$ pour l'action de U (on confond partition et observable), pour éviter toute ambiguïté, comme nous l'avons expliqué dans la sous-partie 2.1.2. Rappelons également que si f est une observable, alors $|f|$ désigne la cardinal de son image (en ne comptant que les valeurs essentiellement prises par f), cela coïncide avec le cardinal de la partition associée (en enlevant les pièces négligeables).

Les preuves des lemmes 3.1 et 3.2 sont entièrement adaptées de celles de [KL22]. La preuve du lemme 3.3 est légèrement révisitée, elle fonctionne encore sous les hypothèses générales de l'article en question comme nous l'expliquerons en note de bas de page.

3.1 Partition uniforme

On a besoin en quelque sorte de faire un lien entre l'entropie mesurée d'un système et l'entropie topologique d'un certain facteur. En effet, pour démontrer le lemme 3.1, on devra faire apparaître l'entropie de U dans un majorant de l'entropie de T . Or l'entropie d'une partition peut se majorer par le logarithme de son cardinal, une quantité qui ressemble un peu à la définition de l'entropie topologique et qui nous fera apparaître la quantité

$$\lim \operatorname{inv}_{F \rightarrow \infty} \frac{1}{|F|} \log |(\mathcal{Q} \circ U^m)_{m \in F}|$$

(voir le commentaire qui suit l'énoncé du lemme 3.3). La notion de partition U -uniforme va beaucoup nous aider (voir par exemple [Gla03], chapitre 15, partie 8). C'est seulement pour cette notion que nous aurons besoin de l'ergodicité de U .

Etant données $U \in \operatorname{Aut}(X, \mu)$ et une partition \mathcal{Q} , on définit l'application de codage $q_{\mathcal{Q}}: x \in X \mapsto (\mathcal{Q}(U^i x))_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{Q}^{\mathbb{Z}}$, ainsi que $E_{\mathcal{Q}}$ le support de $\nu_{\mathcal{Q}} := (q_{\mathcal{Q}})_* \mu$. $E_{\mathcal{Q}}$ est fermé et invariant par le décalage $D_{\mathcal{Q}}: \mathcal{Q}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{Q}^{\mathbb{Z}}$. $(D_{\mathcal{Q}}, E_{\mathcal{Q}}, \nu_{\mathcal{Q}})$ est un facteur de (U, X, μ) via l'application équivariante $q_{\mathcal{Q}}$, et donc $h_{\mu}(U) \geq h_{\nu_{\mathcal{Q}}}(D_{\mathcal{Q}})$.

Si U est **ergodique**, on dit qu'une partition finie \mathcal{Q} est **U -uniforme** si la convergence dans le théorème ergodique ponctuel appliqué à chaque indicatrice des pièces de \mathcal{Q} est uniforme sur une partie mesurable de X de mesure pleine. C'est équivalent à l'unique ergodicité du système $(D_{\mathcal{Q}}, E_{\mathcal{Q}})$. Ainsi, dans le cas d'une partition finie \mathcal{Q} qui est U -uniforme, on a $h_{\nu_{\mathcal{Q}}}(D_{\mathcal{Q}}) = h_{\operatorname{top}}(D_{\mathcal{Q}})$ d'après le principe variationnel. Or dans $\mathcal{Q}^{\mathbb{Z}}$, la partition donnée par les cylindres est un recouvrement ouvert fini qui est topologiquement générateur donc $\frac{1}{|F|} \log |(\mathcal{Q} \circ U^i)_{i \in F}| \xrightarrow[F \rightarrow \infty]{\operatorname{inv}} h_{\operatorname{top}}(D_{\mathcal{Q}})$, d'après les résultats énoncés dans la partie 2.2.

Au total, on obtient que pour une partition finie \mathcal{Q} qui est U -uniforme, $\lim_{F \rightarrow +\infty} \operatorname{inv} \frac{1}{|F|} \log |(\mathcal{Q} \circ U^i)_{i \in F}|$ **existe et est plus petite que $h_{\mu}(U)$** .

On a également deux autres propriétés importantes qui nous seront utiles.¹³

1. Les partitions finies U -uniformes sont denses dans l'ensemble des partitions finies muni de la distance de Rokhlin $(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2) \mapsto H_{\mu}(\mathcal{Q}_1 | \mathcal{Q}_2) + H_{\mu}(\mathcal{Q}_2 | \mathcal{Q}_1)$. L'application $\mathcal{Q} \mapsto H_{\mu}(T, \mathcal{Q})$ étant continue sur l'ensemble des partitions finies muni de cette distance, **on peut donc se restreindre aux partitions finies U -uniformes dans la définition de $h_{\mu}(T)$** .
2. Enfin, **si \mathcal{P} est une partition U -uniforme et R une partie finie de \mathbb{Z} , alors \mathcal{P}^R est U -uniforme** (rappelons encore une fois qu'une partition jointe \mathcal{P}^R notée de cette façon concerne l'action de T et pas celle de U).

3.2 Démonstration du théorème 2.9

Nous commençons par démontrer le lemme 3.3, énonçant que pour deux éléments $T, U \in \operatorname{Aut}(X, \mu)$ ergodiques et ayant les mêmes orbites, $\kappa_T(\llbracket 0, n \rrbracket, x)$ est $(\{1\}, \delta)$ -invariante pour tout x dans une partie mesurable de mesure au moins $1 - \delta$.

¹³. Selon David KERR et Hanfeng LI dans [KL22], ces propriétés découlent du théorème de Jewett-Krieger dont la technicité de la preuve nous oblige à les admettre, elle fera l'objet d'une lecture attentive dans un futur proche, pour une meilleure compréhension.

3.2.1 Preuve du lemme 3.3

Preuve du lemme 3.3. ¹⁴ L'application $i \in \mathbb{Z} \mapsto \kappa_T(i, x) \in \mathbb{Z}$ étant injective, on obtient par exemple la propriété « $T^A x \subset T^B x \iff A \subset B$ » (idem pour U). En notant $F_n := \llbracket 0, n \rrbracket$, on obtient alors

$$\begin{aligned} |\{j \in \kappa_T(F_n, x) \mid 1 + j \in \kappa_T(F_n, x)\}| &= |\{i \in F_n \mid 1 + \kappa_T(i, x) \in \kappa_T(F_n, x)\}| \\ &= |\{i \in F_n \mid U^{1+\kappa_T(i, x)} x \in U^{\kappa_T(F_n, x)} x\}| \\ &= |\{i \in F_n \mid UT^i x \in T^{F_n} x\}| \\ &= |\{i \in F_n \mid T^{c_U(T^i x) + i} x \in T^{F_n} x\}| \\ &= |\{i \in F_n \mid c_U(T^i x) + i \in F_n\}|. \end{aligned}$$

On veut que $|\{i \in F_n \mid c_U(T^i x) + i \in F_n\}|$ soit plus grand que $(1 - \delta)|F_n|$. Après avoir remarqué que $|F_n| = |\kappa(F_n, x)|$, on obtiendra ainsi que $\kappa_T(F_n, x)$ est $(\{1\}, \delta)$ -invariante et il ne restera plus qu'à faire en sorte que ce soit le cas pour x appartenant à une partie de mesure au moins $1 - \delta$. Or pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ fixé, si on a $k \leq i \leq n - k$ et $c_U(T^i x) + i \notin F_n$, alors nécessairement $c_U(T^i x)$ n'est pas $\llbracket -k, k \rrbracket$. En comptant également les autres i (ceux dans $F_n \setminus \llbracket k, n - k \rrbracket$), on obtient

$$\begin{aligned} |\{i \in F_n \mid c_U(T^i x) + i \notin F_n\}| &\leq |\{i \in \llbracket k, n - k \rrbracket \mid |c_U(T^i x)| > k\}| + |F_n \setminus \llbracket k, n - k \rrbracket| \\ &\leq |\{i \in F_n \mid |c_U(T^i x)| > k\}| + 2k \\ &= \left(\sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{A_k}(T^i x) \right) + 2k \end{aligned}$$

avec $A_k := \{y \in X \mid |c_U(y)| > k\}$. Par le théorème ergodique L^2 et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $X_n := \{x \in X \mid \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{A_k}(T^i x) \leq \mu(A_k) + \delta/4\}$ est de mesure $\geq 1 - \delta$ pour n assez grand. Il suffit de fixer k assez grand de sorte que $\mu(A_k) \leq \delta/4$ et on obtient que pour n assez grand, pour tout x dans X_n (qui est de mesure $\geq 1 - \delta$), on a $\sum_{i=0}^n \mathbb{1}_{A_k}(T^i x) \leq (\delta/2)|F_n|$. On a $2k \leq (\delta/2)|F_n|$ pour n assez grand donc au total,

$$|\{j \in \kappa_T(F_n, x) \mid 1 + j \notin \kappa_T(F_n, x)\}| \leq \delta|F_n|,$$

ce qui conclut la preuve. \square

C'est seulement dans la preuve du lemme 3.3 qu'on utilise le cocycle c_U , c'est-à-dire le fait que les U -orbites sont incluses dans les T -orbites (à conjugaison près).

Question 3.4. *Si on ne sait rien de l'inclusion des U -orbites dans les T -orbites, que peut-on dire ?*

Par exemple, si T vaut U^k , pour $k \geq 2$ et pour U d'entropie non nulle, les T -orbites sont strictement incluses dans les U -orbites et on a $h(T) = kh(U)$ donc $h(T) > h(U)$. Cette inégalité a-t-elle toujours lieu lorsque le cocycle c_U n'existe pas ?

3.2.2 Preuve des lemmes 3.1 et 3.2

Enfin, démontrons les lemmes 3.1 et 3.2, le premier établissant l'inégalité voulue entre les entropies mais avec un terme supplémentaire qui est $\tilde{h}(\kappa_T)$, le second énonçant que ce terme est nul.

Preuve du lemme 3.1. Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \{0, k, 2k, \dots, (n-1)k\}$, $R = \llbracket 0, 1, \dots, k-1 \rrbracket$ et $F_n = R + I_n = \llbracket 0, nk-1 \rrbracket$ ¹⁵. (F_n) est une suite de Følner. Considérons une partition finie \mathcal{P} de X .

14. Une fois cette preuve lue, on peut réfléchir à une preuve dans le cas général où G est virtuellement cyclique. Cette fois-ci, il faut démontrer une (K, δ) -invariance pour K une partie finie de G . De même, on commence par montrer que $|\{h \in \kappa_\alpha(F_n, x) \mid Kh \in \kappa_\alpha(F_n, x)\}| = |\{g \in F_n \mid \kappa_\beta(K, \alpha(g)x)g \in F_n\}|$, en utilisant le fait que l'action est libre (la généralisation de l'apériodicité). Considérons une partie finie $G' \subset G$ et $E_n := \{g \in F_n \mid G'g \in F_n\}$. Alors on a $G'E_n \subset F_n$ par définition et $|E_n| \geq (1 - \delta/2)|F_n|$ pour n assez grand car F_n est de Følner donc $(G', \delta/2)$ -invariant pour n assez grand. G' et E_n sont l'analogue de $\llbracket -k, k \rrbracket$ et $\llbracket k, n - k \rrbracket$: si on a $g \in E_n$ et $\kappa_\beta(K, \alpha(g)x)g \notin F_n$, alors nécessairement on a $\kappa_\beta(K, \alpha(g)x) \notin G'$. En notant $A_{G'} := \{y \in X \mid \kappa_\beta(K, y) \notin G'\}$, on contrôle $\sum_{g \in F_n} \mathbb{1}_{A_{G'}}(\alpha(g)x)$ de même avec le théorème ergodique L^2 et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on prend G' assez grand pour que cette somme soit plus petite que $(\delta/2)|F_n|$ pour n assez grand et pour x dans un ensemble de mesure $\geq 1 - \delta$. Enfin, $|F_n \setminus E_n|$, l'analogue de $2k$, est plus petit que $(\delta/2)|F_n|$ pour n assez grand.

15. Dans [KL22], on considère $F_n = RI_n$ où $I_n = \{e, g, \dots, g^{n-1}\}$ avec $g \in G$ engendrant un sous-groupe distingué et d'indice fini, et R un système de représentant des classes modulo $\langle g \rangle$ (cf note 12 de bas de page sur la définition de $\tilde{h}(\kappa_\alpha)$ pour un groupe G virtuellement cyclique). La suite de la preuve s'adapte sans difficulté.

On veut faire apparaître U dans un majorant de $h(T, \mathcal{P})$. Pour cela, on va passer de l'action de T à l'action de U en utilisant la relation $T^l(\cdot) = U^{\kappa_T(l, \cdot)}(\cdot)$ et on va utiliser une partition telle que les exposants $\kappa_T(l, \cdot)$, pour certains l , soient constants sur chacune de ses pièces. Ainsi, conditionnellement à cette partition, on est en quelque sorte ramené au cas où T est une puissance de U . Cette partition est $(\mathcal{Q}_k^T)^{I_n}$, d'observable s'exprimant en partie en fonction de $\kappa_T(k, \cdot)$.

On a

$$h(T, \mathcal{P}) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{H(\mathcal{P}^{F_m})}{|F_m|} \leq \frac{H(\mathcal{P}^{F_n})}{|F_n|} \leq \frac{H(\mathcal{P}^{F_n} | (\mathcal{Q}_k^T)^{I_n})}{|F_n|} + \frac{H((\mathcal{Q}_k^T)^{I_n})}{|F_n|}$$

et le but est de majorer les deux termes de droite.

- $\frac{H((\mathcal{Q}_k^T)^{I_n})}{|F_n|} \leq \frac{|I_n| H(\mathcal{Q}_k^T)}{|F_n|} = \frac{H(\mathcal{Q}_k^T)}{k}$.
- Pour $H(\mathcal{P}^{F_n} | (\mathcal{Q}_k^T)^{I_n})$, on va utiliser la notation avec les observables (cf sous-partie 2.1.2) pour plus de visibilité sur l'information contenue. On a $\mathcal{P}^{F_n} = \mathcal{P}^{R+I_n} = (\mathcal{P}^R)^{I_n} = (\mathcal{P}^R \circ T^{jk})_{0 \leq j \leq n-1}$ donc

$$H(\mathcal{P}^{F_n} | (\mathcal{Q}_k^T)^{I_n}) = \sum_{C \in (\mathcal{Q}_k^T)^{I_n}} \mu(C) H_{\mu_C}((\mathcal{P}^{F_n})_C) = \sum_{C \in (\mathcal{Q}_k^T)^{I_n}} \mu(C) H_{\mu_C} \left(((\mathcal{P}^R \circ T^{jk})|_C)_{0 \leq j \leq n-1} \right)$$

Fixons $C \in (\mathcal{Q}_k^T)^{I_n}$. On a $\mathcal{Q}_k^T = \kappa_T(k, \cdot)$ donc $(\mathcal{Q}_k^T)^{I_n} = (\kappa_T(k, T^{ik} \cdot))_{0 \leq i \leq n-1}$ donc pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $\kappa_T(k, T^{ik} \cdot)$ est constant sur C . En utilisant (2), on a $\kappa_T(jk, \cdot) = \sum_{i=0}^{j-1} \kappa_T(k, T^{ik} \cdot)$. On obtient ainsi que $\kappa_T(jk, \cdot)$ est constant sur C pour tout $0 \leq j \leq n-1$ et donc que $T^{jk}|_C = U^{\kappa_T(jk, x_C)}|_C$ quel que soit x_C dans C , fixons un tel x_C . Au total, cela donne

$$((\mathcal{P}^R \circ T^{jk})|_C)_{0 \leq j \leq n-1} = \left((\mathcal{P}^R \circ U^{\kappa_T(jk, x_C)})|_C \right)_{0 \leq j \leq n-1} = ((\mathcal{P}^R \circ U^m)|_C)_{m \in \kappa_T(I_n, x_C)}.$$

I_n est inclus dans F_n donc $((\mathcal{P}^R \circ U^m)|_C)_{m \in \kappa_T(F_n, x_C)}$ raffine $((\mathcal{P}^R \circ U^m)|_C)_{m \in \kappa_T(I_n, x_C)}$, ainsi

$$\begin{aligned} H_{\mu_C} \left(((\mathcal{P}^R \circ T^{jk})|_C)_{0 \leq j \leq n-1} \right) &= H_{\mu_C} \left(((\mathcal{P}^R \circ U^m)|_C)_{m \in \kappa_T(I_n, x_C)} \right) \leq H_{\mu_C} \left(((\mathcal{P}^R \circ U^m)|_C)_{m \in \kappa_T(F_n, x_C)} \right) \\ &\leq \log \left| (\mathcal{P}^R \circ U^m)_{m \in \kappa_T(F_n, x_C)} \right|. \end{aligned}$$

Au total,

$$\frac{H(\mathcal{P}^{F_n} | (\mathcal{Q}_k^T)^{I_n})}{|F_n|} \leq \sum_{C \in (\mathcal{Q}_k^T)^{I_n}} \mu(C) \frac{\log \left| (\mathcal{P}^R \circ U^m)_{m \in \kappa_T(F_n, x_C)} \right|}{|F_n|} = \sum_{C \in (\mathcal{Q}_k^T)^{I_n}} \mu(C) \frac{\log \left| (\mathcal{P}^R \circ U^m)_{m \in \kappa_T(F_n, x_C)} \right|}{|\kappa_T(F_n, x_C)|}.$$

Maintenant, supposons en plus que \mathcal{P} est U -uniforme. Alors \mathcal{P}^R est également U -uniforme. D'après la partie 3.1, $\lim \operatorname{inv}_{F \rightarrow \infty} \frac{1}{|F|} \log \left| (\mathcal{P}^R \circ U^m)_{m \in F} \right|$ existe et est plus petite que $h(U)$. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $\delta > 0$ tel que $\frac{1}{|F|} \log \left| (\mathcal{P}^R \circ U^m)_{m \in F} \right| \leq h(U) + \varepsilon$ pour toute F qui est $(\{1\}, \delta)$ -invariante. La $(\{1\}, \delta')$ -invariance implique la $(\{1\}, \delta)$ -invariance dès que $\delta' < \delta$ donc on peut supposer $\delta \leq \varepsilon$ sans perte de généralité. D'après le lemme 3.3, pour n assez grand, on dispose de $X_n \subset X$ de mesure au moins $1 - \delta$ et tel que pour tout $x \in X_n$, $\kappa_T(F_n, x)$ est $(\{1\}, \delta)$ -invariante.

Séparons les C qui s'intersectent avec X_n des autres. Soit $\mathcal{C}_n = \{C \in (\mathcal{Q}_k^T)^{I_n} \mid C \cap X_n \neq \emptyset\}$. Alors on a $\mu(\bigcup_{C \in \mathcal{C}_n} C) \geq \mu(X_n) \geq 1 - \delta \geq 1 - \varepsilon$.

Pour les $C \notin \mathcal{C}_n$, on a

$$\sum_{C \in (\mathcal{Q}_k^T)^{I_n} \setminus \mathcal{C}_n} \mu(C) \frac{\log \left| (\mathcal{P}^R \circ U^m)_{m \in \kappa_T(F_n, x_C)} \right|}{|\kappa_T(F_n, x_C)|} \leq \sum_{C \in (\mathcal{Q}_k^T)^{I_n} \setminus \mathcal{C}_n} \mu(C) \frac{|\kappa_T(F_n, x_C)| \log |\mathcal{P}^R|}{|\kappa_T(F_n, x_C)|} \leq \varepsilon \log |\mathcal{P}^R|.$$

Pour les $C \in \mathcal{C}_n$, on avait fixé x_C dans C , on va de plus imposer que x_C soit dans $C \cap X_n$, de sorte que pour n assez grand, les $\kappa_T(F_n, x_C)$ soient toutes $(\{1\}, \delta)$ -invariantes, ce qui donne

$$\sum_{C \in \mathcal{C}_n} \mu(C) \frac{\log \left| (\mathcal{P}^R \circ U^m)_{m \in \kappa_T(F_n, x_C)} \right|}{|\kappa_T(F_n, x_C)|} \leq \sum_{C \in \mathcal{C}_n} \mu(C) (h(U) + \varepsilon) \leq h(U) + \varepsilon.$$

Au total, $h(T, \mathcal{P}) \leq \varepsilon \log |\mathcal{P}^R| + h(U) + \varepsilon + \frac{1}{k} H(\mathcal{Q}_k^T)$. En faisant tendre ε vers 0 et en prenant la borne inférieure sur $k \in \mathbb{N}^*$, cela donne $h(T, \mathcal{P}) \leq h(U) + \tilde{h}(\kappa_T)$. D'après la partie 3.1, on a l'égalité $h(T) = \sup_{\mathcal{P}} h_{\mu}(T, \mathcal{P})$ où la borne supérieure ne porte que sur les partitions finies \mathcal{P} qui sont U -uniformes. D'où le résultat. \square

Preuve du lemme 3.2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On veut un contrôle de $H(\mathcal{Q}_k^T)$ où \mathcal{Q}_k^T admet pour observable $\kappa_T(k, \cdot)$. Intuitivement, $H(\mathcal{Q}_k^T)$ mesure l'incertitude de la valeur de $\kappa_T(k, x)$ pour x inconnu dans X . Or $\kappa_T(k, x)$ vaut $c_T(x) + c_T(Tx) + \dots + c_T(T^{k-1}x)$ donc l'incertitude de la valeur de $\kappa_T(k, x)$ dépend de l'incertitude de la valeur de chaque $c_T(T^i x)$. La stratégie est d'utiliser la bonne partition \mathcal{P}_k pour que la majoration $H(\mathcal{Q}_k^T) \leq H(\mathcal{Q}_k^T | \mathcal{P}_k) + H(\mathcal{P}_k)$ ne soit pas trop grossière, au sens où la quantité $H(\mathcal{P}_k)/k$ ne soit pas trop grande et que sachant \mathcal{P}_k , on puisse lever un peu d'incertitude sur les $c_T(T^i x)$ pour que $H(\mathcal{Q}_k^T | \mathcal{P}_k)/k$ soit également petit. Nous allons trouver une telle partition conditionnellement à laquelle on sait que les $c_T(T^i x)$ prennent un nombre fini de valeurs et on s'autorisera à fixer la valeur de certains $c_T(T^i x)$ mais à titre exceptionnel pour que $H(\mathcal{P}_k)$ ne soit pas grande devant k (par exemple, on ne pourrait pas considérer $\mathcal{P}_k = (\mathcal{Q}_1^T)^k$, ce serait trop grossier).¹⁶

Pour $r > 0$, considérons l'observable $f_r := c_T \mathbb{1}_{c_T \notin \llbracket -r, r \rrbracket}$. Ou bien elle donne la valeur exacte de $c_T(x)$ si $c_T(x)$ est hors de $\llbracket -r, r \rrbracket$, ou bien elle informe que $c_T(x)$ est dans $\llbracket -r, r \rrbracket$ sans donner la valeur exacte. La partition \mathcal{P}_k que nous cherchons est celle associée à l'observable $(f_r \circ T^i)_{0 \leq i \leq k-1}$. Pour tout $0 \leq i \leq k-1$, ou bien elle donne la valeur exacte de $c_T(T^i x)$ si $c_T(T^i x)$ est hors de $\llbracket -r, r \rrbracket$, ou bien elle informe que $c_T(T^i x)$ est dans $\llbracket -r, r \rrbracket$ sans donner la valeur exacte.

Soit $\varepsilon > 0$. D'une part, pour r assez grand, on a $H(f_r) \leq \varepsilon$.¹⁷ Ainsi

$$H \left((f_r \circ T^i)_{0 \leq i \leq k-1} \right) \leq kH(f_r) \leq \varepsilon k.$$

D'autre part, pour $D \in (f_r \circ T^i)_{0 \leq i \leq k-1}$, on a $H_{\mu_D}((\mathcal{Q}_k^T)_D) \leq \log |(\mathcal{Q}_k^T)_D| = \log |\kappa_T(k, \cdot)_{|D}|$. Par définition de $(f_r \circ T^i)_{0 \leq i \leq k-1}$, les $c_T \circ T^i_{|D}$ prennent une seule valeur ou sont dans $\llbracket -r, r \rrbracket$. Donc $\kappa_T(k, \cdot)_{|D}$ prend au plus $(2r+1)k$ valeurs¹⁸. Ainsi $H_{\mu_D}((\mathcal{Q}_k^T)_D) \leq \log((2r+1)k)$. Pour k assez grand, on a $\log((2r+1)k) \leq \varepsilon k$ donc

$$H \left(\mathcal{Q}_k^T | (f_r \circ T^i)_{0 \leq i \leq k-1} \right) = \sum_{D \in (f_r \circ T^i)_{0 \leq i \leq k-1}} \mu(D) H_{\mu_D}((\mathcal{Q}_k^T)_D) \leq \varepsilon k.$$

Au total, on a $H(\mathcal{Q}_k^T) \leq H \left(\mathcal{Q}_k^T | (f_r \circ T^i)_{0 \leq i \leq k-1} \right) + H \left((f_r \circ T^i)_{0 \leq i \leq k-1} \right) \leq 2\varepsilon k$. \square

16. Dans le cas général, $\tilde{h}(\kappa_{\alpha}) = \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{|G:\langle g^k \rangle|} H(\mathcal{Q}_{g^k}^{\alpha})$ pour n'importe quel $g \in G$ engendrant un sous-groupe distingué d'indice fini. L'explication intuitive qui vient d'être donnée est encore valable avec g et g^k ayant respectivement le même rôle que 1 et k (donc on remplace c_T par $\kappa_{\alpha}(g, \cdot)$ et $\kappa_T(k, \cdot)$ par $\kappa_{\alpha}(g^k, \cdot)$).

17. Dans le cas général, on considère $B(r) = \{g \in G \mid |g|_G \leq r\}$ pour une métrique de mots fixée et on prend $f_r(x)$ qui vaut $\kappa(g, x)$ si $\kappa(g, x) \notin B(r)$ et une valeur particulière si $\kappa(g, x) \in B(r)$ (par exemple on avait pris 0 dans le cas \mathbb{Z}). De même, on prend r assez grand.

18. Dans le cas général d'un groupe H virtuellement abélien, cette borne sera plutôt de l'ordre de $e^{c|\Omega_D|} (rk)^j$, grâce à un lemme supplémentaire de dénombrement dans un groupe virtuellement abélien, où j est l'ordre de croissance polynomiale du groupe H (c'est-à-dire que le cardinal de $B_H(r) := \{h \in H \mid |h|_H \leq r\}$ est de l'ordre de r^j) et Ω_D est l'ensemble des $0 \leq i \leq k-1$ tels que $\kappa_{\alpha}(g, \alpha(g^i))_{|D}$ prend une seule valeur qui est hors de $B_H(r)$ (dans le cas $H = \mathbb{Z}$, on a $c = 0$ et $j = 1$). Lorsque qu'on applique le logarithme (voir la suite de la preuve), la puissance j ne modifie pas le raisonnement et l'exponentielle donne une quantité linéaire en $|\Omega_D|$. Il faut donc montrer que les D tels que $|\Omega_D| \geq \varepsilon k$ sont rares, pour cela on utilise principalement le théorème ergodique L^2 et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. En effet, en considérant R un système de représentants des classes modulo g , alors $F_k := \{e_G, g, \dots, g^{k-1}\} \cdot R$ est de Følner, ainsi $|\Omega_D|/k \leq (|R|/|F_k|) \sum_{g' \in F_k} \mathbb{1}_{X \setminus B_H(r)}(\kappa_{\alpha}(g, \alpha(g')x))$ pour $x \in D$ quelconque (par définition de D , c'est constant en x), cette dernière somme étant proche de $\mu(\kappa_{\alpha}(g, \cdot)^{-1}(X \setminus B_H(r)))$ pour n grand et pour beaucoup de x , puis on prend r assez grand pour que ce soit plus petit que ε .

4 Idée d'une autre preuve du théorème de KERR et LI, nouvelle preuve du théorème de BELINSKAYA

Une formule issue des méthodes employées dans [CJLT23] nous donne une piste pour une nouvelle preuve du théorème 2.9. Nous présentons cette idée à la fin de la partie 4.1. La piste n'aboutit pas, nous présentons tout de même la tentative dans la partie 4.2. Dans la partie 4.3, nous remarquons que nous pouvons modifier la technique employée lors de cette tentative pour obtenir une nouvelle preuve du théorème de BELINSKAYA.

4.1 Une formule à la base d'une nouvelle piste

Dans [CJLT23], les auteurs démontrent la préservation de la finitude de l'entropie par Shannon-OE en établissant le résultat asymétrique suivant.

Proposition 4.1. *Soient $T, U \in \text{Aut}(X, \mu)$ apériodiques telles que les T -orbites sont incluses dans les U -orbites. On suppose que le cocycle associé c_T , défini par la formule $Tx = U^{c_T(x)}x$ pour presque tout $x \in X$, est Shannon. Si $h(T)$ est finie, alors $h(U)$ est finie.*

Par symétrie, on obtient que si T et U sont Shannon-OE, alors T est d'entropie finie si et seulement si U l'est. L'ingrédient principal de la proposition 4.1 est le théorème suivant dû à ROKHLIN [Rok67].

Théorème 4.2 (Théorème des générateurs de ROKHLIN). *$h(T)$ est la borne inférieure des $H(f)$ pour les observables f T -génératrices¹⁹.*

Preuve de la proposition 4.1. Si $h(T)$ est finie, alors on dispose d'une observable f T -génératrice d'entropie de Shannon finie d'après le théorème des générateurs de ROKHLIN. On affirme alors que $(c_T, f): X \rightarrow \mathbb{Z} \times I$ est une observable U -génératrice. Donc $h(U) \leq H((c_T, f)) \leq H(c_T) + H(f) < +\infty$.

Il reste à montrer que $(c_T, f): X \rightarrow \mathbb{Z} \times I$ est U -génératrice. Considérons $x, y \in X$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_T(U^n x) = c_T(U^n y), \quad (6)$$

$$f(U^n x) = f(U^n y). \quad (7)$$

On montre d'abord que (6) implique : $\kappa_T(j, x) = \kappa_T(j, y)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Pour cela, il suffit de montrer par récurrence forte sur $j \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\kappa_T(j, U^n x) = \kappa_T(j, U^n y)$ (ce qui donne ce qu'on veut en prenant $n = 0$ et en appliquant (1) pour obtenir le résultat pour les j négatifs).

- Le résultat est au rang $j = 1$ est exactement (6).
- Supposons le résultat vrai aux rangs $1, \dots, j$ et montrons-le au rang $j + 1$. En utilisant l'identité de cocycle, on obtient

$$\kappa_T(j + 1, U^n x) = c_T(U^n x) + \kappa_T(j, TU^n x) = c_T(U^n x) + \kappa_T(j, U^{c_T(U^n x) + n} x).$$

L'hypothèse de récurrence implique d'abord $c_T(U^n x) = c_T(U^n y)$, puis $\kappa_T(j, U^k x) = \kappa_T(j, U^k y)$ pour $k = c_T(U^n y) + n$. Cela donne donc $\kappa_T(j + 1, U^n x) = \kappa_T(j + 1, U^n y)$.

D'où la récurrence. En utilisant cela et (7), on obtient

$$f(T^j x) = f(U^{\kappa_T(j, x)} x) = f(U^{\kappa_T(j, y)} x) = f(U^{\kappa_T(j, y)} y) = f(T^j y).$$

f est T -génératrice donc x et y sont égaux (à un négligeable près, car il y a un « presque partout » dans la définition d'une observable f T -génératrice). Ceci démontre que (c_T, f) est une observable U -génératrice. \square

Dans cette preuve, on a montré $h(U) \leq H(c_T) + H(f)$ pour f T -génératrices. En passant donc à la borne inférieure sur f , cela donne

$$h(U) \leq H(c_T) + h(T)$$

d'après le théorème des générateurs de ROKHLIN.

19. Une observable $f: X \rightarrow I$, I dénombrable, est T -génératrice si pour presque tous $x, y \in X$ distincts, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f(T^n(x)) \neq f(T^n(y))$. En terme de partitions (voir la sous-partie 2.1.2 pour la correspondance partition-observable), cela signifie qu'à un certain instant $n \in \mathbb{Z}$, $T^n x$ et $T^n y$ ne sont pas dans la même pièce de la partition associée à f .

Si en plus T et U ont les mêmes orbites, et si c_T est toujours Shannon, le théorème 2.9 de KERR et LI énonce qu'on a

$$h(T) \leq h(U),$$

l'inégalité est donc dans l'autre sens.

En fait, on remarque qu'on peut reprendre les idées de la preuve que nous venons de présenter pour obtenir un énoncé semblable avec l'inégalité dans le même sens que le théorème de KERR et LI.

Proposition 4.3. *Soient $T, U \in \text{Aut}(X, \mu)$ apériodiques ayant les mêmes orbites et telles que le cocycle c_T , associé à l'OE id_X , est Shannon. Alors $h(T) \leq h(U) + H(c_T)$.*

Preuve de la proposition 4.3. Etant donnée $f: X \rightarrow I$ une observable U -génératrice, nous affirmons que $(c_T, f): X \rightarrow \mathbb{Z} \times I$ est T -génératrice. Admettant cela, nous obtenons $h(T) \leq H((c_T, f)) \leq H(c_T) + H(f)$ puis on passe à la borne inférieure sur les f U -génératrices pour obtenir le résultat.

Il reste à montrer que l'observable (c_T, f) est T -génératrice. Considérons donc $x, y \in X$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_T(T^n x) = c_T(T^n y) \text{ et } f(T^n x) = f(T^n y).$$

L'identité de cocycle (2) donne directement $\kappa_T(n, x) = \kappa_T(n, y)$ (cette étape de la preuve est beaucoup plus évidente que dans la preuve précédente). Ainsi pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$f(U^{\kappa_T(n, x)} x) = f(T^n x) = f(T^n y) = f(U^{\kappa_T(n, y)} y) = f(U^{\kappa_T(n, x)} y).$$

$n \in \mathbb{Z} \mapsto \kappa_T(n, x) \in \mathbb{Z}$ est une bijection donc on a $f(U^j x) = f(U^j y)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$. On conclut en utilisant le fait que f est U -génératrice. \square

Ainsi, en utilisant le résultat de la proposition 4.3, nous nous demandons s'il est possible de diminuer $H(c_T)$. Plus précisément, pour $\varepsilon > 0$, s'il existe une OE φ entre T et U telle que le cocycle associé c_T est d'entropie plus petite que ε , alors $h(T) \leq h(\varphi^{-1}U\varphi) + \varepsilon = h(U) + \varepsilon$. Si c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, alors $h(T) \leq h(U)$.

On cherche donc un mécanisme pour se ramener sans perte de généralité à un cocycle c_T d'entropie arbitrairement petite. Par « mécanisme », on entend tout moyen de construire une équivalence orbitale dont le cocycle c_T est d'entropie aussi petite qu'on veut. Cela constituerait une nouvelle preuve du théorème de KERR et LI, même un renforcement puisque l'hypothèse n'est pas symétrique et donnerait une égalité entre les entropies.

4.2 Une tentative de diminution d'entropie du cocycle

Nous présentons ici une tentative infructueuse pour diminuer l'entropie. On trouvera quand même des idées et notions utiles pour démontrer le théorème de BELINSKAYA dans la partie suivante.

4.2.1 Relations d'ordres sur les orbites

Considérons $T, U \in \text{Aut}(X, \mu)$ ergodiques et ayant les mêmes orbites. Chaque orbite sur laquelle T et U sont apériodiques, c'est-à-dire presque toute orbite, est munie de relations d'ordre totale \leq_T et \leq_U . Etant donnée une orbite \mathcal{O} (qui est à la fois une T - et une U -orbite), \leq_T est définie par

$$\forall x, y \in \mathcal{O}, x \leq_T y \iff y \in T^{\mathbb{N}}x.$$

On notera $x <_T y$ si $x \leq_T y$ et $x \neq y$. Pour $x, y \in \mathcal{O}$, on définit

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}]_T := \begin{cases} \{z \in \mathcal{O} \mid x \leq_T z \leq_T y\} & \text{si } x \leq_T y \\ \{z \in \mathcal{O} \mid y \leq_T z \leq_T x\} & \text{si } y \leq_T x \end{cases}.$$

Autrement dit, si $y = T^n x$, alors

$$[x, y]_T := \begin{cases} \{x <_T Tx <_T \dots <_T T^{n-1}x <_T T^n x = y\} & \text{si } n \geq 0 \\ \{y = T^n x <_T T^{n+1}x <_T \dots <_T T^{-1}x <_T x\} & \text{si } n \leq 0 \end{cases}.$$

On définit aussi $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]_T = [x, y]_T \setminus \{x\}$ etc. On appelle ces ensembles des **T-intervalles**.

Sur une orbite fixée, \leq_T et \leq_U ne sont pas les mêmes relations d'ordre et les cocycles c_T et c_U expriment cette différence. En effet, d'après la relation $Tx = U^{c_T(x)}x$, on a $Tx >_T x$ tout en ayant $Tx <_U x$ si $c_T(x) < 0$. Nous allons étudier \leq_T du point de vue de \leq_U , en utilisant c_T .

De manière très informelle, l'idée serait de relier $H(c_T)$ au désordre de \leq_T par rapport à \leq_U . Peut-être que diminuer $H(c_T)$ revient à faire en sorte que les deux relations d'ordre soient égales sur un ensemble de mesure arbitrairement grande. On veut « démêler » le fil rouge (voir la figure 5) représentant la dynamique de T du point de vue de la relation d'ordre \leq_U , pour qu'il ressemble de plus en plus au fil qui passe de x à Ux pour tout x (la structure la plus ordonnée).

4.2.2 Définition d'une procédure P_A^T

Le « démêlage », introduit dans le dernier paragraphe de la sous-partie précédente, peut être vu comme un problème de conjugaison, la figure 9 permet de s'en convaincre.

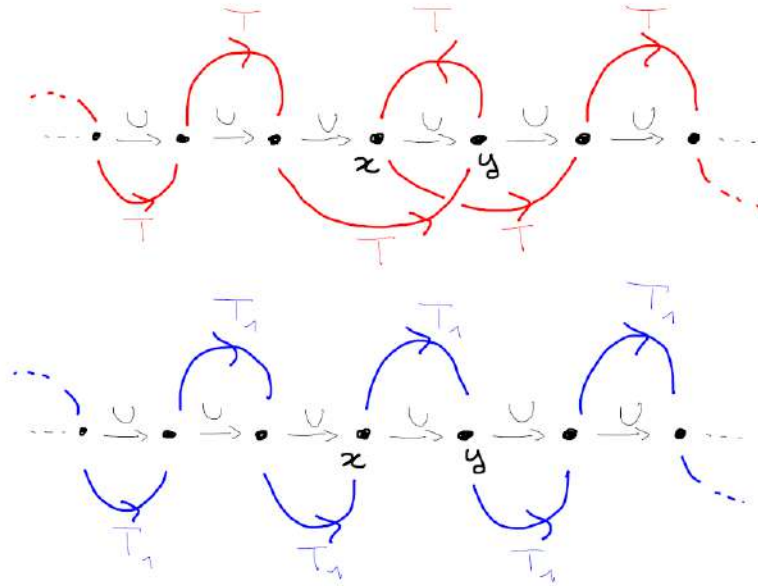


FIGURE 9 – Sur une orbite qu'on a fixée, supposons que T vérifie $Tz = Uz$ pour tout z sauf les éléments x, y et $U^{-1}(x)$, voir le dessin du dessus (évidemment il peut se passer des choses bien plus chaotiques sur une orbite, cet exemple n'est pas réaliste, il a seulement pour but d'expliquer l'idée de départ). On a une anomalie, une boucle qu'on veut démêler. Posons φ qui échange x et y et agit comme l'identité sur les autres points de l'orbite. En posant $T_1 := \varphi T \varphi^{-1}$, on vérifie qu'on a $T_1 z = Uz$ pour tout z dans l'orbite. Du point de vue de la dynamique de U sur l'orbite, T_1 est plus claire que T . En conjuguant, nous sommes parvenus à démêler la boucle qui apportait un peu de désordre.

Nous allons construire T_1 , conjugué à T et ayant les mêmes orbites, en appliquant la procédure P_A^T que nous définissons ici, pour A mesurable tel que $\mu(A) > 0$. L'orbite va être découpée en plusieurs portions sur lesquelles nous allons construire T_1 en conjuguant comme dans la figure 9.

T est ergodique et A n'est pas négligeable donc l'ensemble mesurable

$$X_A^T := \{x \in X \mid T^{\mathbb{N}}x \cap A \text{ et } T^{-\mathbb{N}}x \cap A \text{ sont infinis}\}$$

est de mesure pleine et presque toute orbite est incluse dans X_A^T . Soit \mathcal{O} une orbite incluse dans X_A^T . \mathcal{O} se partitionne en de multiples T -intervalles $[a_i, b_i]_T$, $i \in \mathbb{Z}$, avec $Tb_i = a_{i+1}$ pour tout i et $\mathcal{O} \cap A = \{b_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$. A noter que si $A \cap T(A)$ est non vide, alors on a $a_i = b_i$ pour certains i , certaines portions peuvent donc être des singletons. On dit que \mathcal{O} est partitionnée par les retours en A , on dit que $x, y \in \mathcal{O}$ sont séparés par un retour en A s'ils ne sont pas dans le même T -intervalle de cette partition, autrement dit s'il existe $z \in A$ tel que $x \leq_T z <_T y$.

Sur chaque T -intervalle $[a_i, b_i]_T$, on définit l'unique application strictement croissante $\varphi: ([a_i, b_i]_T, \leq_T) \rightarrow ([a_i, b_i]_T, \leq_U)$, ce qui donne une bijection $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ puis une bijection $\varphi: X \rightarrow X$ définie presque partout. Enfin

on définit T_1 vérifiant $T_1\varphi = \varphi T$ presque partout. On vérifie immédiatement que φ et T_1 sont dans $\text{Aut}(X, \mu)$ et que T_1 est ergodique et a les mêmes orbites que T et U , ce qui définit $c_{T_1} : X \rightarrow \mathbb{Z}$ par $T_1x = U^{c_{T_1}(x)}x$.

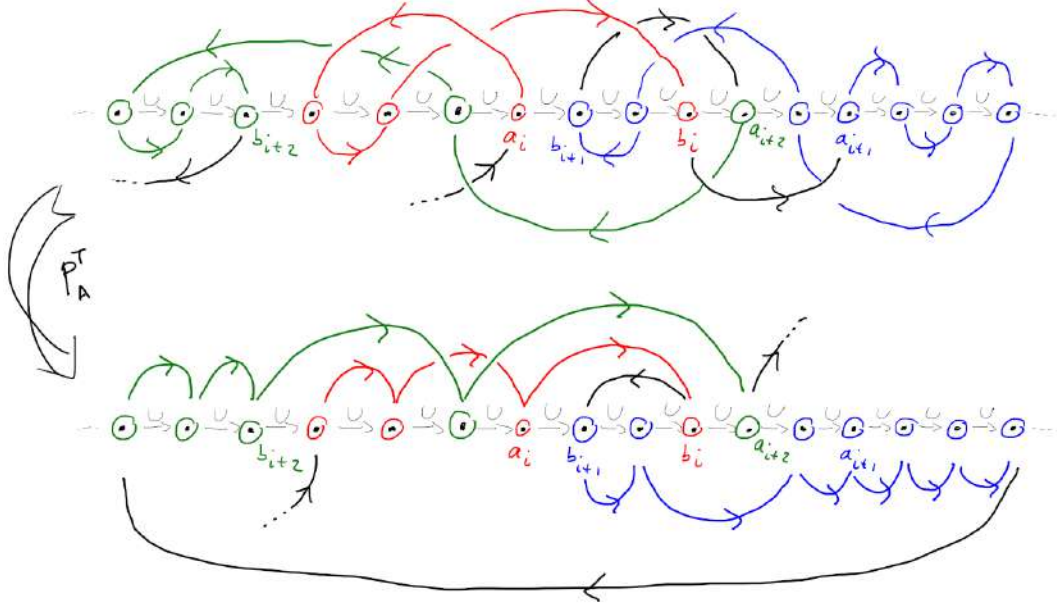


FIGURE 10 – Les points rouges sont les points de l’orbite appartenant à $[a_i, b_i]_T$, on a les points bleus pour $[a_{i+1}, b_{i+1}]_T$ et les points verts pour $[a_{i+2}, b_{i+2}]_T$. Les flèches sont coloriées en noir lorsque la transformation en question fait changer de portion.

Au-dessus, on représente la dynamique de T sur l’orbite (du point de vue de la dynamique de U). En dessous, on représente la dynamique de T_1 , transformation construite avec la procédure P_A^T . Cette procédure permet d’avoir T_1 conjuguée à T , ayant les mêmes orbites et qui va dans le même sens que U sur chaque portion $[a_n, b_n]_T$.

Intuitivement, φ rétablit sur chaque $[a_i, b_i]_T$ l’ordre \leq_U défini par U et remet (à conjugaison près) la dynamique de T dans le sens de la dynamique de U . Cela ne garantit pas un nouveau cocycle c_{T_1} constant égal à 1 presque partout (puisque T et U n’ont aucune raison d’être conjugués), en revanche on peut choisir A de mesure arbitrairement petite pour que $\{c_{T_1} = 1\}$ soit de mesure arbitrairement grande.

4.2.3 Un résultat insuffisant pour répondre au problème

Proposition 4.4. *Soient $T, U \in \text{Aut}(X, \mu)$ ergodiques et ayant les mêmes orbites. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T_1 \in \text{Aut}(X, \mu)$ conjugué à T , ayant les mêmes orbites que T et telle que $\mu(\{c_{T_1} = 1\}) > 1 - \varepsilon$, où c_{T_1} est le cocycle défini par la formule $T_1x = U^{c_{T_1}(x)}x$.*

Preuve de la proposition 4.4. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(|c_U| > n) < \varepsilon/2$. Soit A un mesurable de X tel que $0 < \mu(A) < \varepsilon/(2(2n + 1))$ (c’est possible car (X, μ) est sans atome). On applique la procédure P_A^T , ce qui nous donne φ et T_1 . On définit

$$B := \{|c_U| \leq n\} \cap \bigcap_{-n \leq i \leq n} T^i(A^c).$$

Soit $x \in B$. Supposons par exemple $c_U(x) > 0$. Par définition de B , $x, Tx, \dots, T^n x$ ne sont pas dans A donc sont dans le même T -intervalle de la partition obtenue selon les retours en A . Ux est parmi les éléments $Tx, \dots, T^n x$ car on a $0 < c_U(x) \leq n$, donc Ux est le plus petit élément, pour la relation d’ordre \leq_U , de ce T -intervalle parmi les majorants de x . Par construction de φ lors la procédure, on a $T_1x = Ux$.

Ainsi $\{c_{T_1} = 1\}$ contient B et donc

$$\mu(\{c_{T_1} = 1\}^c) \leq \mu(|c_U| > n) + \sum_{-n \leq i \leq n} \mu(T^i(A)) = \mu(|c_U| > n) + (2n + 1)\mu(A) < \varepsilon,$$

ce qu’on voulait. □

Malheureusement, on ne peut pas contrôler $H(c_{T_1})$, connaissant $\mu(c_{T_1} = 1)$.

Notons que la proposition 4.4 n'a rien de nouveau, elle peut également s'obtenir comme corollaire du lemme de Rokhlin (énoncé dans la partie 5.1, voir le théorème 5.2). Cependant, la preuve que nous avons présentée est plus constructive et plus explicite, on a donc plus espoir de contrôler les grandes valeurs de $|c_{T_1}|$.

Une autre idée serait de plutôt prendre A de la forme $\{|c_T| > j\}$ pour j assez grand²⁰ mais nous ne parvenons pas non plus à obtenir un contrôle. Enfin, nous voulons absolument que c_{T_1} vale 1 sur un ensemble très grand, mais pourquoi pas un grand entier k positif au lieu de 1 ? On pourrait à l'inverse défavoriser les petites valeurs du cocycle pour diminuer son entropie.

Un autre point important est qu'il n'est peut-être pas possible de diminuer l'entropie du cocycle c_T pour T quelconque. En effet, n'oublions pas que la proposition 4.1 nous donne l'inégalité dans l'autre sens. Ainsi cela impliquerait $h(T) = h(U)$. Or il est raisonnable de penser qu'il existe des éléments $T, U \in \text{Aut}(X, \mu)$ ergodiques, admettant les mêmes orbites et tels que $h(T) < h(U)$ et $H(c_T) < +\infty$ ²¹, donc il serait impossible de diminuer $H(c_T)$ autant qu'on veut.

Il serait donc plus raisonnable, connaissant le théorème 2.9, de tenter de diminuer $H(c_T)$ tout en sachant que $H(c_U)$ est finie (dans les idées que nous venons de présenter, c_U intervient dans la preuve de la proposition 4.4, il faut voir si on peut faire intervenir son entropie). Dans ce cas, nous n'aurons pas un énoncé asymétrique comme dans le théorème de KERR et LI, seulement la préservation de l'entropie par Shannon-OE.

4.3 Nouvelle preuve du théorème de BELINSKAYA

Avec les notations de la proposition 4.4 et en notant φ la conjugaison entre T et T_1 , on obtient

$$\varphi T \varphi^{-1} x = U x$$

sur une partie de mesure plus grande que $1 - \varepsilon$.

Nous voulons appliquer plusieurs fois la procédure pour des choix judicieux de $A_0 = A$, A_1 , A_2 , ... On notera $\varphi_0 = \varphi$, φ_1 , φ_2 , ... et $T_0 = T$, T_1 , T_2 , ... les données obtenues au fur et à mesure des procédures. Autrement dit, si T_n est construit, $P_{A_n}^{T_n}$ donne φ_n et T_{n+1} .

Si $\mu(c_{T_n} = 1)$ tend vers 1, alors pour presque tout $x \in X$, on a $\psi_n^{-1} T \psi_n(x) = U(x)$ pour n assez grand, avec $\psi_n = \varphi_0^{-1} \circ \dots \circ \varphi_{n-1}^{-1}$. Il reste à faire en sorte que $\psi_n(x)$ stationne à $\psi(x)$ avec $\psi \in \text{Aut}(X, \mu)$, pour obtenir $\psi^{-1} T \psi = U$ presque partout, nous allons pouvoir le faire si c_T est intégrable.

4.3.1 L'hypothèse d'intégrabilité du cocycle et ses conséquences

Soient $T, U \in \text{Aut}(X, \mu)$ ergodiques et admettant les mêmes orbites. On suppose que c_T est intégrable. Grâce au théorème ergodique ponctuel, cette hypothèse va nous fournir une information asymptotique cruciale de la dynamique de T dans les orbites, du point de vue de la relation d'ordre \leq_U .

Lemme 4.5. *Avec les hypothèses ci-dessus, $\int c_T d\mu$ est non nul.*

Preuve du lemme 4.5. Par l'absurde, la moyenne est nulle. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. On a $T^n x = U^{\kappa_T(n,x)} x$ avec

$$\kappa_T(n, x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} c_T(T^i x) & \text{si } n \geq 0 \\ - \sum_{i=1}^{|n|} c_T(T^{-i} x) & \text{si } n \leq 0 \end{cases}.$$

D'après le théorème ergodique ponctuel, on a pour presque tout $x \in X$, $\frac{1}{|n|} \kappa_T(n, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int c_T d\mu = 0$. Considérons x vérifiant cela. On a $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n tel que $|n| \geq N$, $|\kappa_T(n, x)| \leq \varepsilon |n|$. Si on considère $j \in \mathbb{N}$ tel que

20. La partie mesurable A doit être de mesure non nulle donc dans le cas où c_T est borné (et donc intégrable), on conclut directement avec le théorème de BELINSKAYA.

21. L'étude topologique de l'ensemble de ces T (à U fixé) pourrait nous fournir des familles de transformations qui sont génériques (c'est-à-dire qui forment un G_δ dense), notamment des familles de transformations d'entropie nulle (par exemples les transformations de rang 1 que nous présentons dans la partie 5.2). Cela n'a pas été vérifié mais a des chances d'être vrai, étant donnés des résultats classiques de recherches d'éléments génériques.

$N \leq |n| \leq j$, on a donc $|\kappa_T(n, x)| \leq \varepsilon|n| \leq \varepsilon j$, ce qui donne $\{\kappa_T(n, x) \mid N \leq |n| \leq j\} \subset \llbracket -\varepsilon j, \varepsilon j \rrbracket$. L'ensemble de droite est de cardinal équivalent à $2\varepsilon j$ lorsque $j \rightarrow +\infty$ et l'ensemble de gauche est de même cardinal que $\{n \in \mathbb{Z} \mid N \leq |n| \leq j\}$ par apériodicité, donc de cardinal équivalent à $2j$. C'est absurde car $\varepsilon < 1$. \square

Quitte à remplacer U par U^{-1} , on supposera $\int c_T d\mu > 0$ et le but sera de montrer que T et U sont conjugués.

Lemme 4.6. *On dispose d'applications mesurables $y_-, y_+ : X \rightarrow X$ vérifiant pour presque tout $x \in X$,*

1. $y_-(x)$ et $y_+(x)$ sont dans $\text{Orb}_T(x)$ et $y_-(x) <_T x <_T y_+(x)$;
2. $T^{-N}y_- <_U x$ et $T^Ny_+ >_U x$.

En particulier, $y_-(x) <_U x <_U y_+(x)$.

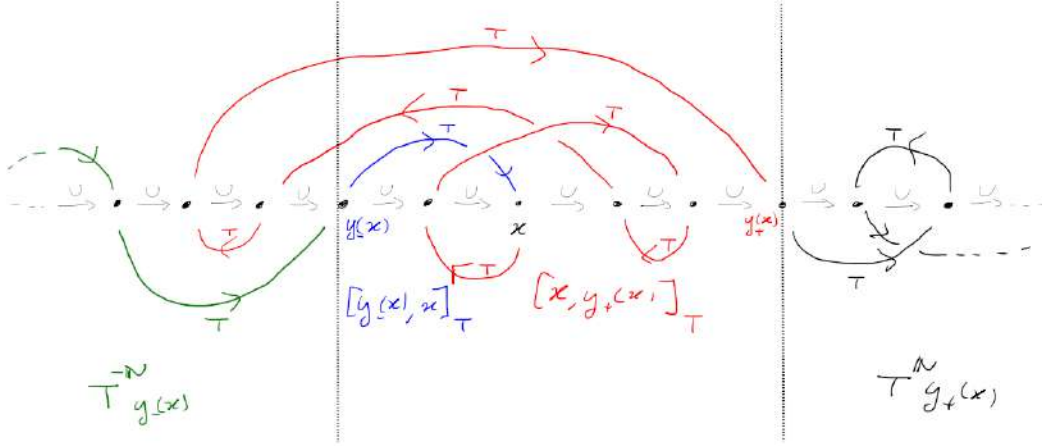


FIGURE 11 – Illustration de $y_+(x)$ et $y_-(x)$. Pour la dynamique de T , dès qu'on a dépassé $y_+(x)$, on est irrévérablement \leq_U -plus grand que x . Dans le sens inverse, dès qu'on a dépassé $y_-(x)$, on est irrévériblement \leq_U -plus petit que x .

Preuve du lemme 4.6. Par le théorème ergodique ponctuel, l'ergodicité et le fait que $\int c_T d\mu > 0$, on a

$$\kappa_T(n, x) \begin{cases} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \\ \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} -\infty \end{cases}$$

pour presque tout $x \in X$. Autrement dit, pour presque tout x , $\kappa_T(n, x) \geq 1$ et $\kappa_T(-n, x) \leq -1$ pour n assez grand, c'est-à-dire $T^n x >_U x$ et $T^{-n} x <_U x$ pour n assez grand. On définit donc $n_+(x) := \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid T^{n+N} x >_U x\}$ et $n_-(x) := \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid T^{-(n+N)} x <_U x\}$. n_+ et n_- sont définis presque partout et mesurables. Les applications $y_+(\cdot) := T^{n_+(\cdot)}(\cdot)$ et $y_-(\cdot) := T^{-n_-(\cdot)}(\cdot)$ conviennent. \square

Cela ne nous servira pas mais nous pouvons préciser le lemme 4.5. Intuitivement, si on avait $\int c_T d\mu = 2$, alors la T -orbite d'un élément x serait approximativement sa U^2 -orbite, ce qui pose un problème d'égalité des orbites. Enfin si on avait $\int c_T d\mu = 1/2$, alors $\llbracket T^{-2n}x, T^{2n}x \rrbracket_T$ serait approximativement $\llbracket U^{-n}x, U^n x \rrbracket_U$, ce qui pose problème car le premier ensemble a deux fois plus d'éléments que le second par apériodicité, il n'y a pas assez de place. Voici l'énoncé et sa preuve.

Lemme 4.7. $\int c_T d\mu \in \{-1, 1\}$.

Preuve du lemme 4.7. Notons $\lambda := \int c_T d\mu$. Par exemple, λ est strictement positif et nous allons montrer que cela vaut 1. D'après le théorème ergodique ponctuel, $\kappa_T(j, x) \sim \lambda j$ lorsque $j \rightarrow \pm\infty$, pour presque tout $x \in X$. Considérons un tel x . Pour $\varepsilon \in]0, \lambda[$, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$|j| \geq N \implies |\kappa_T(j, x) - \lambda j| \leq \varepsilon |j|.$$

— Pour $N \leq j \leq n$, on a $0 < (\lambda - \varepsilon)j \leq \kappa_T(j, x) \leq (\lambda + \varepsilon)j \leq (\lambda + \varepsilon)n$ et donc

$$\{\kappa_T(j, x) : N_2 \leq j \leq n\} \subset \llbracket 0, (\lambda + \varepsilon)n \rrbracket.$$

L'ensemble de gauche (resp. de droite) est de cardinal équivalent à n par apériodicité (resp. $(\lambda + \varepsilon)n$) donc $1 \leq \lambda + \varepsilon$ et donc $1 \leq \lambda$ car ε est arbitraire.

— Enfin, pour $N \leq n \leq |j|$, on a

$$\begin{cases} \kappa_T(j, x) \geq (\lambda - \varepsilon)j \geq (\lambda - \varepsilon)n & \text{si } j \geq 0 \\ \kappa_T(j, x) \leq (\lambda - \varepsilon)j \leq -(\lambda - \varepsilon)n & \text{si } j \leq 0 \end{cases}.$$

Donc on obtient

$$\{j \in \mathbb{N} \mid |\kappa_T(j, x)| < (\lambda - \varepsilon)n\} \subset \llbracket -n, n \rrbracket.$$

L'ensemble de gauche (resp. de droite) est de cardinal équivalent à $2(\lambda - \varepsilon)n$ par apériodicité (resp. $2n$) donc $2(\lambda - \varepsilon) \leq 2$ et donc $\lambda \leq 1$ car ε est arbitraire. □

Une conclusion plus précise du théorème de BELINSKAYA est la suivante.

$$\text{Pour } \varepsilon = \int c_T d\mu \in \{-1, 1\}, T \text{ et } U^\varepsilon \text{ sont conjugués.}$$

4.3.2 Propriété des procédures P_A^T

Appliquant à l'étape i la procédure $P_{A_i}^{T_i}$ pour obtenir certaines propriétés (notamment $T_{i+1}x = Ux$ pour « beaucoup » de x), nous aimerions qu'elles se conservent lorsqu'on applique ensuite $P_{A_{i+1}}^{T_{i+1}}, P_{A_{i+2}}^{T_{i+2}}, P_{A_{i+3}}^{T_{i+3}}, \dots$. Ici donc nous présentons les propriétés que nous pouvons obtenir à partir de ces procédures, ainsi que la manière de les préserver.

Proposition 4.8. 1. Etant donnée une orbite $\mathcal{O} \subset X_A^T$, sa partition $[a_i, b_i]_T$ associée lors de la procédure P_A^T et $x, y \in \mathcal{O}$, si $x \in [a_i, b_i]_T$ et $y \in [a_j, b_j]_T$ pour $i < j \in \mathbb{Z}$, alors $x <_T y$ et $x <_{T_1} y$.

2. y_- et y_+ satisfont la propriété du lemme 4.6 relativement à T_1 (et donc relativement à T_2, T_3, \dots quand on applique ensuite $P_{A_2}^{T_2}, P_{A_3}^{T_3}, \dots$).

3. Soit $x \in X_A^T$, $\mathcal{O} := \text{Orb}_T(x)$ et I_x le plus petit T -intervalle contenant $[y_-(x), y_+(x)]_U$. Si on applique la procédure P_A^T pour A tel que I_x est inclus dans A^c ²² (cela se produit si A est suffisamment rare), alors

- (a) pour tout $z \in [y_-(x), y_+(x)]_U$, $c_{T_1}(z) = 1$ (en particulier $c_{T_1}(x) = 1$ et $[y_-(x), y_+(x)]_U = [y_-(x), y_+(x)]_{T_1}$);
- (b) de plus, si on applique ensuite la procédure $P_{A_1}^{T_1}$ pour $A_1 \subset \{c_{T_1} \neq 1\}$, alors la propriété 3a est conservée (pour tout $z \in [y_-(x), y_+(x)]_U$, $c_{T_2}(z) = 1$) et on a en plus $\varphi_1(x) = x$.

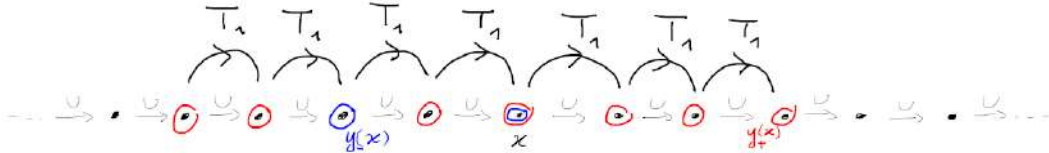


FIGURE 12 – Reprenons l'exemple de la figure 11. Les points bleus (resp. rouges) sont les éléments de $[y_-(x), x]_T$ (resp. $[x, y_+(x)]_T$). Si on choisit I_x comme dans l'assertion 3 de la proposition 4.8, alors I_x vaut exactement l'ensemble des points bleus ou rouges, ce qui donne T_1 qui ne fait que des sauts de 1 dans cette région de l'orbite. Par définition de y_+ et de y_- , si z_+ (resp. z_-) est le point colorié le plus à droite (resp. le plus à gauche), alors $T_1^{\mathbb{N}}(z_+)$ reste à droite de z_+ (resp. $T_1^{\mathbb{N}}(z_-)$ reste à droite de z_-). Ainsi $\varphi_1(x) = x$ si les points coloriés ne sont pas séparés par un retour en A_1 .

²² I_x a le même rôle que $[x, Ux]_T$ dans la preuve de la proposition 4.4, on voulait que cet intervalle soit inclus dans A^c . Il s'agissait en fait du plus petit T -intervalle contenant $[x, Ux]_U$, maintenant nous considérons le plus petit T -intervalle contenant $[y_-(x), y_+(x)]_U$.

- Preuve de la proposition 4.8.* 1. On sait qu'on a $x <_T y$, par définition des T -intervalles de la partition en retours en A . Montrons $x <_{T_1} y$. Pour la relation d'ordre \leq_U , notons x' le plus grand élément de $[a_i, b_i]_T$ et y' le plus petit élément de $[a_j, b_j]_T$. Par définition de T_1 , on a $x \leq_{T_1} x'$ et $y' \leq_{T_1} y$. De plus, on a $x' \leq_T y'$. En effet, on remarque que $T_1 x'$ est le plus petit élément de l'intervalle d'après, soit $[a_{i+1}, b_{i+1}]_T$. Si $j = i + 1$, alors $T_1 x' = y'$. Si $j > i + 1$, alors on peut raisonner par récurrence avec $T_1 x'$ et y' au lieu de x et y .
2. Démontrons-le pour y_+ par exemple. Prenons x dans X_A^T et dans un ensemble mesurable de mesure 1 sur lequel $y_+(x)$ vérifie les hypothèses du lemme. Notons l'unique $i \in \mathbb{Z}$ tel que $y_+(x) \in [a_i, b_i]_T$. Soit $z \in \text{Orb}_T(x)$ vérifiant $z \geq_{T_1} y_+(x)$. Alors $z \in [a_j, b_j]_T$ pour un certain $j \geq i$ (d'après 1). Si $j > i$, alors $z >_T y_+(x)$ donc $z >_U x$ d'après la propriété vérifiée par $y_+(x)$. Si $j = i$, alors par construction de T_1 , on a $z \geq_U y_+(x)$ donc $z >_U x$.
3. L'hypothèse sur A , la construction des T -intervalles de la partition de l'orbite et le fait que I_x soit un T -intervalle impliquent que I_x est inclus dans un T -intervalle $[a_i, b_i]_T$ de la partition donc $[y_-(x), y_+(x)]_U$ est inclus dans $[a_i, b_i]_T$. Or pour tout $z \in [a_i, b_i]_T$, $T_1(z)$ est, au sens de \leq_U , le plus petit élément de $[a_i, b_i]_T$ qui est plus grand que z . Pour $z \in [y_-(x), y_+(x)]_U$, on remarque que Uz est dans $[y_-(x), y_+(x)]_U$ donc dans $[a_i, b_i]_T$, donc $T_1 z = Uz$. D'où 3a. $A_1 \subset \{c_{T_1} \neq 1\}$ et 1 est la valeur de c_{T_1} sur $[y_-(x), y_+(x)]_{T_1}$ donc la partition de \mathcal{O} obtenue lors de la procédure $P_{A_1}^{T_1}$ ne sépare pas le T_1 -intervalle $[y_-(x), y_+(x)]_{T_1}$. Or $[y_-(x), y_+(x)]_{T_1} = [y_-(x), y_+(x)]_U$ donc par le même raisonnement, $c_{T_2} = 1$ sur $[y_-(x), y_+(x)]_{T_1}$. Pour obtenir $\varphi(x) = x$, il faut que la position de x dans $[a_i^1, b_i^1]_{T_1}$ soit la même que ce soit pour la relation d'ordre \leq_U que pour \leq_{T_1} . Or d'après 2, $T_1^{\mathbb{N}} y_+(x) \subset U^{\mathbb{N}^*} x$ et $T_1^{-\mathbb{N}} y_-(x) \subset U^{-\mathbb{N}^*} x$. Enfin, d'après ce qu'on vient de montrer sur c_{T_1} , les éléments de $[y_-(x), y_+(x)]_U$ sont rangés dans le même ordre que ce soit pour \leq_{T_1} ou pour \leq_U . D'où $\varphi(x) = x$. □

4.3.3 Preuve du théorème de BELINSKAYA

Après avoir appliqué n fois la procédure, on a $\psi_n T_n = T \psi_n$ avec $\psi_n = \varphi_0^{-1} \circ \dots \circ \varphi_{n-1}^{-1}$ et $T_n(\cdot) = U^{c_{T_n}(\cdot)}(\cdot)$. Notons X' l'ensemble des $x \in X$ tel que $(c_{T_n}(x))_n$ stationne à 1 et $(\varphi_n(x))_n$ stationne à x . La suite consiste donc à bien choisir les $A_0 = A$, A_1 , A_2 , ... (il faut les choisir comme indiqué dans la propriété 3) pour que X' soit de mesure pleine.

Supposons que nous sommes parvenus à faire cela. Par définition de ψ_n , $(\psi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ stationne pour tout $x \in X'$, de valeur finale notée $\psi(x)$. U préserve la mesure donc $X' \cap U(X')$ est aussi de mesure pleine. Donc en particulier pour presque tout $x \in X$, $c_{T_n}(x) = 1$, $\psi_n(x) = \psi(x)$ et $\psi_n(Ux) = \psi(Ux)$ pour n assez grand. Prenons un tel $x \in X$. Comme $c_{T_n}(x) = 1$ pour n assez grand, on a $T_n x = Ux$ donc $\psi_n(Ux) = T(\psi_n(x))$ donc $\psi(Ux) = T(\psi(x))$ pour n assez grand. Ainsi ψ est définie presque partout, est dans $\text{Aut}(X, \mu)$ (à vérifier) et on obtient que T et U sont conjugués : $\psi U = T \psi$.

Vérifions que ψ est dans $\text{Aut}(X, \mu)$. Etant donné $x, y \in X$, on sait que $\psi(x)$ et $\psi(y)$ valent $\psi_n(x)$ et $\psi_n(y)$ pour n assez grand, l'injectivité de ψ est donc une conséquence de celle des ψ_n . Soit A une partie mesurable de X et A_n l'ensemble des $x \in A$ tels que $(\psi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ stationne à partir du rang n . Les A_n partitionnent A , ψ est injective et on a $\psi = \psi_n$ sur A_n , donc

$$\mu(\psi(A)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\psi(A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\psi_n(A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu(A).$$

Ainsi ψ préserve la mesure μ et est également surjective (considérer $A = X$). Donc ψ est dans $\text{Aut}(X, \mu)$.

La suite consiste à bien choisir les $A_0 = A$, A_1 , A_2 , ... pour que X' soit de mesure pleine.

On pose $T_0 = T$. Supposons $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n$ construits. Si $\mu(c_{T_n} = 1) = 1$, alors $T_n = U$ presque partout et on a donc $\psi_n U = T \psi_n$, ce qui répond au problème. Supposons $\mu(c_{T_n} = 1) < 1$. Dans ce cas, il existe $A_n \subset \{c_{T_n} \neq 1\}$ non négligeable. On contrôle d'abord la longueur de I_x : il existe $C_n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu(\{x \in X \mid I_x \not\subset [T_n^{-C_n} x, T_n^{C_n} x]\}) \leq 1/n$. Puis on quantifie à quel point on veut A_n rare : (X, μ) est sans atome donc on peut choisir $\mu(A_n)$ aussi petit qu'on veut, on imposera $(2C_n + 1)\mu(A_n) \leq 1/n$.²³

23. Cette étape de la preuve correspond exactement au moment où, dans la preuve de la proposition 4.4, on prenait n assez grand de sorte que $\mu(|c_U| > n)$ soit petit, la suite consistant à imposer $\mu(A)$ assez petit. L'ensemble B qui y était considéré est l'analogue de l'ensemble B_n introduit dans le paragraphe suivant.

Si l'algorithme s'arrête, alors on a $\psi_n^{-1}T\psi_n = U$ pour un certain n . Sinon, notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n := \{x \in X \mid I_x \subset [T_n^{-C_n}x, T_n^{C_n}x]\} \cap \bigcap_{-C_n \leq i \leq C_n} T^i(A_n^c)$. Si x est dans B_n , alors I_x est inclus dans A_n^c , c'est-à-dire qu'on a la propriété souhaitée d'après la propriété 3a. D'après la propriété 3b, X' contient $\bigcup_n B_n$. Il suffit juste de montrer que $\bigcup_n B_n$ est de mesure pleine. Or

$$\mu(B_n^c) \leq \mu(\{x \in X \mid I_x \not\subset [T_n^{-C_n}x, T_n^{C_n}x]\}) + \sum_{-C_n \leq i \leq C_n} \mu(T^i(A_n)) \leq 1/n + (2C_n + 1)\mu(A_n) \leq 2/n.$$

$\mu(B_n)$ tend vers 1 donc $\bigcup_n B_n$ est de mesure pleine et il en est de même pour X' , ce qu'il nous restait à démontrer. D'où le théorème de BELINSKAYA.

5 Transformations de rang 1 et odomètres

Avant de présenter le théorème 6.1, précision du théorème 2.10, ainsi qu'une généralisation (le théorème 6.13), nous allons donner les définitions nécessaires à la compréhension des énoncés (transformation de rang 1, construction par *cutting & stacking*, odomètre). Nous fixons d'abord du vocabulaire sur les tours de Rokhlin, comprenant les notions introduites par BAXTER dans [Bax71] (nous avons obtenu un énoncé plus précis du lemme 9 qui y figure donc nous aurons besoin de présenter la preuve de l'auteur et ce que nous y avons apporté pour améliorer le résultat).

5.1 Tours de Rokhlin

Définition 5.1. Soit $T \in \text{Aut}(X, \mu)$.

1. Une **tour de Rokhlin** \mathcal{R} est une collection de la forme $(T^i(B))_{0 \leq i \leq h-1}$ où les $T^i(B)$ sont deux à deux disjoints. B est appelée la **base** de la tour et h sa **hauteur**. La mesure d'une telle tour désigne la mesure de $\bigsqcup_{0 \leq i \leq h-1} T^i(B)$.
2. La **T -partition** associée à la tour de Rokhlin $\mathcal{R} = (T^i(B))_{0 \leq i \leq h-1}$ est la partition de X

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} := \left\{ B, T(B), \dots, T^{h-1}(B), X \setminus \bigsqcup_{0 \leq i \leq h-1} T^i(B) \right\}.$$

On peut énoncer l'incontournable lemme de Rokhlin.

Théorème 5.2 (Lemme de Rokhlin). Soit $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ apériodique. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, il existe une tour de Rokhlin de hauteur h et de mesure au moins $1 - \varepsilon$.

Autrement dit, il existe une partie mesurable X' de X de mesure arbitrairement grande et qui est partitionnée en autant de pièces qu'on veut, envoyées les unes sur les autres par T . On remarque ici que la tour de Rokhlin qui partitionne X' est une partition dont les éléments sont indexés par $i \in \llbracket 0, h-1 \rrbracket$, avec un ordre donné par T . Dans cette section 5, nous considérerons des partitions **ordonnées**, c'est-à-dire de la forme (P_1, \dots, P_n) où $\{P_1, \dots, P_n\}$ est une partition au sens classique.

Dans la suite, nous aurons besoin de munir les partitions de même cardinal d'une distance.

Définition 5.3. Soient $\mathcal{P} = (P_0, \dots, P_h)$ et $\mathcal{P}' = (P'_0, \dots, P'_h)$ deux partitions (ordonnées) de X , de même cardinal. On définit

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{P}') := \sum_{0 \leq i \leq h-1} \mu(P_i \Delta P'_i).$$

Si $\mathcal{R} = (B, T(B), \dots, T^{h-1}(B))$ est une tour de Rokhlin, alors on pose

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{R}) := d(\mathcal{P}, \mathcal{P}_{\mathcal{R}}) = \sum_{0 \leq i \leq h-1} \mu(P_i \Delta T^i(B)).$$

De même on pose $d(\mathcal{R}, \mathcal{P}') := d(\mathcal{P}_{\mathcal{R}}, \mathcal{P}')$ et $d(\mathcal{R}, \mathcal{R}_2) := d(\mathcal{P}_{\mathcal{R}}, \mathcal{P}_{\mathcal{R}_2})$ si \mathcal{R}_2 est une autre tour de Rokhlin de même hauteur que \mathcal{R} .

L'ensemble des partitions mesurables de même cardinal $h+1$ est complète pour la distance d (appliquer pièce par pièce la complétude pour la distance $(A, B) \mapsto \mu(A \Delta B)$).

L'indice $i = h$ ne figure pas dans la somme définissant $d(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ pour n'y faire figurer que les pièces de la forme $T^i(B)$ lorsqu'une des partitions est une T -partition (c'est-à-dire qu'on ne fait figurer que les pièces de la tour de Rokhlin associée), cela nous permet l'extension de d aux tours de Rokhlin. Dans l'ensemble des partitions de cardinal $h+1$, on vérifie que l'ensemble des T -partitions est un fermé pour la distance d .

La prochaine quantité que nous définissons permet de quantifier la précision qu'a une partition \mathcal{Q} pour approcher une partition \mathcal{P} de cardinal plus petit, avec une seconde \mathcal{P}' fabriquée à partir de \mathcal{Q} (on voudra par exemple que la quantité soit nulle si $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$ puisqu'on peut reconstituer les pièces de \mathcal{P} à partir de celle de \mathcal{Q}).

Définition 5.4. Soit \mathcal{Q} une partition et \mathcal{P} une partition de cardinal plus petit. On définit

$$D(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) := \min \{d(\mathcal{P}, \mathcal{P}') \mid \mathcal{P}' \leq \mathcal{Q} \text{ et } |\mathcal{P}'| = |\mathcal{P}|\}.$$

De même, on étend aux tours de Rokhlin \mathcal{R} en utilisant $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$. On notera $D(\mathcal{B}, \mathcal{Q})$ pour la tour de Rokhlin (B) de hauteur 1, c'est-à-dire le minimum des $\mu(B \Delta P_0)$ pour les P_0 réunions de pièces de \mathcal{Q} .

D n'est pas une distance (elle n'est même pas symétrique). Nous définissons D_T , semblable à D , mais cette fois-ci adaptée au contexte comme nous l'expliquons ensuite.

Définition 5.5. Soit \mathcal{R} et \mathcal{R}_2 des tours de Rokhlin.

1. On dit que \mathcal{R}_2 est **emboîtée** dans \mathcal{R} , notée $\mathcal{R} \leq_T \mathcal{R}_2$ si toute pièce de \mathcal{R} est union de pièces de \mathcal{R}_2 . Cela implique en particulier $|\mathcal{R}| \leq |\mathcal{R}_2|$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \leq \mathcal{P}_{\mathcal{R}_2}$.
2. On dit qu'une suite $(\mathcal{R}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de tours de Rokhlin est **emboîtée** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{R}_{n+1} est emboîtée dans \mathcal{R}_n .
3. Soit \mathcal{P} une partition de cardinal $n + 1$, avec $n \leq |\mathcal{R}|$. On définit

$$D_T(\mathcal{P}, \mathcal{R}) := \min \{d(\mathcal{P}, \mathcal{R}') \mid \mathcal{R}' \leq_T \mathcal{R} \text{ et } |\mathcal{R}'| = n\}.$$

Si \mathcal{R}'' est une tour de Rokhlin de cardinal n , alors on pose $D_T(\mathcal{R}'', \mathcal{R}) := D_T(\mathcal{P}_{\mathcal{R}''}, \mathcal{R})$.

On montre que si on a $\mathcal{R} = (B, T(B), \dots, T^{h-1}(B))$, $\mathcal{R}_2 = (B_2, T(B_2), \dots, T^{h_2-1}(B_2))$ et $\mathcal{R} \leq_T \mathcal{R}_2$, alors pour tout $0 \leq j \leq h - 2$,

$$\{0 \leq i \leq h_2 - 1 \mid T^i(B_2) \subset T^{j+1}(B)\} = 1 + \{0 \leq i \leq h_2 - 1 \mid T^i(B_2) \subset T^j(B)\}.$$

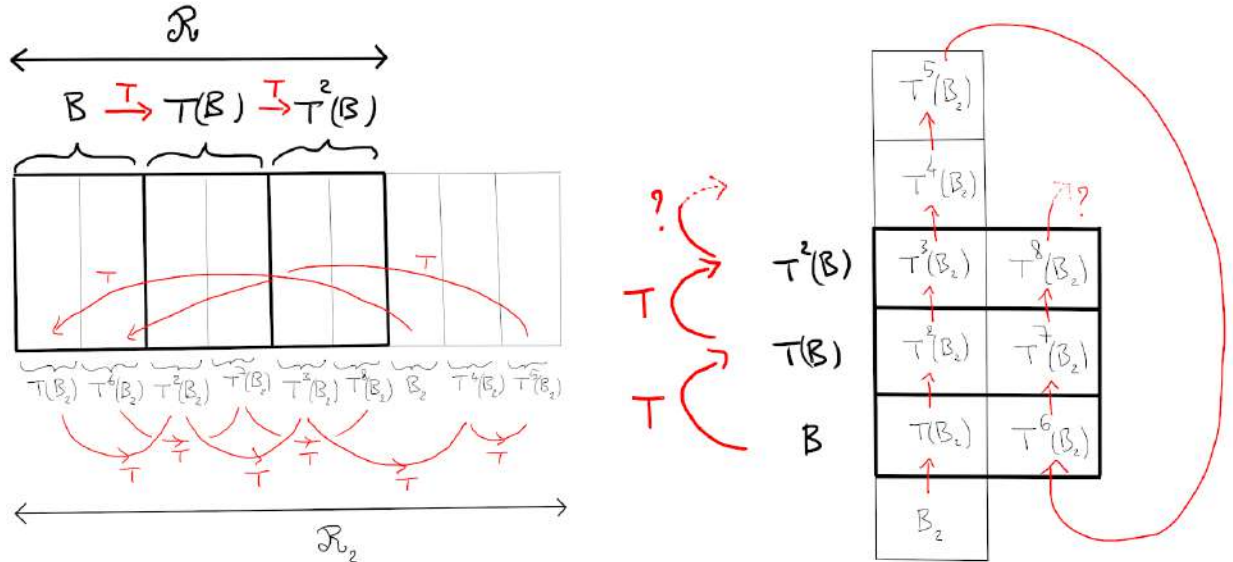


FIGURE 13 – Deux illustrations possibles de « $\mathcal{R} \leq_T \mathcal{R}_2$ » pour un même exemple de tours de Rokhlin \mathcal{R} et \mathcal{R}_2 vérifiant cela.

Si \mathcal{R} était la seule chose qu'on connaissait sur la dynamique de T , alors \mathcal{R}_2 apporte des précisions. En effet, sans connaître \mathcal{R}_2 , on ne sait pas comment T agit sur le dernier étage (ici $T^2(B)$) de \mathcal{R} (d'où la flèche avec le point d'interrogation dans l'illustration de droite). Grâce à \mathcal{R}_2 , on en sait un peu plus. En revanche, on ne sait pas comment T agit sur le dernier étage de \mathcal{R}_2 (ici $T^8(B_n)$), une troisième tour emboîtée dans \mathcal{R}_2 permettrait d'en savoir plus, etc.

De même, grâce à \mathcal{R}_2 , on sait un peu plus comment T^{-1} agit sur la base B de \mathcal{R} (mais on ne sait pas comment T^{-1} agit sur la base B_2 de \mathcal{R}_2 , etc).

D_T est donc une quantification qui, en plus de D , fait intervenir la dynamique T et la structure qu'elle apporte. Nous verrons dans la partie suivante une définition équivalente des transformations de rang 1, due à BAXTER, faisant intervenir la relation \leq_T . Elle donne une construction plus géométrique que la définition originale que nous donnerons. Nous préparons la preuve de l'équivalence entre les définitions en énonçant les propriétés suivantes, démontrées dans [Bax71].

Lemme 5.6. 1. Soient \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 des tours de Rokhlin de même cardinal, \mathcal{P} une partition telle que $|\mathcal{P}| \leq |\mathcal{R}_1| + 1$. Alors

$$D_T(\mathcal{P}, \mathcal{R}_2) \leq D_T(\mathcal{P}, \mathcal{R}_1) + d(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2).$$

2. Si on suppose cette fois-ci $|\mathcal{R}_1| \leq |\mathcal{R}_2|$, que B_1 est la base de \mathcal{R}_1 et B_2 la base de \mathcal{R}_2 , alors

$$D_T(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \leq |\mathcal{R}_1|D(B_1, \mathcal{R}_2) + |\mathcal{R}_1|\mu(B_2).$$

5.2 Transformations de rang 1

5.2.1 Définition originale et caractérisation

Les transformations de rang 1 constituent une classe riche grâce à la facilité à en construire. Nous verrons en effet la construction par *cutting & stacking* permettant d'obtenir une multitude d'exemples, comme celui de CHACON²⁴ [Cha67]. Les rotations irrationnelles et les odomètres font partie de cette famille. Ces transformations sont ergodiques et d'entropie nulle. Enfin elles ont également l'intérêt de former un G_δ -dense de $\text{Aut}(X, \mu)$ pour la topologie faible, ce qu'on n'étudiera pas mais qui souligne l'importance de cette classe. Nous nous appuyons sur [Fer97] qui récapitule les définitions équivalentes de ces systèmes.

Définition 5.7. $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ est de **rang 1** si pour toute partition \mathcal{P} de X et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une tour de Rokhlin \mathcal{R} tel que $D(\mathcal{P}, \mathcal{R}) \leq \varepsilon$.

On peut faire la comparaison entre la conclusion du lemme de Rokhlin et ce qu'on demande dans la définition d'une transformation de rang 1. Le lemme de Rokhlin énonce qu'on peut avoir des tours de Rokhlin de mesure aussi grande qu'on veut et avec un nombre de niveaux arbitraire. La mesure de la tour est la seule information qu'on a vis-à-vis du remplissage de l'espace X , on ne sait pas si on peut approcher une partie mesurable fixée. Une transformation de rang 1 a justement cette spécificité d'approcher les parties mesurables (plus généralement les partitions) avec ses tours de Rokhlin. Ses tours décrivent toute l'information sur X .

En revanche, on ne connaît pas le nombre d'étages ni la mesure d'une tour de Rokhlin qui approche un ensemble. Peut-être qu'elle est de mesure très grande avec peu d'étages, peut-être qu'elle nécessite énormément d'étage pour atteindre une certaine mesure. Dans la prochaine proposition, on aura l'existence d'une suite de tours de Rokhlin qui approche toutes les parties mesurables. Nous nous intéresserons plus tard à sa « vitesse de remplissage » de l'espace X , c'est-à-dire la vitesse de convergence vers 1 de la mesure de la tour en fonction du nombre d'étages, l'idéal étant un remplissage nécessitant peu d'étages, nous illustrons cela dans la figure 14 et nous serons plus précis dans la définition 5.11.

Nous allons utiliser la séparabilité de la σ -algèbre de X (pour la distance $(A, B) \mapsto \mu(A \Delta B)$, modulo les négligeables) pour réduire la définition originale à une suite de tours de Rokhlin qui approche tous les mesurables.

Proposition 5.8. Soit $T \in \text{Aut}(X, \mu)$. Les deux assertions sont équivalentes :

1. T est de rang 1 ;
2. il existe une suite $(\mathcal{R}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de tours de Rokhlin telle que pour tout mesurable A de X , $D(A, \mathcal{R}_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.

On notera $\mathcal{R}_k \rightarrow \epsilon$ lorsque $(\mathcal{R}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfait l'assertion 2.

Preuve de la proposition 5.8. $1 \implies 2$. Considérons une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de parties mesurables de X , dense pour la distance $(A, B) \mapsto \mu(A \Delta B)$. On définit $\mathcal{P}_k := \bigvee_{0 \leq i \leq k} \{A_i, (A_i)^c\}$. T est de rang 1 donc on dispose d'une tour de Rokhlin \mathcal{R}_k telle que $D(\mathcal{P}_k, \mathcal{R}_k) \leq 1/(k+1)$. $(\mathcal{R}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfait l'assertion 2 pour les A_i , donc pour tout A par densité.

²⁴. Historiquement, CHACON l'a introduit comme premier exemple connu de systèmes faiblement mélangeants qui ne sont pas fortement mélangeants. La transformation de CHACON a été le point de départ de l'intérêt pour une nouvelle classe de systèmes qu'on finira par appeler « transformations de rang 1 ».

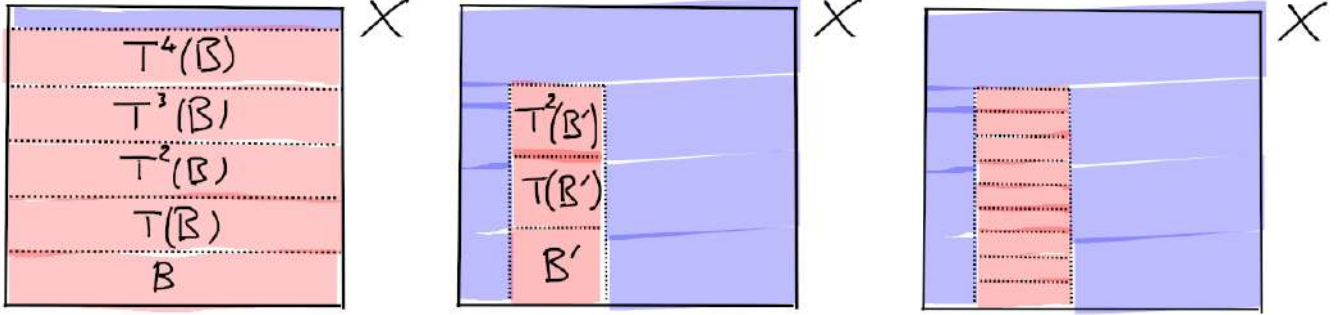


FIGURE 14 – A gauche, un « bon » remplissage de X par une tour de Rokhlin de base B et de hauteur 5, car le complémentaire de la tour, en bleu, est de mesure plus petite que la mesure de chaque étage, on sait déjà qu’il n’y a plus de place pour rajouter un étage à la tour.

Au milieu, un « mauvais » remplissage de X par une tour de Rokhlin de base B' et de hauteur 3, car dans la partie bleue, disjointe de la tour, on pourrait encore y ranger beaucoup de morceaux de la même taille que B' , deux à deux disjoints. Remarquons que si $T^3(B')$ ou $T^{-1}(B')$ sont disjoints de la partie rouge, alors on peut prolonger la tour de Rokhlin, de sorte à couvrir un peu plus d’espace dans X .

A droite, une tour couvrant la même partie que la tour du milieu, mais nécessitant beaucoup plus d’étages pour y parvenir, nous considérons donc que c’est une approximation encore plus mauvaise de X .

Voir la définition 5.11 pour la définition de la vitesse de remplissage.

$2 \implies 1$. Soit $(\mathcal{R}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\mathcal{R}_k \rightarrow \epsilon$. Soit $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_n)$ et $\epsilon > 0$. On applique l’assertion 2 à chaque $A = P_i$, ce qui nous donne des P'_i , unions de pièces d’un même $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_k}$, pour k assez grand, tels que $\mu(P_i \Delta P'_i) \leq \epsilon/n$. Si une pièce Q de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_k}$ est incluse dans un certain P'_i et vérifie $\mu(P_i \cap Q) \leq \mu(Q)/2$, alors $\mu(P_i \Delta (P'_i \setminus Q)) \leq \mu(P_i \Delta P'_i)$. On peut donc supposer sans perte de généralité que pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $\mu(P_i \cap Q) > \mu(Q)/2$ pour tout $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}_k}$, tout en conservant la propriété $\mu(P_i \Delta P'_i) \leq \epsilon/n$. Par conséquent, aucune pièce Q ne peut être simultanément dans P'_i et P'_j pour $i \neq j$, et que les P'_i sont deux à deux disjoints. Notons $P' := X \setminus \bigsqcup_{1 \leq i \leq n} P'_i$ et notons $\mathcal{P}' = (P'_1 \sqcup P', P'_2, \dots, P'_n)$. C’est une partition moins fine que $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_k}$ et de même cardinal que \mathcal{P} . On a $\mu(P_1 \Delta (P'_1 \sqcup P')) \leq \mu(P_1 \Delta P'_1) + \mu(P')$. Or $\mu(P_i) \leq \mu(P_i \Delta P'_i) + \mu(P'_i)$ donc en sommant sur i , on obtient $1 \leq \epsilon + \mu(P^c)$ et donc $\mu(P^c) \leq \epsilon$. Au total, $d(\mathcal{P}, \mathcal{P}') \leq 2\epsilon$, c’est-à-dire $D(\mathcal{P}, \mathcal{R}_k) \leq 2\epsilon$. \square

Remarque 5.9.

Dans la démonstration de l’implication $2 \implies 1$, on montre en fait que pour toute partition finie \mathcal{P} , on a $D(\mathcal{P}, \mathcal{R}_k) \rightarrow 0$. Une suite de tours de Rokhlin approximant tout mesurable approxime également toute partition.

Le théorème suivant nous donne une nouvelle définition équivalente, offrant une structure plus intéressante.

Théorème 5.10 (BAXTER - 1971). *Soit $T \in \text{Aut}(X, \mu)$. Les deux assertions sont équivalentes :*

1. *il existe une suite $(\mathcal{R}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de tours de Rokhlin telle que $\mathcal{R}_k \rightarrow \epsilon$;*
2. *il existe une suite emboîtée $(\mathcal{R}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de tours de Rokhlin telle que $\mathcal{R}_k \rightarrow \epsilon$.*

Récapitulons. La toute première définition que nous avons donnée concernant les transformations de rang 1 énonce que ce sont des transformations pouvant approcher toute partie partition (et donc tout mesurable) avec ses tours de Rokhlin. La proposition 5.8 réduit ensuite cette définition à la donnée d’une suite dénombrable de tours de Rokhlin. Le théorème 5.10 énonce enfin que nous pouvons supposer sans perte de généralité que cette suite est emboîtée.

Cette dernière caractérisation nous donne une structure géométrique intéressante dont nous nous servirons lors de la construction d’une équivalence orbitale entre toute transformation de rang 1 et l’odomètre universel (voire d’une équivalence orbitale de Shannon). Elle permet également de construire une multitude d’exemples de transformations de rang 1 par *cutting & stacking*, nous présenterons ce procédé dans la sous-partie 5.2.3.

Mentionnons également le fait important qu'une telle suite $(\mathcal{R}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de tours de Rokhlin nous fournit une suite croissante $(\mathcal{P}_{\mathcal{R}_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de T -partitions qui croît vers la σ -algèbre et donc sépare les points qui sont déjà séparés par la σ -algèbre d'origine. Ce sera important dans la section 6 pour montrer que la transformation que aurons construite et qui sera OE à une transformation de rang 1 fixée, est un odomètre universel (sans cette information sur $(\mathcal{P}_{\mathcal{R}_k})_{k \in \mathbb{N}}$, la transformation ne serait qu'un facteur de l'odomètre universel).

Nous présentons la preuve du théorème 5.10. Dans la sous-partie suivante, nous la compléterons pour en tirer un résultat plus précis.

Preuve du théorème 5.10. Soit $(\mathcal{R}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\mathcal{R}_k \rightarrow \epsilon$. A k fixé, on a $D_T(\mathcal{R}_k, \mathcal{R}_{k+n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'après le second résultat du lemme 5.6. Donc quitte à extraire, on peut supposer $D_T(\mathcal{R}_k, \mathcal{R}_{k+1}) < \delta_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, avec des réels strictement positifs δ_k vérifiant $\sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_k < +\infty$. Par récurrence, on définit $(\mathcal{R}_k^\ell)_{k \in \mathbb{N}}$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$.

- Pour $\ell = 0$, on pose $\mathcal{R}_k^0 := \mathcal{R}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- Soit $\ell \in \mathbb{N}$, supposons $(\mathcal{R}_k^\ell)_{k \in \mathbb{N}}$ construite. On définit $\mathcal{R}_k^{\ell+1}$ comme étant une tour de Rokhlin \mathcal{R}_2 qui atteint le minimum dans la définition de $D_T(\mathcal{R}_k^\ell, \mathcal{R}_{k+1}^\ell)$.

D'où la récurrence. Par définition de $\mathcal{R}_k^{\ell+1}$, on a

$$D_T(\mathcal{R}_k^\ell, \mathcal{R}_{k+1}^\ell) = d(\mathcal{R}_k^\ell, \mathcal{R}_k^{\ell+1}), \quad (8)$$

$$D_T(\mathcal{R}_k^{\ell+1}, \mathcal{R}_{k+1}^\ell) = 0. \quad (9)$$

De plus, à k fixé, les \mathcal{R}_k^l sont de même cardinal. On montre par récurrence sur $\ell \in \mathbb{N}$ que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$d(\mathcal{R}_k^\ell, \mathcal{R}_k^{\ell+1}) < \delta_{\ell+k}. \quad (10)$$

- L'assertion à $\ell = 0$ est vraie d'après (8) et par extraction de la suite au tout début de la preuve.
- Soit $\ell \in \mathbb{N}$, supposons $d(\mathcal{R}_k^\ell, \mathcal{R}_k^{\ell+1}) < \delta_{\ell+k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En utilisant (8), puis le premier résultat du lemme 5.6, puis (9), puis l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$d(\mathcal{R}_k^{\ell+1}, \mathcal{R}_k^{\ell+2}) = D_T(\mathcal{R}_k^{\ell+1}, \mathcal{R}_{k+1}^{\ell+1}) \leq D_T(\mathcal{R}_k^{\ell+1}, \mathcal{R}_{k+1}^\ell) + d(\mathcal{R}_{k+1}^\ell, \mathcal{R}_{k+1}^{\ell+1}) = d(\mathcal{R}_{k+1}^\ell, \mathcal{R}_{k+1}^{\ell+1}) < \delta_{\ell+k+1}.$$

D'où la récurrence. Pour tout $\ell, m, k \in \mathbb{N}$, on a

$$d(\mathcal{R}_k^\ell, \mathcal{R}_k^{\ell+m}) < \sum_{i=0}^{m-1} \delta_{i+\ell+k}. \quad (11)$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{R}_k^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la distance d donc converge, on note \mathcal{R}_k^∞ sa limite, c'est une tour de Rokhlin. On a de plus $\mathcal{R}_k^\infty \leq_T \mathcal{R}_{k+1}^\infty$ en faisant tendre ℓ vers l'infini dans (9). Il reste à montrer que $(\mathcal{R}_k^\infty)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfait $\mathcal{R}_k^\infty \rightarrow \epsilon$. Considérons un mesurable A et $\varepsilon > 0$. En prenant $\ell = 0$ et en faisant tendre m vers l'infini dans (11), on obtient

$$d(\mathcal{R}_k, \mathcal{R}_k^\infty) < \sum_{i=k}^{+\infty} \delta_i.$$

Pour k assez grand, on a alors $D(A, \mathcal{R}_k) < \varepsilon$ et $d(\mathcal{R}_k, \mathcal{R}_k^\infty) < \varepsilon$. Fixons un entier k vérifiant ceci. Soit P la réunion de pièces de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_k}$ tel que $D(A, \mathcal{R}_k) = \mu(A \Delta P)$. Notons $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_k} = (R_0^{(k)}, \dots, R_{h_k}^{(k)})$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_k^\infty} = ((R^\infty)_0^{(k)}, \dots, (R^\infty)_{h_k}^{(k)})$. Quitte à renuméroter, $P = R_0^{(k)} \sqcup \dots \sqcup R_j^{(k)}$. On pose $P' = (R^\infty)_0^{(k)} \sqcup \dots \sqcup (R^\infty)_j^{(k)}$. Alors

$$\mu(P \Delta P') \leq \sum_{i=0}^j \mu \left(R_i^{(k)} \Delta (R^\infty)_i^{(k)} \right) \leq d(\mathcal{R}_k, \mathcal{R}_k^\infty) < \varepsilon.$$

Au total,

$$\mu(A \Delta P') \leq \mu(A \Delta P) + \mu(P \Delta P') < 2\varepsilon$$

et donc $D(A, \mathcal{R}_k^\infty) < 2\varepsilon$. Ceci est valable pour k assez grand, d'où $\mathcal{R}_k^\infty \rightarrow \epsilon$. \square

5.2.2 Une amélioration de la caractérisation, préservant la vitesse de remplissage

Comme annoncé après la définition 5.7, nous aurons besoin de quantifier la vitesse de remplissage de la suite de tours de Rokhlin en fonction du nombre d'étages de la tour. En effet, dans la partie suivante, l'OE que nous aurons construite entre une transformation de rang 1 et l'odomètre universel sera une OE Shannon en partie grâce à un « remplissage assez rapide » des tours de Rokhlin emboîtées (ce ne sera pas le seul critère, voir la partie 6.2). La preuve du théorème de BAXTER montre que, d'une suite approximante de tours de Rokhlin, on peut en obtenir une autre qui est en plus emboîtée. Mais la nouvelle suite a-t-elle la même vitesse de remplissage que celle d'origine ou est-ce que le procédé nous fait perdre cette information ? Nous allons montrer que nous conservons la vitesse de remplissage (proposition 5.12). Il suffit de choisir les bons δ_k dans la preuve précédente.

D'un résultat dans [Iwa94], impliquant que les rotations irrationnelles admettent une suite de tours qui remplit l'espace assez rapidement, nous obtiendrons grâce à cette caractérisation améliorée que c'est encore vraie en se restreignant aux tours emboîtées.

Malheureusement, la proposition 5.12 ne s'applique pas encore pour obtenir une généralisation du théorème 2.10 car, comme nous venons de le préciser, la vitesse de remplissage n'est pas le seul critère pour montrer que l'OE que nous aurons construite est de Shannon. Elle trouverait toute son utilité si nous parvenons à nous affranchir du second critère (en rapport avec les séparateurs de la construction, plus de précision dans la partie 6.2).

Définition 5.11. Soit $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On définit $R1^\varphi$ l'ensemble des transformations $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ de rang 1 admettant une suite $(\mathcal{R}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de tours de Rokhlin vérifiant $\mathcal{R}_k \rightarrow \epsilon$ et telle que, si on note h_k le nombre d'étages de la tour \mathcal{R}_k et X_k la réunion de ses étages, on a

$$\mu((X_k)^c) = o\left(\frac{1}{\varphi(h_k)}\right).$$

On définit également $R1_{\text{emboîté}}^\varphi$ (inclus dans $R1^\varphi$) en demandant en plus que $(\mathcal{R}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit emboîtée.

Si φ est majorée, alors on demande seulement que $\mu((X_k)^c)$ tende vers 0, donc $R1^\varphi$ vaut exactement l'ensemble des transformations de $\text{Aut}(X, \mu)$ de rang 1 d'après la proposition 5.8. On a de plus $R1_{\text{emboîté}}^\varphi = R1^\varphi$ d'après le théorème 5.10. Nous allons étendre cela à φ non bornée en modifiant la preuve du théorème, comme indiqué avant la définition 5.11.

Proposition 5.12. Pour toute $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, on a $R1_{\text{emboîté}}^\varphi = R1^\varphi$.

Preuve de la proposition 5.12. Soit $T \in R1^\varphi$, $(\mathcal{R}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\mu((X_k)^c) = o\left(\frac{1}{\varphi(h_k)}\right)$, comme dans la définition 5.11.

Avec les notations de la preuve du théorème 5.10, on a construit une suite emboîtée $(\mathcal{R}_k^\infty)_{k \in \mathbb{N}}$ de tours de Rokhlin à partir d'une sous-suite de $(\mathcal{R}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, elle-même construite à partir d'une suite sommable $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs. Montrons qu'on peut la construire de sorte qu'elle vérifie $\mu((X_k^\infty)^c) = o\left(\frac{1}{\varphi(h_k)}\right)$, où X_k^∞ est la réunion des étages de \mathcal{R}_k^∞ .

Pour cela, il faut être plus précis sur le choix des δ_k , nous détaillons la première étape de la preuve du théorème 5.10, consistant à extraire une sous-suite de $(\mathcal{R}_k)_{k \in \mathbb{N}}$. On va cette fois-ci préciser l'extractrice θ et ne pas supposer sans perte de généralité qu'elle vaut $id_{\mathbb{N}}$.

- On pose par exemple $\theta(0) := 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons qu'on a construit $\theta(0), \dots, \theta(n)$ et $\delta_0, \dots, \delta_{n-1}$ tels qu'on a $D_T(\mathcal{R}_{\theta(k)}, \mathcal{R}_{\theta(k+1)}) < \delta_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$. On définit $\delta_n := \min(1, \delta_{n-1}, \varphi(h_{\theta(n)})^{-1})/2^n$ (avec $\delta_{-1} = 1$ par exemple, pour le cas $n = 0$). On considère $\theta(n+1)$ assez grand, strictement plus grand que $\theta(n)$, tel que $D_T(\mathcal{R}_{\theta(n)}, \mathcal{R}_{\theta(n+1)}) < \delta_n$ (c'est possible car $D_T(\mathcal{R}_{\theta(n)}, \mathcal{R}_{\theta(n)+m}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ d'après le lemme 5.6).

Avec ce choix de δ_k , on obtient les propriétés suivantes.

- $\delta_k \leq 1/2^k$ donc la suite est sommable ;
- $\delta_k \leq \delta_{k-1}/2^k$ donc $\delta_k = o(\delta_{k-1})$ donc $\sum_{i=k}^{+\infty} \delta_i \sim \delta_k$;
- $\delta_k \leq \varphi(h_k)^{-1}/2^k$ donc $\delta_k = o(1/\varphi(h_k))$ donc, d'après la propriété précédente, $\sum_{i=k}^{+\infty} \delta_i = o(1/\varphi(h_k))$.

Une fois les δ_k et l'extractrice θ explicités, la preuve précédente nous fournit la suite emboîtée $(\mathcal{R}_k^\infty)_{k \in \mathbb{N}}$ de tours de Rokhlin, vérifiant en particulier

$$d(\mathcal{R}_{\theta(k)}, \mathcal{R}_k^\infty) < \sum_{i=k}^{+\infty} \delta_i. \quad (12)$$

Par construction, \mathcal{R}_k^∞ est une tour de Rokhlin à h_k étages, on note B_k^∞ sa base et B_k la base de \mathcal{R}_k . Notons $X_k = \bigsqcup_{0 \leq i \leq h_k-1} T^i(B_k)$ et $X_k^\infty = \bigsqcup_{0 \leq i \leq h_k-1} T^i(B_k^\infty)$ les ensembles recouverts par les tours de Rokhlin \mathcal{R}_k et \mathcal{R}_k^∞ . On a

$$\begin{aligned} \mu(X_{\theta(k)}) &= \sum_{0 \leq i \leq h_k-1} \mu(T^i(B_{\theta(k)})) \leq \sum_{0 \leq i \leq h_k-1} \mu(T^i(B_{\theta(k)}) \Delta T^i(B_k^\infty)) + \sum_{0 \leq i \leq h_k-1} \mu(T^i(B_k^\infty)) \\ &= d(\mathcal{R}_{\theta(k)}, \mathcal{R}_k^\infty) + \mu(X_k^\infty). \end{aligned}$$

En utilisant (12) et en considérant plutôt le complémentaire de $X_{\theta(k)}$ et X_k^∞ , on a

$$\mu((X_k^\infty)^c) \leq \mu((X_{\theta(k)})^c) + \sum_{i=k}^{+\infty} \delta_i.$$

On sait déjà que $\mu((X_{\theta(k)})^c) = o(1/\varphi(h_{\theta(k)}))$ et on a $\sum_{i=k}^{+\infty} \delta_i = o(1/\varphi(h_{\theta(k)}))$ par construction. Donc $\mu((X_k^\infty)^c) = o(1/\varphi(h_{\theta(k)}))$, ce qu'on voulait. \square

Voici maintenant un exemple concret.

Théorème 5.13. *Si $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang et est sous-linéaire (c'est-à-dire $\varphi(x)/x \rightarrow 0$), alors toute rotation irrationnelle est dans $\mathbf{R1}^\varphi$.*

Preuve du théorème 5.13. Etant donnée $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tendant vers 0, on dit que $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ admet une approximation cyclique à la vitesse $f(n)$ s'il existe une suite $(\mathcal{P}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de partitions dont les pièces sont de même mesure, vérifiant $\mathcal{P}_k \rightarrow \epsilon$ et telle que

$$\sum_{j=0}^{h_k-1} \mu(T(P_j^{(k)}) \Delta P_{j+1}^{(k)}) = o(f(h_k))$$

où $\mathcal{P}_k = (P_0^{(k)}, \dots, P_{h_k-1}^{(k)})$, $P_{h_k}^{(k)} = P_0^{(k)}$.

Dans [Iwa94], IWANIK démontre que la rotation irrationnelle d'angle α admet une approximation cyclique à la vitesse $f(n)$ si et seulement s'il existe une suite $(p_k/q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de rationnels telle que

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| = o(f(q_k)).$$

Grâce à l'approximation par fraction continue²⁵, on obtient donc qu'une rotation irrationnelle $T \in \text{Aut}([0, 1], \text{Leb})$ admet une approximation cyclique à la vitesse $1/(n\varphi(n))$ pour tout φ sous-linéaire. Montrons que pour une telle application φ , cela implique que T est dans $\mathbf{R1}^\varphi$.

On définit $\mathcal{R}_k := (B_k, T(B_k), \dots, T^{h_k-1}(B_k))$ avec $B_k := \bigcap_{0 \leq j \leq h_k-1} T^{-j}(P_j^{(k)})$.

- A k fixé, $B_k \subset T^{-j}(P_j^{(k)})$ donc $T^j(B_k) \subset P_j^{(k)}$, où les $P_j^{(k)}$ sont deux à deux disjoints car \mathcal{P}_k est une partition, donc les $T^j(B_k)$ sont deux à deux disjoints et \mathcal{R}_k est une tour de Rokhlin.

25. Elle fournit une suite de rationnels p_k/q_k tels que $|\alpha - p_k/q_k| < 1/q_k^2$.

— En utilisant l'inégalité triangulaire que satisfait $(A, B) \mapsto \mu(A \Delta B)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mu\left(P_0^{(k)} \setminus B_k\right) &= \mu\left(P_0^{(k)} \Delta B_k\right) \leq \sum_{\ell=0}^{h_k-2} \mu\left(\left(\bigcap_{0 \leq j \leq \ell} T^{-j}\left(P_j^{(k)}\right)\right) \Delta \left(\bigcap_{0 \leq j \leq \ell+1} T^{-j}\left(P_j^{(k)}\right)\right)\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{h_k-2} \mu\left(\left(\bigcap_{0 \leq j \leq \ell} T^{-j}\left(P_j^{(k)}\right)\right) \setminus T^{-(\ell+1)}\left(P_{\ell+1}^{(k)}\right)\right) \\
&\leq \sum_{\ell=0}^{h_k-2} \mu\left(T^{-\ell}\left(P_{\ell}^{(k)}\right) \setminus T^{-(\ell+1)}\left(P_{\ell+1}^{(k)}\right)\right) \\
&= \sum_{\ell=0}^{h_k-2} \mu\left(T\left(P_{\ell}^{(k)}\right) \setminus P_{\ell+1}^{(k)}\right) \\
&\leq \sum_{\ell=0}^{h_k-2} \mu\left(T\left(P_{\ell}^{(k)}\right) \Delta P_{\ell+1}^{(k)}\right).
\end{aligned}$$

Or $\mu\left(P_0^{(k)} \setminus B_k\right) = \mu\left(P_0^{(k)}\right) - \mu\left(B_k\right) = \frac{1}{h_k} - \mu\left(B_k\right)$. Donc

$$1 - \mu\left(\bigsqcup_{0 \leq j \leq h_k} T^j\left(B_k\right)\right) = h_k \left(\frac{1}{h_k} - \mu\left(B_k\right)\right) \leq h_k \sum_{\ell=0}^{h_k-2} \mu\left(T\left(P_{\ell}^{(k)}\right) \Delta P_{\ell+1}^{(k)}\right) = h_k \times o\left(\frac{1}{h_k \varphi\left(h_k\right)}\right) = o\left(\frac{1}{\varphi\left(h_k\right)}\right).$$

$(\mathcal{R}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc la suite de tours de Rokhlin qu'on cherchait pour montrer que la rotation irrationnelle est dans $R1^\varphi$. \square

Le théorème 5.13 assure l'existence d'une la suite $(\mathcal{R}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de tours de Rokhlin pour la rotation irrationnelle, dont la vitesse de remplissage est $o(1/\varphi(h_k))$. Grâce à la proposition 5.12, cette suite peut être supposée emboîtée sans perte généralité.

Nous verrons dans l'exemple 5.17 de la sous-partie suivante que la transformation de CHACON est également dans $R1^\varphi$ pour toute φ sous-linéaire. Nous parviendrons à montrer que cette transformation est Shannon-OE à l'odomètre universel, grâce à une propriété en lien avec la construction par *cutting & stacking*. On ne sait pas si les rotations irrationnelles sont concernées par cette propriété et l'information obtenue sur la vitesse de remplissage n'est pas suffisante pour établir que les rotations irrationnelles sont Shannon-OE à l'odomètre universel.

5.2.3 Construction des transformations de rang 1 par *cutting & stacking*

Nous allons reformuler la caractérisation fournie par le théorème 5.10 et offrant une construction géométrique remarquable. Avant de donner la longue définition et pour moins de difficulté lors sa lecture, nous donnons d'abord une idée des différentes notations qui y figurent (le lecteur peut s'appuyer sur la figure 15 en même temps qu'il lit le paragraphe suivant).

Etant données deux tours de Rokhlin $\mathcal{R}_n \leq_T \mathcal{R}_{n+1}$, on note h_n le nombre d'étages \mathcal{R}_n et B_n sa base (idem h_{n+1} et B_{n+1} pour \mathcal{R}_{n+1}). Par définition de \leq_T , les étages de \mathcal{R}_n sont des réunions d'étages de \mathcal{R}_{n+1} , on note $B_{n,0}, B_{n,1}, \dots, B_{n,q_n-1}$ l'ensemble des étages de \mathcal{R}_{n+1} qui composent la base B_n de \mathcal{R}_n (q_n est le nombre de subdivisions des étages de \mathcal{R}_n). On suppose les $B_{n,i}$ rangés dans l'ordre croissant d'altitude dans la tour \mathcal{R}_{n+1} . Ainsi les $T(B_{n,0}), T(B_{n,1}), \dots, T(B_{n,q_n-1})$ sont les étages de \mathcal{R}_{n+1} qui composent le deuxième étage $T(B_n)$ de \mathcal{R}_n etc. Enfin les $T^{h_n-1}(B_{n,0}), T^{h_n-1}(B_{n,1}), \dots, T^{h_n-1}(B_{n,q_n-1})$ sont les étages de \mathcal{R}_{n+1} qui composent le dernier étage $T^{h_n-1}(B_n)$ de \mathcal{R}_n . Il y a des étages de \mathcal{R}_{n+1} qu'on n'a pas encore mentionnés, qu'on appellera des **séparateurs**. Il peut y en avoir avant la première pile $(B_{n,0}, T(B_{n,0}), \dots, T^{h_n-1}(B_{n,0}))$, ils sont notés $\Sigma_{n,0,j}$, il y en a $\sigma_{n,0}$. Ainsi la base B_{n+1} est ou bien $\Sigma_{n,0,1}$ ou bien $B_{n,0}$ (tout dépend de la présence ou non de séparateurs avant la première pile). Il peut également y en avoir qui sont intercalés entre deux piles $(B_{n,i}, T(B_{n,i}), \dots, T^{h_n-1}(B_{n,i}))$ et $(B_{n,i+1}, T(B_{n,i+1}), \dots, T^{h_n-1}(B_{n,i+1}))$, notés $\Sigma_{n,i+1,j}$, au nombre de $\sigma_{n,i+1}$, et enfin on peut avoir des séparateurs Σ_{n,i,q_n} après la dernière pile $(B_{n,q_n-1}, T(B_{n,q_n-1}), \dots, T^{h_n-1}(B_{n,q_n-1}))$, il y en a σ_{n,q_n} .

Définition 5.14 (Construction géométrique des transformations de rang 1, méthode par *cutting & stacking*). *Une transformation $T: X \rightarrow X$ bimesurable est de rang 1 s'il existe*

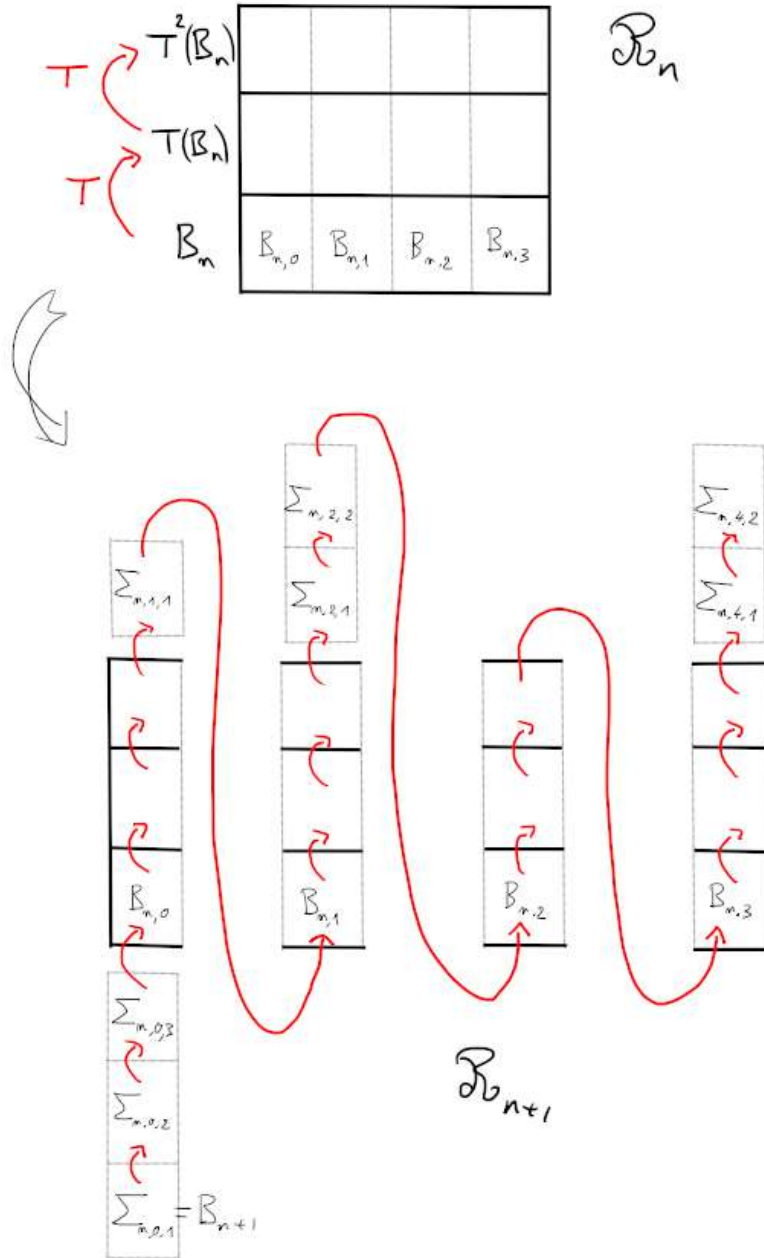


FIGURE 15 – Passage de \mathcal{R}_n à \mathcal{R}_{n+1} dans la définition par *cutting & stacking*, avec $h_n = 3, q_n = 4, \sigma_{n,0} = 3, \sigma_{n,1} = 1, \sigma_{n,2} = 2, \sigma_{n,3} = 0, \sigma_{n,4} = 2$ (et donc $\sigma_n = 8$).

1. des entiers $q_n \geq 2$, pour $n \in \mathbb{N}$, des entiers positifs $\sigma_{n,i}$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq i \leq q_n$, tels que
 - (a) on définit $h_0 = 1$ et $h_{n+1} = q_n h_n + \sigma_n$ avec $\sigma_n := \sum_{i=0}^{q_n} \sigma_{n,i}$;
 - (b) la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{h_{n+1}} < +\infty$ est finie ;
2. et des parties mesurables de X , notées B_n , pour $n \in \mathbb{N}$, $B_{n,i}$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq i \leq q_n - 1$, et $\Sigma_{n,i,j}$, pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq q_n$ et $1 \leq j \leq \sigma_{n,i}$ (si $\sigma_{n,i} = 0$ pour un certain i , alors il n'y a pas de $\Sigma_{n,i,j}$) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 - (a) les $T^k(B_n)$, pour $0 \leq k \leq h_n - 1$, sont deux à deux disjoints ;
 - (b) $(B_{n,0}, B_{n,1}, \dots, B_{n,q_n-1})$ est une partition de B_n ;
 - (c) si $\sigma_{n,i} > 0$, alors $T(\Sigma_{n,i,j}) = \begin{cases} \Sigma_{n,i,j+1} & \text{si } j < \sigma_{n,i} \\ B_{n,i} & \text{si } j = \sigma_{n,i} \text{ et } i \leq q_n - 1 \end{cases}$;
 - (d) $T^{h_n}(B_{n,i}) = \begin{cases} \Sigma_{n,i+1,1} & \text{si } \sigma_{n,i} > 0 \\ B_{n,i+1} & \text{si } \sigma_{n,i} = 0 \text{ et } i < q_n - 1 \end{cases}$;
 - (e) $B_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_{n,0,1} & \text{si } \sigma_{n,0} > 0 \\ B_{n,1} & \text{si } \sigma_{n,0} = 0 \end{cases}$;

et si les T -partitions $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_n}$ associées aux tours de Rokhlin $\mathcal{R}_n := (T^k(B_n))_{0 \leq k \leq h_n-1}$ croissent vers la σ -algèbre de X .

Remarquons que dans [Fer97], la construction par *cutting & stacking* ne fait intervenir aucun séparateur avant la première pile et après la dernière, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_{n,0} = \sigma_{n,q_n} = 0$. C'est équivalent à la définition que nous venons de donner. En effet, il suffit de considérer les mêmes tours de Rokhlin mais privées d'étages extrémaux, nous ne perdons pas d'information car des morceaux de ces étages oubliés apparaissent au fur et à mesure comme des séparateurs entre deux piles (voir la figure 16 pour s'en convaincre). Il semblerait qu'on suive cette tendance dans la littérature, nous verrons que cette définition nous arrange dans la partie 6.2 (voir la proposition 6.11 menant au théorème 6.13). Cependant, on ne sait pas si la vitesse de remplissage des tours de Rokhlin est conservée si on suppose sans perte de généralité que ces tours sont emboîtées et sans séparateurs extrémaux (notre proposition 5.12 réduit seulement le problème aux tours emboîtées, on ne sait rien sur les séparateurs).

Constatons les résultats suivants, simples mais très importants pour la suite.

Lemme 5.15. *Soit $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ satisfaisant les conditions de la définition précédente.*

1. La n -ième tour de Rokhlin \mathcal{R}_n fabriquée, de base B_n et de hauteur h_n , a ses étages de mesure

$$\frac{M_0}{q_0 \cdots q_{n-1}}$$

où M_0 est la mesure de l'unique²⁶ étage B_0 de la toute première tour de Rokhlin \mathcal{R}_0 .

2. $h_{n+1} \leq \frac{q_0 \cdots q_n}{M_0}$ et $h_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{q_0 \cdots q_n}{M_0}$.

Preuve du lemme 5.15. Le premier résultat se montre facilement par récurrence (les étages de la tour \mathcal{R}_n sont chacun composés de q_n étages de la tour \mathcal{R}_{n+1} , ces derniers sont de même mesure car T préserve μ). Pour le second résultat, remarquons que \mathcal{R}_{n+1} a h_{n+1} étages, chacun de mesure $M_0/(q_0 \cdots q_n)$, donc est de mesure $(h_{n+1}M_0)/(q_0 \cdots q_n)$. Puis la mesure de \mathcal{R}_n est plus petite que 1 et tend vers 1 (car la suite des T -partitions tend vers la σ -algèbre d'un espace standard sans atome). \square

Remarque 5.16.

1. Si $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ satisfait les conditions de la définition précédente, alors $\frac{M_0 \sigma_n}{q_0 \cdots q_n}$ est la mesure de la partie ajoutée à \mathcal{R}_n pour obtenir \mathcal{R}_{n+1} , la somme sur $n \in \mathbb{N}$ est donc finie car μ est une mesure de probabilité. Or $\frac{M_0 \sigma_n}{q_0 \cdots q_n} \sim \frac{\sigma_n}{h_{n+1}}$ d'après le dernier lemme. Donc pour $T \in \text{Aut}(X, \mu)$, la condition 1b est automatiquement satisfaite si T vérifie les autres conditions.

²⁶ Rappelons que $h_0 = 1$.

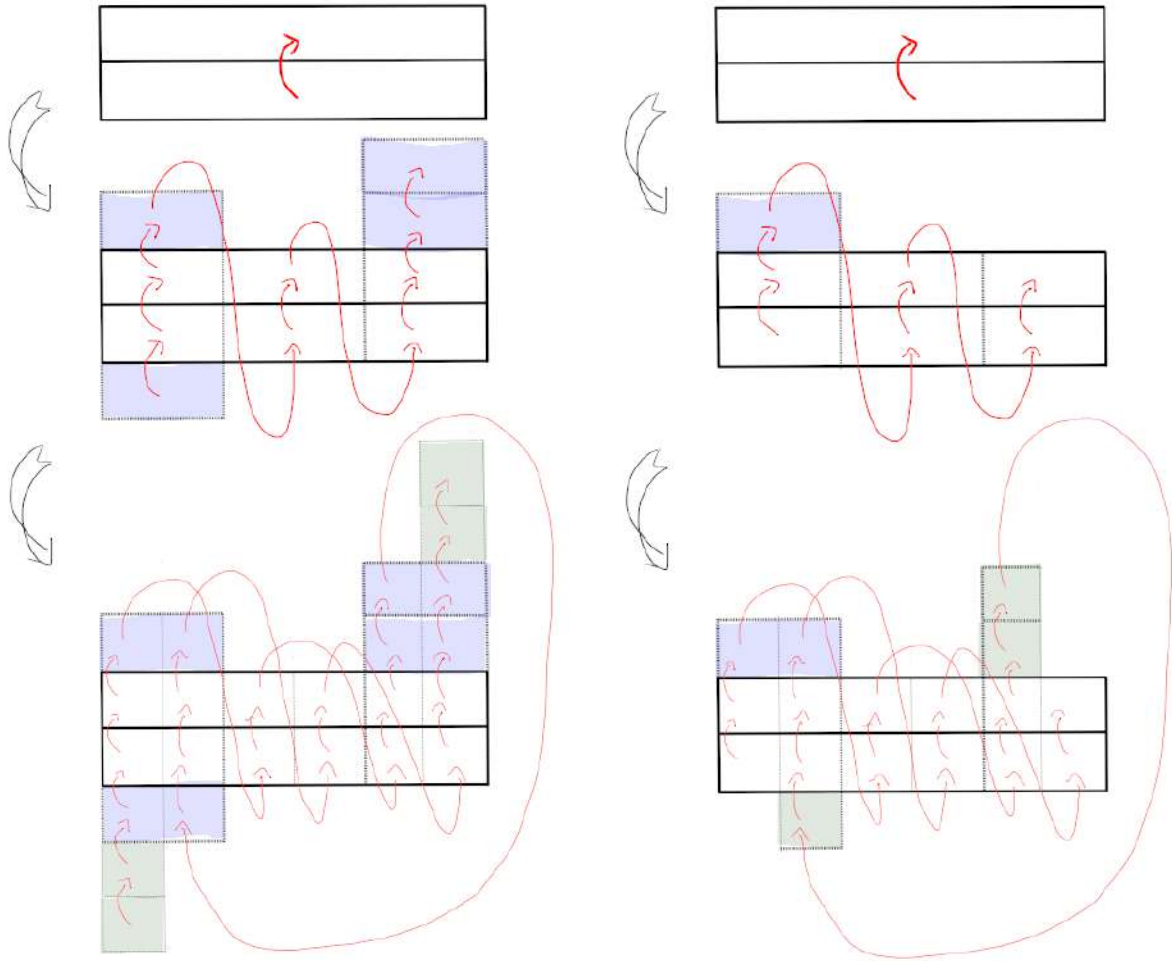


FIGURE 16 – A gauche, les trois premières tours de Rokhlin d’une construction par *cutting & stacking*, avec $q_0 = 2$, $q_1 = 3$, $q_2 = 2$, $\sigma_{1,0} = \sigma_{1,1} = 1$, $\sigma_{1,2} = 0$, $\sigma_{1,3} = 2$, $\sigma_{2,0} = \sigma_{2,2} = 2$, $\sigma_{2,1} = 1$. A droite, ces tours modifiées pour ne pas avoir de séparateurs extrémaux, on a $\sigma_{1,0} = \sigma_{1,2} = \sigma_{1,3} = 0$, $\sigma_{1,1} = 1$, $\sigma_{2,0} = \sigma_{2,2} = 0$ et $\sigma_{2,1} = 3$. On représente en bleu (resp. en vert) les séparateurs à la première étape (resp. à la seconde étape).

Remarquons qu’une partie du séparateur bleu avant la première pile dans la situation à gauche est un séparateur vert entre la première pile et la deuxième pile dans la situation à droite. Il en est de même du séparateur bleu après la dernière pile dans la situation à gauche.

2. Ainsi, lorsqu'on a T et μ , on peut enlever la condition 1b. L'utilité de cette condition intervient lorsqu'on veut construire des exemples de transformation de rang 1 munie d'une mesure invariante. Par exemple, il suffit de considérer la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , de fixer des q_n et des $\sigma_{n,i}$ et de construire en conséquence les $T^i(B_n)$ tout simplement comme des intervalles (voir l'exemple qui suit). La condition 1b assure à la fin que l'ensemble X construit dans \mathbb{R} est de mesure de Lebesgue finie. En effet, en notant M_0 la mesure de B_0 , alors à chaque étape on ajoute $(M_0\sigma_n)/(q_0 \dots q_n)$ où $(q_0 \dots q_n)/M_0$ est plus grand que h_{n+1} . Il ne reste plus qu'à normaliser la mesure de Lebesgue pour obtenir une mesure de probabilité μ sur X .
3. Si on se sert de cette définition pour construire des exemples, alors à l'étape n de la construction, on connaît T sur \mathcal{R}_n privé de son dernier étage $T^{h_n-1}(B_n)$. T est encore inconnu sur $(X \setminus \mathcal{R}_n) \sqcup T^{h_n-1}(B_n)$ et les étapes d'après permettent d'affiner cet ensemble. La dernière condition de croissance des T -partitions vers la σ -algèbre assure qu'on connaît T presque partout sur X .

Exemple 5.17.

Nous présentons la transformation de CHACON. Elle est associée à $q_n = 3$, $\sigma_{n,0} = \sigma_{n,1} = \sigma_{n,3} = 0$ et $\sigma_{n,2} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On part de $B_0 = [0, 1]$ qu'on coupe en $q_0 = 3$ intervalles égaux $B_{0,0} := [0, 1/3]$, $B_{0,1} := [1/3, 2/3]$ et $B_{0,2} := [2/3, 1]$ ²⁷. Les valeurs des $\sigma_{0,i}$ nous indiquent que la transformation T que nous construisons envoie $B_1 := B_{0,0}$ sur $B_{0,1}$ ²⁸, puis ce dernier sur un séparateur $\Sigma_{0,2,1}$, puis ce séparateur sur $B_{0,2}$. Le séparateur est choisi de mesure de Lebesgue $1/3$ (comme les autres intervalles), nous prenons par exemple $\Sigma_{0,2,1} = [1, 1 + 1/3]$. Nous avons donc construit une tour de Rokhlin $\mathcal{R}_1 := (B_0, T(B_0), T^2(B_0), T^3(B_0))$. A ce stade, nous connaissons T sur B_0 , $T(B_0)$ et $T^2(B_0)$, mais pas sur le dernier étage $T^3(B_0)$.
2. B_1 est ensuite coupée en $q_1 = 3$ intervalles $B_{1,0} = [0, 1/9]$, $B_{1,1} = [1/9, 2/9]$ et $B_{1,2} = [2/9, 1/3]$. On dispose de 3 sous-tours de Rokhlin dans \mathcal{R}_1 , ce sont les $(B_{1,i}, T(B_{1,i}), T^2(B_{1,i}), T^3(B_{1,i}))$. On ne connaît pas T sur $T^3(B_1)$, c'est-à-dire sur chaque $T^3(B_{1,i})$, grâce à ce qui suit, on va connaître T sur $T^3(B_{1,0})$ et $T^3(B_{1,1})$. En effet, d'après les valeurs des $\sigma_{1,i}$, on construit une tour de Rokhlin \mathcal{R}_2 en empilant les sous-tours les unes sur les autres dans l'ordre croissant de hauteur par rapport à i , en intercalant un séparateur $\Sigma_{1,2,1}$ entre la deuxième et la troisième, on choisira par exemple $\Sigma_{1,2,1} = [1 + 1/3, 1 + 1/3 + 1/9]$ (le séparateur doit être de mesure $1/9$). Ainsi $T^3(B_{1,0})$ est envoyé sur $B_{1,1}$, $T^3(B_{1,1})$ sur $\Sigma_{1,2,1}$, $\Sigma_{1,2,1}$ sur $B_{1,2}$ et on ne sait pas encore comment est définie T sur $T^3(B_{1,2})$.

Et ainsi de suite. Au total, X vaut $[0, 1 + 1/3 + 1/9 + 1/27 + \dots] = [0, 3/2]$ (nous sommes partis de $[0, 1]$ que nous avons élargie suite à l'ajout de séparateurs). μ vaut $(2/3)\text{Leb}$.

(h_n) est définie par $h_0 = 1$ et $h_{n+1} = 3h_n + 1$, donc $h_n = (3^{n+1} - 1)/2$. $M_0 := \mu([0, 1])$ vaut $2/3$. Ainsi la tour de Rokhlin \mathcal{R}_n est de mesure

$$\frac{h_n M_0}{q_0 \dots q_{n-1}} = 1 - \frac{1}{3^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2h_n + 1}.$$

La mesure du complémentaire de \mathcal{R}_n est donc équivalente à $1/(2h_n)$. Ainsi la transformation de CHACON est dans R1^φ pour toute $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sous-linéaire ne s'annulant pas à partir d'un certain rang (nous énoncerons un fait plus général dans la proposition 6.11).

La transformation de CHACON est faiblement mélangeante mais pas fortement mélangeante.

5.3 Odomètres

Définition 5.18. *Les **odomètres** sont les transformations de rang 1 admettant une construction géométrique (voir la définition 5.14) ne nécessitant pas de séparateurs. Autrement dit, les tours de Rokhlin emboîtées recouvrent déjà X . En particulier, on a $h_n = q_0 \dots q_{n-1}$.*

²⁷. On devrait considérer des intervalles deux à deux disjoints mais cela n'a aucune importance du point de vue de la mesure de Lebesgue. Tout ce qui suit doit être compris à mesure de Lebesgue nulle près.

²⁸. On peut par exemple construire T de manière affine sur chaque morceau concerné.

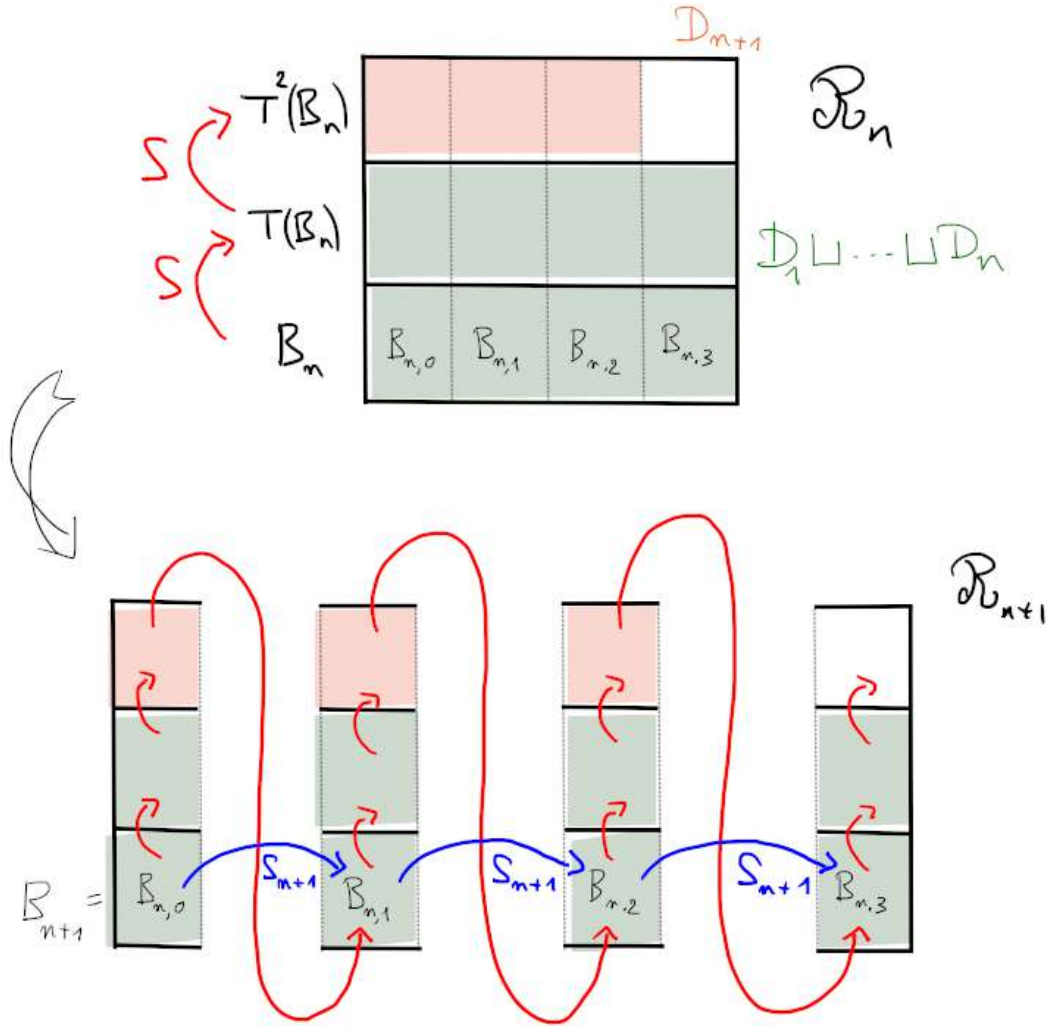


FIGURE 17 – Illustration de S_{n+1} lors du passage de \mathcal{R}_n à \mathcal{R}_{n+1} avec $h_n = 3, q_n = 4$. S envoie le haut d’une pile sur la base $B_{n,i}$ de la pile suivante, cela revient à redescendre la pile et à appliquer S_{n+1} . Pour savoir comment est défini S sur le bloc non colorié, il faut poursuivre la subdivision, définir les S_i d’après, pour diminuer la zone sur laquelle on ne connaît pas encore S .

Une transformation concrète qui est un odomètre associé aux entiers q_n est l’addition de $(1, 0, 0, \dots)$ avec retenue à droite sur $X := \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/q_n \mathbb{Z}$, c’est-à-dire

$$\begin{aligned}
 X &\rightarrow X \\
 x &\mapsto \begin{cases} (0, 0, 0, \dots) & \text{si } x = (q_n - 1)_{n \in \mathbb{N}} \\ (0, \dots, 0, x_N + 1, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots) & \text{si } N := \min \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq q_n - 1\} \text{ existe} \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Le produit des probabilités uniformes sur chaque composante $\mathbb{Z}/q_n \mathbb{Z}$ est une probabilité invariante pour cette transformation. Avec les notations de la définition 5.14, on peut considérer B_n égal à l’ensemble des éléments $x \in X$ tels que $(x_0, \dots, x_{n-1}) = (0, \dots, 0)$ dans $\prod_{0 \leq i \leq n-1} \mathbb{Z}/q_i \mathbb{Z}$ (avec $B_0 = X$).

La remarque suivante est cruciale pour comprendre une manière de construire un odomètre. Nous nous en servons dans la partie 6.1.

Remarque 5.19.

1. Soit $S: \prod \mathbb{Z}/q_n \mathbb{Z} \rightarrow \prod \mathbb{Z}/q_n \mathbb{Z}$ un odomètre concret qu'on a explicité dans la définition 5.18. On définit les cylindres $\text{Cyl}(y_0, \dots, y_{n-1}) := \{x \in \prod \mathbb{Z}/q_n \mathbb{Z} \mid x_0 = y_0, \dots, x_{n-1} = y_{n-1}\}$ de tailles n et \mathcal{R}_n la tour de Rokhlin de hauteur $h_n = q_0 \dots q_{n-1}$ et de base $B_n = \text{Cyl}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ fois}})$. Par exemple pour $q_0 = 3,$

$q_1 = 2,$ \mathcal{R}_1 est formée des étages

- $B_1 = \text{Cyl}(0);$
- $S(B_1) = \text{Cyl}(1);$

et \mathcal{R}_2 est formée des étages

- $B_2 = \text{Cyl}(0, 0);$
- $S(B_2) = \text{Cyl}(1, 0);$
- $S^2(B_2) = \text{Cyl}(2, 0);$
- $S^3(B_2) = \text{Cyl}(0, 1);$
- $S^4(B_2) = \text{Cyl}(1, 1);$
- $S^5(B_2) = \text{Cyl}(2, 1).$

S envoie ensuite $S(B_1)$ sur B_1 et $S^5(B_2)$ sur B_2 .

2. Avec l'exemple que nous venons de donner, $B_1 = \text{Cyl}(0)$ est subdivisé en $q_1 = 2$ étages de \mathcal{R}_2 , qui sont $B_{1,0} = B_2$ et $B_{1,1} = S^3(B_2) = S^{q_0}(B_2)$. On remarque que $S^3 = S^{q_0}$ est l'application d'addition de $(0, 1, 0, 0, \dots)$ avec retenue à droite. En appliquant $S^6 = S^{q_0 q_1}$, on ajoute $(0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ avec retenue à droite.

Plus généralement, notons $S_n := S^{h_n} = S^{q_0 \dots q_{n-1}}$. S_n est l'application d'addition de

$$\underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)}_{n \text{ fois}}$$

avec retenue à droite. S_{n+1} envoie $B_{n,0}$ sur $B_{n,1}$, $B_{n,1}$ sur $B_{n,2}$, \dots , B_{n,q_n-2} sur B_{n,q_n-1} . De même pour $0 \leq i \leq h_n - 1$, S_{n+1} envoie $S^i(B_{n,1})$ sur $S^i(B_{n,2})$, $S^i(B_{n,2})$ sur $S^i(B_{n,3})$, \dots , $S^i(B_{n,q_n-1})$ sur $S^i(B_{n,q_n})$.

3. Ainsi, ne connaissant que les

$$S_n: \bigsqcup_{0 \leq j \leq q_{n-1}-2} B_{n-1,j} \rightarrow \bigsqcup_{0 \leq j \leq q_{n-1}-2} B_{n-1,j+1},$$

nous pouvons reconstituer S . En effet, sur $D_n := \bigsqcup_{0 \leq y \leq q_{n-1}-2} \text{Cyl}(q_0 - 1, \dots, q_{n-2} - 1, y)$ ²⁹ pour $n \geq 1$, appliquer S revient à revenir dans la base $B_{n-1} = \text{Cyl}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ fois}})$ de \mathcal{R}_{n-1} (sans toucher aux

coordonnées à partir du rang n) et à ajouter

$$\underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)}_{n-1 \text{ fois}},$$

c'est-à-dire à appliquer $S_{n-1}^{-q_{n-2}} S_{n-2}^{-q_{n-3}} \dots S_1^{-q_0}$ puis S_n .³⁰

Les données des $B_{n,i}$ et des S_n suffisent donc à construire l'odomètre S et ses tours de Rokhlin \mathcal{R}_n , c'est ce que nous utiliserons dans la partie 6.1.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq i \leq h_n - 1$, $0 \leq j \leq q_n - 1$, remarquons qu'on a

$$S^i(B_{n,j}) = \text{Cyl}(y_0, \dots, y_{n-1}, j)$$

avec $y_0 \in \llbracket 0, q_0 - 1 \rrbracket, \dots, y_{n-1} \in \llbracket 0, q_{n-1} - 1 \rrbracket$ tels que $i = \sum_{0 \leq \ell \leq n-1} q_0 \dots q_{\ell-1} y_\ell = \sum_{0 \leq \ell \leq n-1} h_\ell y_\ell$.

29. Les $n - 1$ - premières coordonnées sont maximales mais pas la n -ième, la retenue va donc arriver sur la n -ième coordonnée et les coordonnées d'avant vont s'annuler.

30. Il est important de le faire dans cet ordre, ne connaissant les S_i que partiellement sur X (par hypothèse). Tout est bien définie en appliquant $S_1^{-q_0}$, puis $S_2^{-q_1}$, puis $S_3^{-q_2}$, etc. En effet, on est initialement dans D_n donc dans B_{0,q_0-1} donc on peut appliquer $S_1^{-q_0}$ pour obtenir une première coordonnée nulle (les $n - 2$ autres restant maximales). On se trouve maintenant dans B_1 , plus précisément dans B_{1,q_1-1} donc on peut appliquer $S_2^{-q_1}$ pour annuler la deuxième coordonnée, etc.

Nous allons classifier les odomètres à conjugaison près, voire à flip-conjugaison près. Tout d'abord, nous définissons les nombres supernaturels qui permettront plus tard de décrire complètement les classes de conjugaison.

- Définition 5.20.** 1. Un **nombre supernaturel** Q est un produit formel $\prod_p p^{\nu_p}$ sur l'ensemble des nombres premiers, avec $\nu_p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ appelée la *multiplicité* de p .³¹
2. Deux nombres supernaturels sont égaux si les multiplicités sont les mêmes pour chaque nombre premier.
3. Un nombre supernaturel $Q = \prod_p p^{\nu_p}$ est dit **infini** s'il y a une infinité de nombres premiers comptés avec multiplicité, autrement dit si on a $\nu_p = \infty$ pour un certain p ou si $\nu_p > 0$ pour une infinité de nombres premiers.
4. On définit le nombre supernaturel associé à une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers plus grands ou égaux à 2, en considérant pour tout nombre premier p ,

$$\nu_p := \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_p(q_n) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

où $\nu_p(q_n)$ est la valuation p -adique de l'entier q_n .³²

Exemple 5.21.

Le nombre supernaturel associé à $(2)_{n \in \mathbb{N}}$ est 2^∞ , celui associé à $q_0 = 6, q_1 = 4, q_2 = q_3 = q_4 = \dots = 2$ est $2^\infty \cdot 3$.

Nous avons une bonne description du spectre des odomètres.

Propriété 5.22. Le spectre d'un odomètre associé à une suite d'entiers $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (voir les définitions 5.14 et 5.18) est l'ensemble des complexes de modules 1 de la forme $\exp\left(2i\pi \frac{j}{q_0 \dots q_n}\right)$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j \leq q_0 \dots q_n - 1$.

Ainsi le spectre ne dépend que des nombres premiers figurant dans les q_n , et de leurs occurrences, donc il ne dépend que du nombre supernaturel infini associé à $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Par conséquent, si cet odomètre admet une autre construction avec d'autres q'_0, q'_1, \dots , alors $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admettent le même nombre supernaturel. **A un odomètre, on lui associe un unique nombre supernaturel infini**, c'est celui associé à $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou à tout autre suite $(q'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définissant l'odomètre).

Les odomètres ne sont donc pas faiblement mélangeants.

Exemple 5.23.

L'odomètre construit avec les entiers $q_0 = q_1 = q_2 = \dots = p$ (p premier) est associé au nombre supernaturel infini p^∞ , son spectre vaut $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{U}_{p^n}$.

Enfin le théorème suivant donne une description des classes de conjugaisons d'une certaine famille de systèmes (comprenant les odomètres) grâce au spectre, ce qui permet une classification des odomètres (voir le corollaire qui suit).

Théorème 5.24 (HALMOS, VON NEUMANN - 1942). Les systèmes à spectre discret³³ sont classifiés à conjugaison près par leur spectre.

Corollaire 5.25. L'ensemble des classes de conjugaison des odomètres est en bijection avec l'ensemble des nombres supernaturels infinis, la correspondance étant définie dans la proposition 5.22.

31. Intuitivement, ce n'est rien d'autre qu'un paquet de nombres premiers dans lequel chaque nombre premier figure un certain nombre de fois, noté ν_p . Ou bien p n'y figure pas et $\nu_p = 0$, ou bien on y trouve un nombre fini de copies de p et $\nu_p \in \mathbb{N}^*$, ou bien on a un stock infini de copies de p et $\nu_p = \infty$.

32. Intuitivement, le nombre supernaturel associé stocke tous les diviseurs premiers apparaissant dans l'ensemble des q_n .

33. Un système est à spectre discret si son type spectral maximal s'écrit comme somme au plus dénombrable de Dirac, ou de manière équivalente si l'ensemble des fonctions propres de l'opérateur de Koopman engendre un sous-espace dense de L^2 .

Remarque 5.26.

Pour les odomètres, les classes de conjugaison sont également les classes de flip-conjugaison. En effet, le spectre d'un odomètre étant un groupe (voir la propriété 5.22), un odomètre est conjugué à son inverse.

Définition 5.27. *Si Q est un nombre supernaturel infini, le Q -odomètre est, à conjugaison près, un odomètre associé à Q . L'odomètre **dyadique** désigne le 2^∞ -odomètre et de manière générale le p^∞ -odomètre est aussi appelé le **p -odomètre**. Si $Q = \prod_p p^\infty$, on parle d'**odomètre universel**.*

Remarque 5.28.

1. Pour illustrer le corollaire 5.25, remarquons que si un odomètre est associé à $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans la définition 5.14, alors il est associé à $(q_0 q_1, q_2, q_3, q_4, \dots)$. En effet, au lieu de découper B_0 en q_0 morceaux pour obtenir la première tour de Rokhlin puis B_1 en q_1 morceaux pour obtenir la deuxième, on peut sauter une étape et directement découper B_0 en $q_0 q_1$ morceaux (en d'autres termes, on peut extraire une sous-suite de \mathcal{R}_n en gardant \mathcal{R}_0). Un fait remarquable est qu'on pourrait également intervertir q_2 et q_0 par exemple, on peut donc changer l'ordre chronologique de la construction. Les classes de conjugaison ne dépendent que des nombres premiers utilisés pour subdiviser les tours de Rokhlin
2. En fait, étant donné un Q -odomètre, le corollaire 5.25 implique qu'on peut choisir la suite d'entiers $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme on le souhaite, du moment que le nombre supernaturel associé soit toujours Q . C'est très pratique par exemple pour un odomètre universel puisqu'on a un stock infini pour chaque nombre premier. Il y a donc plus de souplesse pour choisir q_0 , puis q_1 , etc. Nous nous en servirons dans la partie 6.1.2.
3. Remarquons que pour une transformation de rang 1, on peut également sauter des étapes dans la définition 5.14. Par exemple, pour passer de \mathcal{R}_0 à \mathcal{R}_2 , au lieu de construire une tour intermédiaire \mathcal{R}_1 , on peut directement subdiviser en $q_0 q_1$ morceaux et le nombre de séparateurs à ajouter sera $q_1 \sigma_0 + \sigma_1$ (les séparateurs $\Sigma_{0,i,j}$ subdivisés en q_1 sous-séparateurs et les séparateurs $\Sigma_{1,i,j}$ qui sont déjà de la bonne taille). Cependant, il n'est a priori pas vrai qu'on puisse par exemple intervertir q_0 et q_2 comme on pourrait le faire pour un odomètre, il faut garder l'ordre chronologique de la construction, la seule opération possible est d'extraire une sous-suite de $(\mathcal{R}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Le dernier point sera intéressant dans la partie suivante quand on voudra se ramener à q_i arbitrairement grand pour i fixé, il suffira de le remplacer sans perte de généralité par $q_i q_{i+1} \dots q_{i+n}$ pour n assez grand (le nouvel entier d'indice $i+1$ sera donc q_{i+n} , sauf si on décide également de le rendre arbitrairement grand etc).

6 Equivalence orbitale de Shannon entre un odomètre et l'odomètre universel

Nous avons maintenant toutes les informations nécessaires sur les transformations de rang 1 et en particulier les odomètres (vocabulaire, notations, propriétés). Dans [KL22], KERR et LI construisent une équivalence orbitale entre un odomètre T et l'odomètre universel S et montrent qu'elle est de Shannon. Lors de ce stage, nous avons généralisé cette construction lorsque T est de rang 1 (on retrouve la construction des auteurs lorsque T est un odomètre), le but étant ensuite de quantifier les cocycles pour une éventuelle généralisation du théorème 2.10.

Nous pouvons étendre ce résultat pour certaines transformations de rang 1 (théorème 6.13), nous en parlons dans la partie 6.2 dans laquelle nous expliquons également les difficultés du problème et ce qui nous a amenés à nous intéresser à la vitesse de remplissage des tours de Rokhlin dans la sous-partie 5.2.2. Nous montrons également que cela peut concerner une transformation de rang 1 fortement mélangeante (théorème 6.16, partie 6.3), le mélange fort n'est donc pas préservé par l'équivalence orbitale de Shannon.

Mais avant cela, nous présentons dans la partie 6.1 la construction généralisée et nous quantifions les cocycles dans le cas où T est un odomètre. Contrairement aux auteurs qui montrent directement la finitude de l'entropie de chaque cocycle, nous obtenons que l'OE est de Shannon en montrant que c'est une φ -OE pour $\log(t) = O(\varphi(t))$ (d'après un résultat énoncé dans [CJLT23], que nous avons mentionné dans ce mémoire juste avant le corollaire 1.15). Nous apportons donc une quantification plus précise des cocycles.

Théorème 6.1. *Soit $\varphi, \psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, vérifiant $\varphi(t) = o(t^{1/3})$ et $\psi(t) = o(t^{1/2})$. Alors pour tout odomètre T , il existe une équivalence orbitale entre T et l'odomètre universel S tel que, si on note c_T et c_S les deux cocycles associés, c_T est φ -intégrable et c_S est ψ -intégrable.*

En particulier, T et S sont φ -OE pour toute $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $\varphi(t) = o(t^{1/3})$, et sont donc Shannon-OE.

Ce sera la même quantification pour les généralisations proposées dans ce mémoire (théorèmes 6.13 et 6.16).

Par exemple, avec $\varphi(t) = t^{1/3}/\log(2+t)$, on obtient que tout odomètre est $\left(\bigcap_{0 < p < 1/3} L^p\right)$ -OE à l'odomètre universel.

Rappelons que si $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est majorée par $\Phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ à partir d'un certain rang, alors la Φ -intégrabilité implique la φ -intégrabilité. Le lemme suivant, s'inspirant très fortement du lemme 2.12 dans [CJLT23], permet donc de réduire la preuve du théorème 6.1 au cas de fonctions φ et ψ ayant plus de propriétés.

Lemme 6.2. *Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $\varphi(t) = o(t^\alpha)$. Alors il existe $\Phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- Φ est sous-additive ;
- Φ est croissante ;
- $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(t) > 0$ pour tout $t > 0$;
- $\Phi(t) = o(t^\alpha)$;
- $\varphi(t) \leq \Phi(t)$ pour t assez grand.

Preuve du lemme 6.2. Posons

$$\begin{aligned} \theta: \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\mapsto \min\left(1, \sup_{s \geq t} \frac{\varphi(s)}{s}\right), \\ \Phi: \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\mapsto \int_0^t \theta(s) ds. \end{aligned}$$

θ est à valeurs strictement positives donc Φ est croissante, à valeurs positives et ne s'annule qu'en 0. Par décroissance de θ , Φ est de plus sous-additive.

Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $t_0 \geq 0$ tel que pour tout $s \geq t_0$, $\varphi(s) \leq \varepsilon s^\alpha$. Ainsi, si $T \geq t_0$, on a $\sup_{s \geq t} \varphi(s)/s \leq \sup_{s \geq t} \varepsilon/s^{1-\alpha} \leq \varepsilon/t^{1-\alpha}$. On a donc $\theta(t) \leq \varepsilon/t^{1-\alpha}$ pour tout $t \geq t_0$, ce qui donne

$$\int_{t_0}^t \theta(s) ds \leq \varepsilon \left[\frac{s^\alpha}{\alpha} \right]_{t_0}^t \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} t^\alpha.$$

D'où $\Phi(t) = o(t^\alpha)$.

Par décroissance de θ , on a $\Phi(t) \geq t\theta(t)$ (pour $s \geq t$, minorer $\theta(s)$ par $\theta(t)$). De plus, pour t assez grand, on a $\theta(t) = \sup_{s \geq t} \frac{\varphi(s)}{s}$. Ainsi, pour t assez grand, on a

$$\Phi(t) \geq t\theta(t) = t \sup_{s \geq t} \frac{\varphi(s)}{s} \geq t \frac{\varphi(t)}{t} = \varphi(t).$$

Donc Φ convient. □

6.1 Construction d'une équivalence orbitale entre une transformation de rang 1 et l'odomètre universel, quantification des cocycles

Considérons $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ de rang 1, avec les notations $h_n, q_n, \sigma_n, \sigma_{n,i}, B_n, \mathcal{R}_n$ comme dans la définition 5.14. Notons $z_n := \max \{\sigma_{n,i} \mid 0 \leq i \leq q_n\}$ et $Z_n := \max \{z_0, \dots, z_n\} = \max \{\sigma_{j,i} \mid 0 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq q_j\}$. Nous noterons X_n la partie de X recouverte par \mathcal{R}_n et $\varepsilon_n := \mu((X_n)^c)$. Nous allons construire un odomètre universel S ayant les mêmes orbites que T .

6.1.1 Présentation générale de la construction

Nous renvoyons le lecteur à la très importante remarque 5.19. Cette remarque concerne un odomètre concret (agissant sur un certain espace $\prod \mathbb{Z}/q_n \mathbb{Z}$), nous allons nous y ramener à conjugaison près. Pour S , nous utiliserons les mêmes notations que pour T mais avec des primes. Voici l'idée générale de la construction.

- Nous allons construire une suite $(\mathcal{R}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de partitions, croissante pour \ll , telle que $\mathcal{R}'_0 = (X)$ et les pièces de \mathcal{R}'_n sont de même mesure et subdivisées en q'_n pièces de \mathcal{R}'_{n+1} . Une fois S construite, ce sera une suite de tours de Rokhlin emboîtées pour cette transformation. Si h'_n est le cardinal de \mathcal{R}'_n , alors on a $h'_n = q'_0 \dots q'_{n-1}$, on note B'_n le premier élément de \mathcal{R}'_n (ce sera sa base, en tant que tour de Rokhlin de S) et $B'_{n,0}, \dots, B'_{n,q'_n-1}$ les pièces de \mathcal{R}'_{n+1} (dans l'ordre d'indexation de cette partition) qui composent B'_n .
- Pour construire S , nous allons d'abord définir les $S_n: \bigsqcup_{0 \leq j \leq q_{n-1}-2} B'_{n-1,j} \rightarrow \bigsqcup_{0 \leq j \leq q_{n-1}-2} B'_{n-1,j+1}$, qui envoient $B'_{n-1,j}$ sur $B'_{n-1,j+1}$, et enfin définir S à partir de ces applications (comme l'indique la remarque 5.19).
- Il faut que $(\mathcal{R}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croisse vers la σ -algèbre de X pour que S soit un odomètre. Pour cela, nous nous appuyerons sur le fait que $(\mathcal{R}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie cela et les \mathcal{R}'_n seront construites à partir des \mathcal{R}_n de sorte à pouvoir exploiter cette hypothèse.
- S sera en plus un odomètre universel si le nombre supernaturel associé à $(q'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\prod p^\infty$. Pour cela, nous fixerons une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres premiers telle que tout nombre premier y figure un infinité de fois et les q'_n seront construits successivement comme des multiples des p_n .
- Pour être plus précis sur la construction des étages de \mathcal{R}'_{n+1} connaissant \mathcal{R}'_n , chaque $B'_{n,i}$ sera construit avec des briques de la forme $T^j(B_m)$, $m \geq n$, et S_{n+1} sera définie de sorte à envoyer des $T^j(B_m)$ composant $B'_{n,i}$ sur les $T^\ell(B_m)$ composant $B'_{n,i+1}$, tout simplement en imposant que S_{n+1} coïncide avec un certain T^k sur chacune des briques. Les S_n seront donc des « puissances de T par morceaux ». En définissant ensuite S à partir des S_n , nous obtiendrons facilement que les S -orbites sont incluses dans les T -orbites.
- Nous montrerons l'autre inclusion des orbites, un fait beaucoup moins évident.
- Pour quantifier chacun des deux cocycles, il y aura une partition pour laquelle on borne assez finement le cocycle en question sur chaque pièce et qui nous donnera une majoration (espérons-la finie) de sa ψ - ou de sa φ -intégrale.

Cette construction s'appuie sur celle proposée par les auteurs dans [KL22] pour démontrer le théorème 2.10. Nous la généralisons dans le cas des transformations de rang 1 (avec des tours de Rokhlin ne recouvrant pas entièrement X et avec des séparateurs).

Rappelons, comme indiqué dans les remarques 3 et 4 que les h_n et q_n peuvent être récursivement choisis arbitrairement grands (en sautant des étapes de la construction par *cutting & stacking*, c'est-à-dire en extrayant une bonne sous-suite de la suite $(\mathcal{R}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de tours de Rokhlin qui y figurent), nous préciserons cela après la construction, nous en aurons besoin pour obtenir des quantités assez petites.

6.1.2 La construction

Considérons une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres premiers telles que tout nombre premier y figure un infinité de fois. Construisons les q'_n , $(B'_{n-1,i})_{0 \leq i \leq q'_n}$ et S_n , évoqués dans la présentation générale de la construction.

Pour construire $B'_{n-1,i}$, nous choisirons une unique brique de la forme $T^i(B_n)$, notée $B'_{n-1,i}(n)$, complétée de $B'_{n-1,i}(n+1)$ construit avec des briques restantes de la forme $T^i(B_{n+1})$, puis de $B'_{n-1,i}(n+2)$ construit avec des briques restantes de la forme $T^i(B_{n+2})$, etc. L'union disjointe des $B'_{n-1,i}(m)$ pour $m \geq n$ sera exactement $B'_{n-1,i}$. La construction se fait donc par récurrence double : une récurrence « externe » sur $n \in \mathbb{N}^*$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ une récurrence « interne » sur $m \geq n$.

— **$n = 1$** : Nous allons construire une première tour de Rokhlin \mathcal{R}'_1 (tour pour une application S définie partiellement, qu'on ne connaîtra pas encore sur le dernier étage). On pourra noter $\mathcal{R}'_0 := (X)$ la tour triviale et $B'_0 := X$ sa base.

— **$m = 1$** : Soit q'_0 le plus grand multiple de p_0 qui est plus petit ou égal à $q_0 - 1$ ³⁴. On définit pour tout $0 \leq i \leq q'_0 - 1$,

$$B'_{0,i}(1) := T^i(B_1),$$

$$S_1(1) : \bigsqcup_{0 \leq i \leq q'_0 - 2} B'_{0,i}(1) \rightarrow \bigsqcup_{0 \leq i \leq q'_0 - 2} B'_{0,i+1}(1)$$

qui coïncide avec T sur son support.

— **$m > 1$** : Supposons les $B'_{0,i}(M)$ construits pour $1 \leq M \leq m - 1$, $0 \leq i \leq q'_0 - 1$. Soit

$$W_{1,m} := X \setminus \bigsqcup_{1 \leq M \leq m-1} \bigsqcup_{0 \leq i \leq q'_0 - 1} B'_{0,i}(M)$$

(la partie de X qu'on n'a pas encore touchée à l'issue de l'étape $m - 1$, on pourrait d'ailleurs définir $W_{1,1} = X$). On note

$$0 \leq j_0^{(1,m)} < j_1^{(1,m)} < \dots < j_{r_{1,m}}^{(1,m)} < h_m$$

l'ensemble des indices $j \in \llbracket 0, h_m - 1 \rrbracket$ tels que $T^j(B_m) \subset W_{1,m}$ ³⁵. Soit $t_{1,m} \in \mathbb{N}^*$ tel que $q'_0 t_{1,m}$ est le plus grand multiple de q'_0 plus petit que $r_{1,m}$ (remarquons que pour $m = 1$, on a $r_{1,1} = h_1 - 1$ et on peut poser $t_{1,1} = 1$ par cohérence). Alors on fait q'_0 paquets de $t_{1,m}$ blocs de la forme $T^j(B_m)$, plus précisément on définit pour tout $0 \leq i \leq q'_0 - 1$,

$$B'_{0,i}(m) := \bigsqcup_{0 \leq t \leq t_{1,m} - 1} T^{\binom{j_{i+tq'_0}^{(1,m)}}{j_{i+tq'_0}^{(1,m)}}}(B_m)$$
³⁶

et on définit $S_1(m)$ coïncidant avec $T^{\binom{j_{i+1+tq'_0}^{(1,m)}}{j_{i+tq'_0}^{(1,m)}}} - \binom{j_{i+tq'_0}^{(1,m)}}{j_{i+tq'_0}^{(1,m)}}$ sur $T^{\binom{j_{i+tq'_0}^{(1,m)}}{j_{i+tq'_0}^{(1,m)}}}(B_m)$ ³⁷ pour tout $0 \leq i \leq q'_0 - 2$,

$0 \leq t \leq t_{1,m} - 1$, de sorte que les briques $T^{\binom{j_{i+tq'_0}^{(1,m)}}{j_{i+tq'_0}^{(1,m)}}}(B_m)$ soient envoyés sur les briques $T^{\binom{j_{i+1+tq'_0}^{(1,m)}}{j_{i+1+tq'_0}^{(1,m)}}}(B_m)$. Ainsi les $B'_{0,i}(m)$ sont envoyés sur les $B'_{0,i+1}(m)$ et cela définit

$$S_1(m) : \bigsqcup_{0 \leq i \leq q'_0 - 2} B'_{0,i}(m) \rightarrow \bigsqcup_{0 \leq i \leq q'_0 - 2} B'_{0,i+1}(m).$$

34. Evidemment, il faut que q_0 soit strictement plus grand que p_0 , ce que nous supposons quitte à remplacer q_0 par $q_0 \dots q_k$ pour k assez grand (c'est-à-dire quitte à « sauter des étapes » dans la construction par *cutting & stacking*). Nous ne le mentionnerons pas à chaque fois lors de la construction de S , nous supposons que les h_n et q_n sont déjà choisis pour que tout soit bien défini. Nous verrons tout à l'heure que c'est possible (voir la vérification 2 de la sous-partie 6.1.3).

35. Remarquons que les blocs $T^j(B_m)$, $0 \leq j \leq h_m - 1$, sont ou bien inclus dans $W_{1,m}$ ou bien disjoints de cette ensemble, car $W_{1,m}$ est formé de blocs de la forme $T^j(B_M)$ pour $1 \leq M \leq m - 1$ et les tours de Rokhlin \mathcal{R}_M sont emboîtées. Ce sera également valable quand on considérera $W_{n,m}$ de manière générale.

36. On confectionne les paquets de cette manière afin de pouvoir contrôler convenablement le cocycle c_S (voir la propriété 5 de la sous-partie 6.1.3). En effet, en procédant ainsi, nous pouvons dire que sur un certain $\mathbb{B} := T^{j_i^{(1,m)}}(B_m)$, $0 \leq i < r_{1,m}$, c_S est le plus petit entier positif ℓ tel que $T^\ell(\mathbb{B})$ est dans $W_{1,m}$.

37. C'est important de définir nos applications comme étant des « puissances de T par morceaux », afin d'avoir facilement un cocycle c_S quand on définira S à partir de ces fonctions.

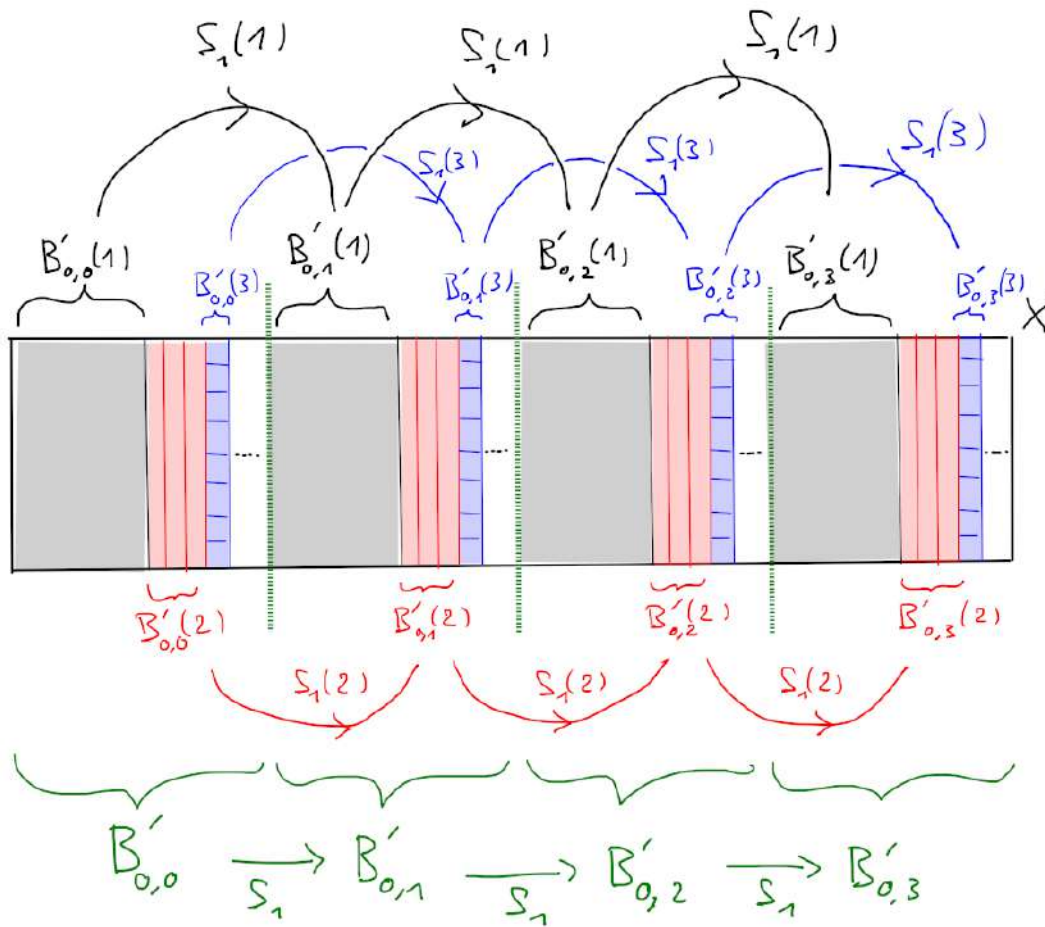


FIGURE 18 – Illustration de la construction à $n = 0$, avec $q'_0 = 4$.

$B'_{0,i}$ est construit en assemblant des briques, d'abord une unique brique noire $T^j(B_1)$ pour former $B'_{0,i}(1)$, puis des briques rouges $T^j(B_2)$ pour former $B'_{0,i}(2)$, puis des briques bleues $T^j(B_3)$ pour former $B'_{0,i}(3)$, etc.

$S_1(1)$ envoie la brique noire de $B'_{0,i}$ vers celle de $B'_{0,i+1}$, $S_1(2)$ envoie les briques rouges de $B'_{0,i}$ vers celles de $B'_{0,i+1}$, $S_1(3)$ envoie les briques bleues de $B'_{0,i}$ vers celles de $B'_{0,i+1}$, etc.

Fin de la construction au rang $n = 1$: On pose

$$B'_{0,i} := \bigsqcup_{m \geq 1} B'_{0,i}(m)$$

pour tout $0 \leq i \leq q'_0 - 1$, $B'_1 := B'_{0,0}$ et on définit

$$S_1: \bigsqcup_{0 \leq i \leq q'_0 - 2} B'_{0,i} \rightarrow \bigsqcup_{0 \leq i \leq q'_0 - 2} B'_{0,i+1}$$

l'application qui coïncide avec les $S_1(m)$ sur leur support respectif (voir la figure 18).

On peut définir partiellement notre futur odomètre universel S comme étant égal à S_1 sur son support $D_1 := \bigsqcup_{0 \leq i \leq q'_0 - 2} B'_{0,i}$. On pose $\mathcal{R}'_1 := (B'_{0,0}, \dots, B'_{0,q'_0 - 1}) = (B'_1, S(B'_1), \dots, S^{q'_0 - 1}(B'_1))$, c'est une tour de Rokhlin pour S partiellement défini. \mathcal{R}'_1 recouvre X . D_1 est l'ensemble des éléments qui ne sont pas au dernier étage de cette tour³⁸. On ne connaît pas S au dernier étage, il va falloir raffiner la tour pour préciser S (en construisant \mathcal{R}'_2 emboîtée dans \mathcal{R}'_1 , D_2 , puis \mathcal{R}'_3 emboîtée dans \mathcal{R}'_2 , D_3 , etc).

- **$n > 1$:** Supposons la construction finie aux rangs $1, \dots, n-1$, ce qui a donné des tours de Rokhlin (pour S partiellement défini) emboîtées $\mathcal{R}'_1, \dots, \mathcal{R}'_{n-1}$, où la base B'_k de \mathcal{R}'_k est subdivisée en q'_k étages $B'_{k,0}, \dots, B'_{k,q'_k - 1}$ de \mathcal{R}'_{k+1} , $B'_{k,0} = B'_{k+1}$ étant sa base, avec une application S_{k+1} permettant de passer de $B'_{k,i}$ à $B'_{k,i+1}$. A partir de S_1, \dots, S_{n-1} , S est défini sur $D_1 \sqcup \dots \sqcup D_{n-1}$ qui est l'ensemble des éléments qui ne sont pas au dernier étage de \mathcal{R}'_{n-1} . \mathcal{R}'_k a $h'_k := q'_0 \dots q'_{k-1}$ étages.

S n'est pas encore défini au dernier étage, nous allons donc poursuivre sa définition avec une nouvelle tour de Rokhlin \mathcal{R}'_n qui s'emboîte dans \mathcal{R}'_{n-1} . Nous allons construire les étages $B'_{n-1,0}, \dots, B'_{n-1,q'_{n-1} - 1}$ de la future tour \mathcal{R}'_n , qui partitionnent la base B'_{n-1} de \mathcal{R}'_{n-1} et S_n qui envoie $B'_{n-1,i}$ sur $B'_{n-1,i+1}$. Pour construire les $B'_{n-1,i}$ (qui partitionnent B'_{n-1}), nous allons quasiment procéder comme pour les $B'_{0,i}$ (qui partitionnent X), mais cette-fois-ci en se restreignant à B'_{n-1} .

La base B'_{n-1} vaut $B'_{n-2,0}$ qui est la réunion disjointe des $B'_{n-2,0}(m)$, c'est pourquoi nous allons nous placer dans des unions de tels ensembles, d'où l'expression des $W_{n,m}$ que nous allons considérer.

- **$m = n$:** Soit

$$W_{n,n} := B'_{n-2,0}(n-1) \sqcup B'_{n-2,0}(n).^{39}$$

On note

$$0 \leq j_0^{(n,n)} < j_1^{(n,n)} < \dots < j_{r_{n,n}}^{(n,n)} < h_n$$

l'ensemble des indices $j \in \llbracket 0, h_n - 1 \rrbracket$ tels que $T^j(B_n) \subset W_{n,n}$. q'_{n-1} est défini comme étant le plus grand multiple de p_{n-1} qui est plus petit que $r_{n,n}$. On définit pour tout $0 \leq i \leq q'_{n-1} - 1$,

$$B'_{n-1,i}(n) := T^{(j_i^{(n,n)})}(B_n)$$

et

$$S_n(n): \bigsqcup_{0 \leq i \leq q'_{n-1} - 2} B'_{n-1,i}(n) \rightarrow \bigsqcup_{0 \leq i \leq q'_{n-1} - 2} B'_{n-1,i+1}(n)$$

qui vaut $T^{(j_{i+1}^{(n,n)}) - (j_i^{(n,n)})}$ sur chaque $B'_{n-1,i}(n)$ de sorte à envoyer $B'_{n-1,i}(n)$ sur $B'_{n-1,i+1}(n)$.⁴⁰

38. On voudra que D_1 corresponde, à conjugaison près, aux éléments de $\prod \mathbb{Z}/q'_n \mathbb{Z}$ dont la première coordonnée n'est pas maximale. De manière générale, D_n construit ici aura le même rôle que D_n défini dans la remarque 5.19, dans le cas de l'espace $\prod \mathbb{Z}/q'_n \mathbb{Z}$.

39. On veut construire les $B'_{n-1,i}(m)$ pour $m \geq n$, où les $B'_{n-1,i}(m)$ à m fixé seront constitués de briques $T^j(B_m)$. Tout d'abord, on s'occupe des $B'_{n-1,i}(n)$, chacun constitué d'une unique brique de la forme $T^j(B_n)$. En plus de chercher ces briques dans B'_{n-1} , on les choisit parmi les briques $T^j(B_n)$ qui ont constitué $B'_{n-2,0}(n)$ et parmi les blocs $T^j(B_n)$ inclus dans des briques $T^j(B_{n-1})$ qui ont constitué $B'_{n-2,0}(n-1)$. On ne les cherche pas dans les $B'_{n-2,0}(m)$ pour $m \geq n+1$, constitués de briques trop petites car ce sont des $T^j(B_m)$ pour $m \geq n+1$. D'où l'expression de $W_{n,n}$. Ce sera les mêmes idées pour les $W_{n,m}$, $m \geq n+1$.

40. Comme le cas $m = n = 1$, et contrairement au cas $m > n$, on fait q_{n-1} paquets de 1 bloc au lieu de q_{n-1} paquets de $t_{n,n}$ blocs pour $t_{n,n}$ maximal. On notera donc $t_{n,n} = 1$. Ce choix pour $m = n$ nous permettra d'obtenir une suite $(\mathcal{R}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de tours de Rokhlin qui croît vers la σ -algèbre (voir le corollaire 6.4 de la sous-partie 6.1.4).

— $m > n$: Soit

$$W_{n,m} := \left(\bigsqcup_{n-1 \leq M \leq m} B'_{n-2,0}(M) \right) \setminus \left(\bigsqcup_{n \leq M \leq m-1} \bigsqcup_{0 \leq i \leq q'_{n-1}-1} B'_{n-1,i}(M) \right).$$

On note

$$0 \leq j_0^{(n,m)} < j_1^{(n,m)} < \dots < j_{r_{n,m}}^{(n,m)} < h_m$$

l'ensemble des indices $j \in \llbracket 0, h_m - 1 \rrbracket$ tels que $T^j(B_m) \subset W_{n,m}$. Soit $t_{n,m} \in \mathbb{N}^*$ tel que $q'_{n-1} t_{n,m}$ est le plus grand multiple de q'_{n-1} plus petit que $r_{n,m}$. On fait q'_{n-1} paquets de $t_{n,m}$ blocs de la façon suivante.

$$\forall 0 \leq i \leq q_{n-1}, B'_{n-1,m}(m) := \bigsqcup_{0 \leq t \leq t_{n,m}-1} T^{(j_{i+tq'_{n-1}}^{(n,m)})}(B_m).$$

On définit $S_n(m)$ coïncidant avec $T^{(j_{i+1+tq'_{n-1}}^{(n,m)})} - (j_{i+tq'_{n-1}}^{(n,m)})$ sur $T^{(j_{i+tq'_{n-1}}^{(n,m)})}(B_m)$ pour tout $0 \leq i \leq q'_{n-1} - 2$, $0 \leq t \leq t_{n,m} - 1$, de sorte que les briques $T^{(j_{i+tq'_{n-1}}^{(n,m)})}(B_m)$ soient envoyés sur les briques $T^{(j_{i+1+tq'_{n-1}}^{(n,m)})}(B_m)$. Ainsi les $B'_{n-1,i}(m)$ sont envoyés sur les $B'_{n-1,i+1}(m)$ et cela définit

$$S_n(m): \bigsqcup_{0 \leq i \leq q'_{n-1}-2} B'_{n-1,i}(m) \rightarrow \bigsqcup_{0 \leq i \leq q'_{n-1}-2} B'_{n-1,i+1}(m).$$

Fin de la construction au rang n : On pose

$$B'_{n-1,i} := \bigsqcup_{m \geq n} B'_{n-1,i}(m)$$

pour tout $0 \leq i \leq q'_{n-1} - 1$ et on définit

$$S_n: \bigsqcup_{0 \leq i \leq q'_{n-1}-2} B'_{n-1,i} \rightarrow \bigsqcup_{0 \leq i \leq q'_{n-1}-2} B'_{n-1,i+1}$$

l'application qui coïncide avec les $S_n(m)$ sur leur support respectif.

La base B'_{n-1} de \mathcal{R}'_{n-1} étant subdivisée en $B'_{n-1,0} \sqcup \dots \sqcup B'_{n-1,q'_{n-1}-1}$, son dernier étage $S^{h'_{n-1}-1}(B'_{n-1})$ est subdivisé en $S^{h'_{n-1}-1}(B'_{n-1,0}) \sqcup \dots \sqcup S^{h'_{n-1}-1}(B'_{n-1,q'_{n-1}-1})$. On prolonge S sur $S^{h'_{n-1}-1}(B'_{n-1,0}) \sqcup \dots \sqcup S^{h'_{n-1}-1}(B'_{n-1,q'_{n-1}-2})$, en imposant que cela coïncide avec $S_n S^{-(h'_{n-1}-1)}$ sur cet ensemble. S envoie donc $S^{h'_{n-1}-1}(B'_{n-1,i})$ sur $B'_{n-1,i+1}$. On a donc une tour de Rokhlin \mathcal{R}'_n emboîtée dans \mathcal{R}'_{n-1} , de base $B'_n := B'_{n-1,0}$, de hauteur $h'_n := q'_0 \dots q'_{n-1}$, recouvrant X . S est maintenant défini sur $(D_1 \sqcup \dots \sqcup D_{n-1}) \sqcup D_n$ avec $D_n := S^{h'_{n-1}-1}(B'_{n-1,0}) \sqcup \dots \sqcup S^{h'_{n-1}-1}(B'_{n-1,q'_{n-1}-2})$ qui est l'ensemble des éléments qui sont au dernier étage de \mathcal{R}'_{n-1} mais pas au dernier étage de \mathcal{R}'_n .

6.1.3 Quelques justifications

1. Les \mathcal{R}'_n sont des partitions de X :

Par choix des $W_{n,m}$ les éléments de \mathcal{R}'_n sont bien deux à deux disjoints. Il faut maintenant montrer que \mathcal{R}'_n recouvre X .

— $n = 1$: Il suffit de montrer que $\mu(W_{1,m}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$. Nous considérons les notations introduites au tout début de la sous-partie 6.1. $W_{1,m+1} \cap X_m$ est une union de blocs de la forme $T^j(B_m)$ (ceux qui n'ont pas été sélectionnés lors de l'étape m), il y en a au plus q'_1 (pour passer de $W_{1,m}$ à $W_{1,m+1}$, on a fait des q'_1 paquets de $t_{1,m}$ blocs de la tour \mathcal{R}_m , avec $t_{1,m}$ maximal). Donc $W_{1,m+1}$ est inclus dans l'union entre $(X_m)^c$ et au plus q'_1 blocs de la forme $T^j(B_m)$, donc $\mu(W_{1,m+1}) \leq \varepsilon_m + q'_1 \mu(B_m) \rightarrow 0$.

- $n > 1$: Il suffit de montrer que les étages $B'_{n-1,0}, \dots, B'_{n-1,q'_{n-1}-1}$ de \mathcal{R}'_n forment une partition de la base B'_{n-1} de \mathcal{R}'_{n-1} . Ils sont bien deux à deux disjoints, il suffit de montrer qu'ils recouvrent B'_{n-1} . On veut montrer que

$$\tilde{W}_{n,m} := B'_{n-1} \setminus \left(\bigsqcup_{n \leq M \leq m-1} \bigsqcup_{0 \leq i \leq q'_{n-1}-1} B'_{n-1,i}(M) \right)$$

a sa mesure qui tend vers 0 lorsque $m \rightarrow +\infty$. Mais $\tilde{W}_{n,m}$ est l'union disjointe de $\bigsqcup_{M \geq m+1} B'_{n-2,0}(M)$ et de $W_{n,m}$. Le premier ensemble a sa mesure qui tend vers 0. Il en est de même pour $W_{n,m}$ par choix des $t_{n,m}$ (même raisonnement que dans le cas $n = 1$, en plus simple car on n'a pas la partie en $(X_m)^c$). \square

2. Les q_n peuvent être choisis assez grands de sorte que les q'_{n-1} et les $t_{n,m}$ soient bien définis (les $r_{n,n}$ doivent être plus grands que les p_n et les $r_{n,m}$, $n < m$, plus grands que les q'_{n-1}) :

On choisit récursivement les q_n assez grands de sorte à avoir

$$\forall n \in \mathbb{N}, q_n > \max(p_n, h_n), \quad (13)$$

c'est-à-dire que, quitte à remplacer q_0 par $q_0 \dots q_k$ pour k assez grand, on a $q_0 > p_0$, puis quitte à remplacer q_1 par $q_1 \dots q_k$ pour k assez grand, on a $q_1 > \max(p_0, h_1)$, etc. En particulier, q_n est strictement plus grand que les h_1, \dots, h_n .

Montrons que cela suffit pour que la construction soit bien définie.

- $n = 1$: A $m = 1$, on a $q_0 > p_0$ donc le plus grand multiple de p_0 plus petit que $q_0 - 1$, qu'on note q'_0 , est non nul. A $m > 1$, si on a fini la construction à l'étape $m - 1$, alors il existe au moins un bloc de la forme $T^j(B_{m-1})$ qui n'a pas été sélectionné (à l'étape $m - 1$, il y en avait $r_{1,m-1} + 1$ et on en a choisi un certain nombre $q'_0 t_{1,m-1}$ qui est plus petit que $r_{1,m-1}$), ce qui signifie que les q_{m-1} blocs de la forme $T^\ell(B_m)$ qu'il contient font partie des blocs pouvant être sélectionnés à l'étape m . Ainsi $r_{1,m} + 1$ est plus grand ou égal à q_{m-1} . q_{m-1} est strictement plus grand que q_0 qui est plus grand que q'_0 donc $t_{1,m}$ défini à cette étape est plus grand ou égal à 1.
- $n > 1$: A $m = n$, on sait qu'il existe au moins un bloc de la forme $T^j(B_{n-1})$ dans $W_{n,n}$ (car $B'_{n-2,0}(n-1)$, construit à l'étape $(n-1, n-1)$, en est un) donc on sait que $W_{n,n}$ contient au moins q_{n-1} blocs de la forme $T^\ell(B_n)$. Ainsi $r_{n,n} + 1$ est plus grand que q_{n-1} qui est strictement plus grand que p_{n-1} donc q'_{n-1} est bien défini dans \mathbb{N}^* . A $m > n$, on obtient que $r_{n,m} + 1$ est plus grand que q_{m-1} (même raisonnement que pour $n = 1$) et q_{m-1} est strictement plus grand que h_n . Or h_n est plus grand que $r_{n,n} + 1$ (car les blocs de la forme $T^j(B_n)$, c'est-à-dire les étages de la tour \mathcal{R}_n , sont au nombre de h_n) donc plus grand que q'_{n-1} , d'où la bonne définition de $t_{n,m}$ dans \mathbb{N}^* . \square

3. Le nombre supernaturel associé à $(q'_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_n divise q_n . Or pour chaque nombre premier p , il existe une infinité de n tels que $p_n = p$. Donc $\prod p^\infty$ est le nombre supernaturel associé à $(q'_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ainsi S est un odomètre universel, sous réserve d'avoir montré que $(\mathcal{R}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît vers la σ -algèbre de X .

4. Une expression explicite de S en fonction des S_n :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $0 \leq i \leq h'_n - 1$, on a

$$S^i(B'_n) = S_1^{i_0} \dots S_n^{i_{n-1}}(B'_n) \quad (14)$$

avec $i_0 \in \llbracket 0, q'_0 - 1 \rrbracket, \dots, i_{n-1} \in \llbracket 0, q'_{n-1} - 1 \rrbracket$ tels que $i = \sum_{\ell=0}^{n-1} q'_\ell i_\ell = \sum_{\ell=0}^{n-1} h'_\ell i_\ell$.⁴¹

On peut le démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. C'est immédiat pour $n = 1$ car $S = S_1$ sur tous les étages de \mathcal{R}'_1 sauf le dernier. Supposons le résultat vrai au rang n . Pour $0 \leq i \leq h'_{n+1} - 1$, on dispose d'unique $0 \leq i_n \leq q'_n - 1$ et de $0 \leq j \leq h'_n - 1$ tels que $i = i_n h'_n + j$, ce qui donne $S^i(B'_{n+1}) = S^j(B'_{n,i_n})$. Or B'_{n,i_n} vaut $S_n^{i_n}(B'_{n+1})$ et est inclus dans B'_n sur lequel on sait ce que vaut S^j en fonction de S_1, \dots, S_n par hypothèse de récurrence. D'où le résultat. \square

41. A conjugaison près, c'est en fait ce qu'on trouve dans les remarques 3 et 4 (S_i incrémente la i -ième coordonnée).

Ainsi, on a

$$D_n = S_1^{q'_0-1} \dots S_{n-1}^{q'_{n-2}-1} \left(\bigsqcup_{0 \leq i_n \leq q'_{n-1}-2} B'_{n-1, i_n} \right) = S_1^{q'_0-1} \dots S_{n-1}^{q'_{n-2}-1} \left(\bigsqcup_{0 \leq i_n \leq q'_{n-1}-2} S_n^{i_n}(B'_{n-1,0}) \right), \quad (15)$$

$$S = S_n S_{n-1}^{-(q'_{n-2}-1)} \dots S_1^{-(q'_0-1)} \text{ sur } D_n.$$

5. Le cocycle de $S_n(m)$ est dans $\llbracket 1, h_{m-1} + z_{m-1} \rrbracket$ ⁴² :

Ce cocycle vaut $j_{i+1+tq'_{n-1}}^{(n,m)} - j_{i+tq'_{n-1}}^{(n,m)}$ sur $T^{(j_{i+tq'_{n-1}}^{(n,m)})}(B_m)$ pour tout $0 \leq i \leq q'_{n-1} - 2$, $0 \leq t \leq t_{n,m} - 1$, avec

$$0 \leq j_0^{(n,m)} < j_1^{(n,m)} < \dots < j_{r_{n,m}}^{(n,m)} < h_m$$

l'ensemble des indices $j \in \llbracket 0, h_m - 1 \rrbracket$ tels que $T^j(B_m) \subset W_{n,m}$ pour $0 \leq k \leq h_{m-1} - 1$. $W_{n,m}$ contient au moins un étage de la tour \mathcal{R}_{m-1} , on le note $T^{k_0}(B_{m-1})$ avec $0 \leq k_0 \leq h_{m-1} - 1$ fixé. En effet, si $n = m = 1$, c'est évident ; si $n = m > 1$, $B'_{n-2,0}(n-1)$ en est un ; si $m > n$, c'est parce qu'il en reste au moins un à l'issue de l'étape $(n, m - 1)$.

Soit $0 \leq i \leq q'_{n-1} - 2$, $0 \leq t \leq t_{n,m} - 1$, notons $\mathbb{B} := T^{(j_{i+tq'_{n-1}}^{(n,m)})}(B_m)$, $\Delta j := j_{i+1+tq'_{n-1}}^{(n,m)} - j_{i+tq'_{n-1}}^{(n,m)}$ et montrons que Δj est dans $\llbracket 0, h_{m-1} + \sigma_{m-1} \rrbracket$. On sait déjà que Δj est strictement positif par croissance stricte de $(j_i^{(n,m)})_i$. Par construction, Δj est le plus petit entier strictement positif ℓ tel que $T^\ell(\mathbb{B})$ est inclus dans $W_{n,m}$. Ainsi, s'il existe un entier J strictement positif tel que $T^J(\mathbb{B})$ est dans $T^{k_0}(B_{m-1})$, on a $\Delta j \leq J$. En considérant le plus petit J vérifiant cela, on a $J \leq h_{m-1} + z_{m-1}$ (dans le pire des cas, il faut remonter la tour, parcourir des séparateurs pour retomber dans la base et remonter dans $T^{k_0}(B_{m-1})$). Sinon un tel J n'existe pas, cela signifie que \mathbb{B} est parmi $T^{k_0}(B_{m-1, q_{m-1}}), \dots, T^{h_{m-1}}(B_{m-1, q_{m-1}}), \Sigma_{m-1, q_{m-1}, 1}, \dots, \Sigma_{m-1, q_{m-1}, \sigma_{m-1}, q_{m-1}}$. Mais $T^{\Delta j}(\mathbb{B})$ est également parmi ces étages, donc on a $\Delta j \leq h_{m-1} + \sigma_{m-1, q_{m-1}} \leq h_{m-1} + z_{m-1}$. \square

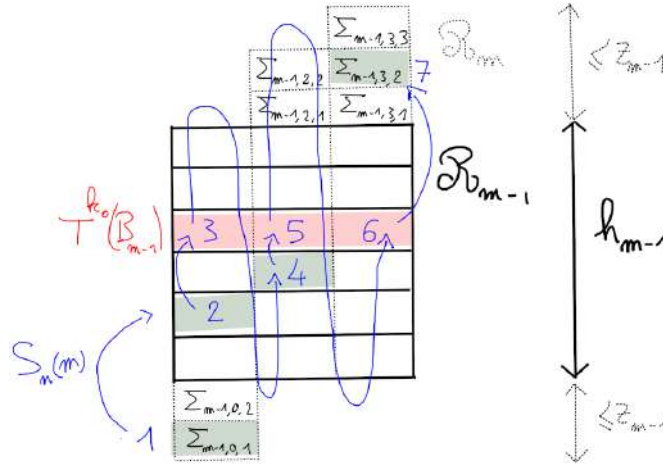


FIGURE 19 – Illustration de la borne du cocycle de $S_n(m)$. Dans le dessin, les blocs de la forme $T^j(B_m)$ qui sont inclus dans $W_{n,m}$, numérotés de 1 à 7, sont ou bien les étages de \mathcal{R}_m coloriés en vert, ou bien les blocs contenus dans l'étage de \mathcal{R}_{m-1} coloriés en rouge (il s'agit de $T^{k_0}(B_{m-1})$). \mathcal{R}_m est constitué de trois piles (issues du découpage de \mathcal{R}_{m-1} , chacune de taille h_{m-1}) et de séparateurs (il y en a au plus z_{m-1} consécutifs). Pour passer d'un bloc colorié au suivant, il faut dans le pire des cas parcourir une pile entière et des séparateurs consécutifs (c'est ce qui est fait pour passer du bloc numéroté 5 à celui numéroté 6 par exemple). Noter que le bloc 6 est celui pour lequel l'entier J n'existe pas.

42. Le cocycle de $S_n(m)$ est l'application qui à x dans le support de $S_n(m)$ associe l'entier k tel que $S_n(m)x = T^k x$.

On peut facilement montrer que ce cocycle est plus petit que h_m (on passe d'un étage de \mathcal{R}_m à un autre en appliquant la bonne puissance de T), la construction permet d'avoir une borne plus fine ($h_{m-1} + z_{m-1}$), cela nous aidera lors de la quantification des cocycles.

6. Une relation de récurrence entre les différentes quantités $r_{n,m}, q_n, q'_n, t_{n,m}, \sigma_n$:

Nous pouvons présenter un raisonnement combinatoire plus précis que lors de la vérification 2 de la sous-partie 6.1.3, pour obtenir

$$\begin{aligned}
t_{0,1} &:= 0 \\
m \geq 2 : \quad t_{0,m} &:= \sigma_{m-1} \\
m = n \geq 1 : \quad &\begin{cases} r_{n,n} + 1 = q_{n-1} + t_{n-1,n} \\ q'_{n-1} = \left\lfloor \frac{r_{n,n}}{p_{n-1}} \right\rfloor p_{n-1} \\ t_{n,n} := 1 \end{cases} \quad (16) \\
m > n \geq 1 : \quad &\begin{cases} r_{n,m} + 1 = q_{m-1}(r_{n,m-1} + 1 - q'_{n-1}t_{n,m-1}) + t_{n-1,m} \\ t_{n,m} = \left\lfloor \frac{r_{n,m}}{q'_{n-1}} \right\rfloor \end{cases}
\end{aligned}$$

Démontrons-le.

- $n = 1$: A $m = 1$, les $r_{1,1} + 1$ blocs de la forme $T^j(B_1)$ dont on dispose sont exactement les étages de \mathcal{R}_1 , il y en a q_0 , d'où le choix de poser $t_{0,1} = 0$. On en choisit q'_0 le plus grand multiple de p_0 plus petit que $r_{1,1}$ (on en choisit $q'_0 t_{1,1}$ avec $t_{1,1} := 1$). A $m > 1$, il reste par définition $r_{n,m} + 1$ blocs de la forme $T^j(B_m)$. Il y a ceux inclus dans les $r_{1,m-1} + 1 - q'_0 t_{1,m-1}$ blocs de la forme $T^\ell(B_{m-1})$ qui n'ont pas été choisis à l'étape $m - 1$ (ils sont donc q_{m-1} fois plus nombreux) et il y a les séparateurs définis lors du passage de \mathcal{R}'_{m-1} à \mathcal{R}'_m (ils sont au nombre de σ_{m-1} , d'où la définition de $t_{0,m}$). On en choisit $q'_0 t_{1,m}$, le plus grand multiple de q'_0 plus petit que $r_{1,m}$ (d'où $t_{1,m} = \lfloor r_{1,m}/q'_0 \rfloor$).
- $n > 1$: A $m = n$, on considère les $r_{n,n} + 1$ blocs de la forme $T^j(B_n)$ et inclus dans $W_{n,n} = B'_{n-2,0}(n-1) \sqcup B'_{n-2,0}(n)$. Construit à l'étape $(n-1, n-1)$, $B'_{n-2,0}(n-1)$ est de la forme $T^\ell(B_{n-1})$ donc il en contient q_{n-1} . Construit à l'étape $(n-1, n)$, $B'_{n-2,0}(n)$ est un paquet de $t_{n-1,n}$ blocs de la forme $T^j(B_n)$. D'où $r_{n,n} + 1 = q_{n-1} + t_{n-1,n}$. On sélectionne ensuite q'_{n-1} le plus grand multiple de p_{n-1} plus petit que $r_{n,n} + 1$ (c'est-à-dire $q'_{n-1} t_{n,n}$ pour $t_{n,n} := 1$). A $m > n$, il y a $r_{n,m} + 1$ blocs de la forme $T^j(B_m)$ dans $W_{n,m} = (\bigsqcup_{n-1 \leq M \leq m} B'_{n-2,0}(M)) \setminus (\bigsqcup_{n \leq M \leq m-1} \bigsqcup_{0 \leq i \leq q'_{n-1}-1} B'_{n-1,i}(M))$. Il reste ceux de $\bigsqcup_{n-1 \leq M \leq m-1} B'_{n-2,0}(M)$ qui n'ont pas été sélectionnés à l'issue de l'étape $m - 1$ (il y en a $q_{m-1}(r_{n,m-1} - q'_{n-1}t_{n,m-1})$) et il y a les nouveaux qui sont dans $B'_{n-2,0}(m)$ (construit à l'étape $(n-1, m)$, qui est donc un paquet de $t_{n-1,m}$ blocs de la forme $T^j(B_m)$). Puis on en choisit $q'_{n-1} t_{n,m}$, le plus grand multiple de q'_{n-1} plus petit que $r_{n,m}$. \square

Pour majorer des quantités, il sera plus simple d'utiliser ce qui suit. $q'_{n-1} t_{n,m-1}$ est le plus grand multiple de q'_{n-1} qui est plus petit que $r_{n,m-1}$. Ainsi $r_{n,m-1} + 1 - q'_{n-1} t_{n,m-1}$ est plus petit ou égal à q'_{n-1} . De plus, on a $\lfloor x \rfloor \leq x$ pour tout x . De (16), on obtient donc

$$\begin{aligned}
t_{0,1} &= 0 \\
m \geq 2 : \quad t_{0,m} &= \sigma_{m-1} \\
m = n \geq 1 : \quad &\begin{cases} r_{n,n} \leq q_{n-1} + t_{n-1,n} \\ q'_{n-1} \leq r_{n,n} \\ t_{n,n} = 1 \end{cases} \quad (17) \\
m > n \geq 1 : \quad &\begin{cases} r_{n,m} \leq q_{m-1} q'_{n-1} + t_{n-1,m} \\ t_{n,m} \leq \frac{r_{n,m}}{q'_{n-1}} \end{cases}
\end{aligned}$$

7. Des résultats asymptotiques :

A $m \geq 1$ fixé, supposons q_0, \dots, q_{m-2} fixés (ainsi h_1, \dots, h_{m-1} le sont aussi). On s'intéresse au comportement asymptotique des quantités lorsqu'on choisit q_{m-1} de plus en plus grand (en remplaçant q_{m-1} par

$q_{m-1} \dots q_{m-1+k}$ pour k assez grand). C'est d'ailleurs équivalent à choisir h_m de plus en plus grand, en remplaçant h_m par h_{m+k} .

- Si M_0 est la mesure de \mathcal{R}_0 , alors $(M_0 h_{m+k}) / (q_0 \dots q_{m-2} (q_{m-1} \dots q_{m-1+k}))$ est la mesure de la tour \mathcal{R}_{m+k} , cela tend donc vers 1 lorsque $k \rightarrow +\infty$. Cela donne

$$q_{m-1} \underset{h_m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{M_0 h_m}{q_0 \dots q_{m-2}}. \quad (18)$$

- Pour tout $n \in \llbracket 1, m \rrbracket$, il existe une constante $\gamma_{n,m} > 0$ telle que

$$r_{n,m} \underset{h_m \rightarrow +\infty}{\gtrsim} \gamma_{n,m} h_m, \quad (19)$$

ce qui signifie $\liminf_{h_m \rightarrow +\infty} r_{n,m}/h_m \geq \gamma_{n,m}$.

En effet, on le montre déjà dans le cas particulier $m = 1$. On a $r_{1,1} + 1 = q_0 = h_0$ donc $\gamma_{1,1} := 1$ convient. Pour $m \geq 2$, on le montre par récurrence sur $n \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Pour $n = 1$, on a $t_{0,m} \geq 0$ et $r_{1,m-1} + 1 - q'_0 t_{1,m-1} \geq 1$ par définition de $t_{n,m-1}$. Ainsi $r_{1,m} + 1$ est plus grand que q_{m-1} donc $\gamma_{1,m} := M_0 / (q_0 \dots q_{m-2})$ convient d'après (18).

Supposons que $r_{n-1,m} \gtrsim \gamma_{n-1,m} h_m$ pour $2 \leq n \leq m$. Alors on a $r_{n,m} + 1 \geq t_{n-1,m} = \lfloor r_{n-1,m}/q_{n-2} \rfloor \gtrsim (\gamma_{n-1,m}/q_{n-2}) h_m$. Donc $\gamma_{n,m} := \gamma_{n-1,m}/q_{n-2}$ convient. \square

- Comme q'_{m-1} vaut $\left\lfloor \frac{r_{m,m}}{p_{m-1}} \right\rfloor p_{m-1}$, on obtient

$$q'_{m-1} \underset{h_m \rightarrow +\infty}{\gtrsim} \gamma_{m,m} h_m. \quad (20)$$

8. Un contrôle de q'_n/q_n :

En plus de (13), nous allons choisir les q_n encore plus grands pour obtenir une constante C telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{q'_n}{q_n} \leq C. \quad (21)$$

Cela nous servira lorsqu'on quantifiera les cocyles. Pour $n = 0$, on a $q'_0 \leq q_0$. Nous nous intéressons maintenant au cas $n \geq 1$.

Nous allons d'abord exploiter (17) pour montrer par récurrence sur $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ (avec $n \geq 1$) que

$$q'_n \leq q_n \left(2 + \sum_{j=1}^i \prod_{k=1}^j \frac{1}{q'_{n-k}} \right) + t_{n-1-i,n+1} \prod_{k=1}^{i+1} \frac{1}{q'_{n-k}}.$$

- $i = 0$: $q'_n \leq r_{n+1,n+1} \leq q_n + t_{n,n+1}$ avec

$$t_{n,n+1} \leq \frac{r_{n,n+1}}{q'_{n-1}} \leq \frac{1}{q'_{n-1}} (q_n q'_{n-1} + t_{n-1,n+1}) = q_n + \frac{t_{n-1,n+1}}{q'_{n-1}}$$

donc $q'_n \leq 2q_n + \frac{t_{n-1,n+1}}{q'_{n-1}}$.

- Soit $0 \leq i \leq n-2$. Supposons le résultat vrai au rang i .

$$t_{n-1-i,n+1} \leq \frac{r_{n-1-i,n+1}}{q'_{n-2-i}} \leq \frac{1}{q'_{n-2-i}} (q_n q'_{n-2-i} + t_{n-2-i,n+1}) = q_n + \frac{t_{n-2-i,n+1}}{q'_{n-2-i}},$$

en l'injectant dans l'inégalité au rang i , on obtient

$$\begin{aligned} q'_n &\leq q_n \left(2 + \sum_{j=1}^i \prod_{k=1}^j \frac{1}{q'_{n-k}} \right) + \left(q_n + \frac{t_{n-2-i,n+1}}{q'_{n-2-i}} \right) \prod_{k=1}^{i+1} \frac{1}{q'_{n-k}} \\ &= q_n \left(2 + \sum_{j=1}^{i+1} \prod_{k=1}^j \frac{1}{q'_{n-k}} \right) + t_{n-1-(i+1),n} \prod_{k=1}^{i+2} \frac{1}{q'_{n-k}}. \end{aligned}$$

D'où la récurrence.

Pour $i = n - 1$, cela donne

$$q'_n \leq q_n \left(2 + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^j \frac{1}{q'_{n-k}} \right) + t_{0,n+1} \prod_{k=1}^n \frac{1}{q'_{n-k}} = q_n \left(2 + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^j \frac{1}{q'_{n-k}} \right) + \frac{\sigma_n}{q'_0 \cdots q'_{n-1}}.$$

Or les q'_i sont plus grands que 2 (car, par construction, plus grands que les nombres premiers p_i) donc

$$\sum_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^j \frac{1}{q'_{n-k}} \leq \sum_{j=1}^{n-1} 2^{-j} \leq 1.$$

Il reste à contrôler $\frac{\sigma_n}{q'_0 \cdots q'_{n-1}}$ en fonction de q_n . Par le lemme 5.15, on a $h_n \leq \frac{q_0 \cdots q_{n-1}}{M_0}$ donc

$$\sigma_n = h_{n+1} - q_n h_n \leq q_n \left(\frac{q_0 \cdots q_{n-1}}{M_0} - h_n \right).$$

Grâce à (18) et (20), on peut choisir récursivement les q_n (et donc les h_n) assez grands pour que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |q_0 \cdots q_{n-1} - M_0 h_n| \leq \frac{\gamma_{n,n}}{2} h_n \text{ et } q'_{n-1} \geq \frac{\gamma_{n,n}}{2} h_n, \quad (22)$$

de sorte à obtenir

$$q_0 \cdots q_{n-1} - M_0 h_n \leq \frac{\gamma_{n,n}}{2} h_n \leq q'_{n-1}.$$

Au total, cela donne

$$\sigma_n \leq \frac{q_n}{M_0} q'_{n-1} \leq \frac{q_n}{M_0} q'_0 \cdots q'_{n-1},$$

la dernière inégalité étant vraie parce que les q'_i sont plus grands que 1. Ainsi $\frac{\sigma_n}{q'_0 \cdots q'_{n-1}}$ est plus petit que q_n/M_0 .

D'où $q'_n/q_n \leq C$ avec $C := 3 + 1/M_0$. \square

6.1.4 Egalité des orbites, bornes des cocycles sur des parties de mesure contrôlée

On rappelle que X_n désigne la réunion des étages de la tour de Rokhlin \mathcal{R}_n de T , c'est-à-dire l'union des blocs $T^i(B_n)$, $0 \leq i \leq h_n - 1$, et on note $\varepsilon_n := \mu((X_n)^c)$. Nous définissons $s'_n := h'_1 + \cdots + h'_n$.

On sait que les S -orbites sont incluses dans les T -orbites (par définition de S en fonction des S_n et parce que les S_n vérifient cette propriété). Il reste à montrer l'autre inclusion, que $(\mathcal{R}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît vers la σ -algèbre de X (pour obtenir que S est un odomètre, et donc un odomètre universel d'après la propriété 3 de la sous-partie 6.1.3) et enfin à quantifier les cocycles.

On définit les ensembles suivants.

$$E_{n,m} := \bigsqcup_{i=0}^{h'_n-1} S^i \left(\bigsqcup_{n \leq M \leq m} B'_{n-1,0}(M) \right) = \bigsqcup_{0 \leq i_0 \leq q'_0-1} S^{i_0} \cdots S^{i_{n-1}} \left(\bigsqcup_{n \leq M \leq m} B'_{n-1,0}(M) \right),$$

$$\vdots$$

$$0 \leq i_{n-1} \leq q'_{n-1}-1$$

$$K_n := \bigsqcup_{\substack{0 < i \leq h_n-1 \\ T^{i-1}(B_n) \sqcup T^i(B_n) \subset E_{n,n}}} T^i(B_n).$$

On a vu que $B'_{n-1,0}$ est exactement B'_n , la base de \mathcal{R}'_n . L'ensemble des $S^i(B'_{n-1,0})$ est donc exactement l'ensemble des étages de \mathcal{R}'_n (qui constituent une partition de X). $E_{n,m}$ consiste à regarder les blocs de la forme $T^i(B_M)$, $n \leq M \leq m$, intervenant dans la construction de la base $B'_{n-1,0} = B'_n$ de \mathcal{R}'_n , ainsi que leurs translatés dans les autres étages de cette tour. Quand m est de plus en plus grand, on approxime de mieux en mieux X . Remarquons enfin que $E_{n,m}$ est une partie de X_m .

L'ensemble K_n va nous permettre d'établir l'inclusion des T -orbites dans les S -orbites, grâce à la condition « $T^{i-1}(B_n) \sqcup T^i(B_n) \subset E_{n,n}$ » qui y figure.

En utilisant la propriété 4 de la sous-partie 6.1.3 et en suivant la décomposition des $B_{n-1,i}$ en union disjointe de $B_{n-1,i}(m)$, on définit

$$\begin{aligned} D_n(m) &:= S_1^{q'_0-1} \dots S_{n-1}^{q'_{n-2}-1} \left(\bigsqcup_{0 \leq i_n \leq q'_{n-1}-2} B'_{n-1,i_n}(m) \right) \\ &= S_1^{q'_0-1} \dots S_{n-1}^{q'_{n-2}-1} \left(\bigsqcup_{0 \leq i_n \leq q'_{n-1}-2} S_n^{i_n}(m)(B'_{n-1,0}) \right), \\ \text{donc } S &= S_n(m) S_{n-1}^{-(q'_{n-2}-1)} \dots S_1^{-(q'_0-1)} \text{ sur } D_n(m). \end{aligned} \quad (23)$$

On a donc une décomposition $D_n = \bigsqcup_{m \geq n} D_n(m)$, cela permettra d'être plus fin dans les majorations lorsqu'on voudra quantifier le cocycle c_S (on exploitera d'ailleurs la propriété 5 de la sous-partie 6.1.3).

Lemme 6.3.

$$\mu(X_m \setminus E_{n,m}) \leq \begin{cases} \frac{s'_n}{h_m} & \text{si } n < m \\ \frac{s'_{n-1} + p_{n-1} h'_{n-1}}{h_n} & \text{si } n = m \end{cases}.$$

Preuve du lemme 6.3. Supposons $n \geq 2$. S_n a été construit de sorte à envoyer un bloc de la forme $T^j(B_M)$ ayant été sélectionné pour construire $B'_{n-1,i}$ sur un bloc de la forme $T^j(B_M)$ ayant été sélectionné pour construire $B'_{n-1,i+1}$. Mais ces mêmes blocs avaient été choisis parmi ceux qui avaient été sélectionnés pour construire $B'_{n-2,0} = B'_{n-1}$. En faisant l'union sur $M \in \llbracket n, m \rrbracket$, on obtient donc

$$\bigsqcup_{0 \leq i_{n-1} \leq q'_{n-1}-1} S_n^{i_{n-1}} \left(\bigsqcup_{n \leq M \leq m} B'_{n-1,0}(M) \right) \subset \bigsqcup_{n \leq M \leq m} B'_{n-2,0}(M).$$

En appliquant $S_1^{i_0} \dots S_{n-1}^{i_{n-2}}$ et en faisant l'union sur i_0, \dots, i_{n-2} , on obtient ainsi $E_{n,m} \subset E_{n-1,m}$ et

$$E_{n-1,m} \setminus E_{n,m} = \bigsqcup_{\substack{0 \leq i_0 \leq q'_0-1 \\ \vdots \\ 0 \leq i_{n-2} \leq q'_{n-2}-1}} S_1^{i_0} \dots S_{n-1}^{i_{n-2}} \left(\underbrace{\bigsqcup_{n \leq M \leq m} \left(B'_{n-2,0}(M) \setminus \bigsqcup_{0 \leq i_{n-1} \leq q'_{n-1}-1} S_n^{i_{n-1}}(B'_{n-1,0}(M)) \right)}_{=: [*]} \right).$$

Cet ensemble est de mesure $q'_0 \dots q'_{n-2} \mu([*])$ par T -invariance (car les S_n sont des « puissances de T par morceaux »). $[*]$ est l'union des blocs de la forme $T^j(B_m)$ présents dans B'_{n-1} et qu'il reste à l'issue de l'étape (n, m) . Si $m > n$ (resp. $m = n$), il y en a au plus q'_{n-1} par choix de $t_{n,m}$ (resp. au plus p_{n-1} par choix de q'_{n-1}). Ainsi $\mu([*]) \leq c_{n-1} M_0 / (q_0 \dots q_{m-1}) \leq c_{n-1} / h_m$ avec $c_{n-1} = q'_{n-1}$ si $m > n$, $c_{n-1} = p_{n-1}$ si $m = n$. Donc $\mu(E_{n-1,m} \setminus E_{n,m}) \leq \frac{h'_{n-1} c_{n-1}}{h_m}$.

De plus $E_{1,m}$ est composé de blocs de la forme $T^j(B_M)$, $1 \leq M \leq m$ donc est inclus dans X_m (l'ensemble recouvert par \mathcal{R}_m). En appliquant exactement le même raisonnement mais pour $n = 1$, on a $\mu(X_m \setminus E_{1,m}) \leq c_0 / h_m$ avec $c_0 = q'_0$ si $m > 1$, $c_0 = p_0$ si $m = 1$.

Au total, on obtient

$$X_m \setminus E_{n,m} = (X_m \setminus E_{1,m}) \sqcup \bigsqcup_{2 \leq k \leq n} (E_{k-1,m} \setminus E_{k,m}),$$

$\bigsqcup_{2 \leq k \leq n} (E_{k-1,m} \setminus E_{k,m})$ étant vide si $n = 1$. Si $n < m$, alors on obtient

$$\mu(X_m \setminus E_{n,m}) \leq \sum_{k=1}^n \frac{h'_{k-1} c_{k-1}}{h_m} = \sum_{k=1}^n \frac{h'_{k-1} q'_{k-1}}{h_m} = \sum_{k=1}^n \frac{h'_k}{h_m} = \frac{s'_n}{h_m}.$$

Pour $n = m$, c'est le même calcul mais avec $c_{n-1} = p_{n-1}$ dans le dernier terme de la somme. \square

La quantité $s'_{n-1} + p_{n-1}h'_{n-2}$ ne dépend que de q'_1, \dots, q'_{n-2} qui ne dépendent que de q_1, \dots, q_{n-2} , et h_n est plus grand que $q_1 \dots q_{n-1}/M_0$. On peut donc choisir récursivement les q_n de sorte à obtenir⁴³

$$\frac{s'_{n-1} + p_{n-1}h'_{n-1}}{h_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (24)$$

Corollaire 6.4. *S est un odomètre universel.*

Preuve du corollaire 6.4. D'après la propriété 3 de la sous-partie 6.1.3, il suffit de montrer que c'est un odomètre, c'est-à-dire que $(\mathcal{R}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît vers la σ -algèbre de X .

D'après le lemme 6.3, le critère (24) et le fait que $\mu(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, on obtient $\mu(E_{n,n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Considérons une extraction telle que la série $\sum_{k \geq 0} \mu(E_{n_k, n_k})$ est convergente. Alors par le lemme de Borel-Cantelli, $X_0 := \bigcup_{j \geq 0} \bigcap_{k \geq j} E_{n_k, n_k}$ est de mesure pleine.

Considérons $x, y \in X_0$ appartenant au même étage de \mathcal{R}'_n pour tout n plus grand qu'un certain N . La définition de X_0 implique en particulier qu'il existe une partie I de \mathbb{N} qui est infinie et telle que pour tout $n \in I$, x et y appartiennent à $E_{n,n}$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer I minoré par N . A $n \in I$ fixé, x est dans un certain $S^i(B'_{n-1,0}(n))$ et y est dans un certain $S^j(B'_{n-1,0}(n))$, pour $0 \leq i, j \leq q'_0 \dots q'_{n-1} - 1$. Mais x et y sont dans un même étage de \mathcal{R}'_n , $S^i(B'_{n-1,0}(n))$ est inclus dans l'étage $S^i(B'_n)$ et $S^j(B'_{n-1,0}(n))$ est inclus dans l'étage $S^j(B'_n)$, donc $i = j$. Mais les $S^k(B'_{n-1,0}(n))$ sont tous de la forme $T^\ell(B_n)$ (exceptionnellement aux étapes (n, n) de la construction, on impose $t_{n,n} = 1$), donc x et y sont dans le même étage de la tour \mathcal{R}_n . Ceci est valable pour tout $n \in I$, où I est infini. Donc, les \mathcal{R}_n étant emboîtées, x et y sont dans le même étage de la tour \mathcal{R}_n pour n assez grand. T étant une transformation de rang 1, $(\mathcal{R}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sépare les points (à un négligeable près). Donc x et y sont égaux.

Ainsi $(\mathcal{R}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sépare également les points. \square

Lemme 6.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(K_n) \geq \mu(X_n) - \mu(B_n) - 2\mu(X_n \setminus E_{n,n})$. De plus, $\mu(K_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.*

Preuve du lemme 6.5. Remarquons que K_n est une partie de X_n et qu'on a $K_n = (E_{n,n} \setminus B_n) \setminus T(X_n \setminus E_{n,n})$. Donc

$$\mu(K_n) \geq \mu(E_{n,n} \setminus B_n) - \mu(T(X_n \setminus E_{n,n})) = \mu(E_{n,n}) - \mu(B_n) - \mu(X_n \setminus E_{n,n}) = \mu(X_n) - \mu(B_n) - 2\mu(X_n \setminus E_{n,n}).$$

Par le critère (24), $(\mu(X_n \setminus E_{n,n}))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. Il en est de même pour $(\mu(B_n))_{n \in \mathbb{N}}$. $(\mu(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1. \square

Lemme 6.6. *Pour tout $x \in K_n$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|k| \leq 4(h_{n-1} + Z_{n-1})(h'_{n-1})^2$ et $T^{-1}x = S^k x$.*

Preuve du lemme 6.6. Soit $x \in K_n$, appartenant donc à un certain $T^i(B_n)$ pour $1 \leq i \leq h_n - 1$. Par définition de K_n , x et $T^{-1}x$ sont dans $E_{n,n}$. En notant plutôt $E_{n,n}$ de cette manière :

$$E_{n,n} = \bigsqcup_{\substack{0 \leq i \leq h'_{n-1} - 1 \\ 0 \leq i_{n-1} \leq q'_{n-1} - 1}} S^i S^{i_{n-1}}(B'_{n-1,0}(n)) = \bigsqcup_{\substack{0 \leq i \leq h'_{n-1} - 1 \\ 0 \leq i_{n-1} \leq q'_{n-1} - 1}} S^i(B'_{n-1, i_{n-1}}(n)),$$

on obtient qu'il existe $0 \leq k_0, k_1 \leq h'_{n-1} - 1$ et $y, z \in \bigsqcup_{0 \leq i_{n-1} \leq q'_{n-1} - 1} B'_{n-1, i_{n-1}}(n)$ tels que $x = S^{k_0} y$ et $T^{-1}x = S^{k_1} z$ ⁴⁴. Il reste à obtenir $y = S^{k_2} z$ avec k_2 qu'on peut contrôler.

Montrons déjà que $y = S^{k_3} z$ pour un certain k_3 . On a précisément $x = S_1^{i_0} \dots S_{n-1}^{i_{n-2}} y$ avec $0 \leq i_0 \leq q'_0 - 1, \dots, 0 \leq i_{n-2} \leq q'_{n-2} - 1$, et $T^{-1}x = S_1^{j_0} \dots S_{n-1}^{j_{n-2}} z$ avec $0 \leq j_0 \leq q'_0 - 1, \dots, 0 \leq j_{n-2} \leq q'_{n-2} - 1$ et on considère $0 \leq i_{n-1} \leq q'_{n-1} - 1$ et $0 \leq j_{n-1} \leq q'_{n-1} - 1$ tels que $y \in B'_{n-1, i_{n-1}}(n)$ et $z \in B'_{n-1, j_{n-1}}(n)$. T et les S_i (pour $1 \leq i \leq n-1$) envoient tout bloc $T^k(B_n)$ (tant qu'il est dans le support de l'application) sur un autre $T^{k+\ell}(B_n)$,

43. A priori, ce n'est pas si évident qu'on puisse choisir q_m une fois que q'_0, \dots, q'_{m-1} sont définis. En effet, q_m intervient dès l'étape $(1, m)$, lorsqu'on a seulement défini q'_0 . Nous avons présenté une construction par récurrence double, une externe avec $n \in \mathbb{N}^*$, une interne avec $m \geq n$. Nous pouvons également la décrire avec une récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ en décrivant au rang m les étapes $(1, m), \dots, (m, m)$. En effet, pour $n \geq m$ quelconques, l'étape (n, m) ne dépend que de ce qui a été fait aux étapes (n', m') pour $n' \leq n, m' \leq m, (n', m') \neq (n, m)$. C'est pourquoi nous pouvons choisir q_n une fois q'_0, \dots, q'_{n-1} définis, d'où la possibilité d'imposer (24).

44. x et $T^{-1}x$ sont respectivement à hauteur k_0 et k_1 dans la tour de Rokhlin \mathcal{R}'_{n-1} . Introduire y et z permet de retomber dans la base B'_{n-1} , plus particulièrement dans les blocs de la forme $T^i(B_n)$ qui composent les $B'_{n-1, i_{n-1}}(n)$, puisque $E_{n,n}$ ne concerne que ces blocs.

en appliquant T^ℓ , c'est-à-dire en montant ou descendant dans la tour \mathcal{R}_n , sans dépasser le dernier étage et la base. Ainsi, si on applique successivement des S_i (pour $1 \leq i \leq n-1$) à un bloc $T^k(B_n)$ et dans un certain ordre pour que ce soit bien défini, alors on fait des montées et des descentes successives dans la tour \mathcal{R}_n (tout en y restant). C'est le cas lorsqu'on applique $S_1^{i_0} \dots S_{n-1}^{i_{n-2}}$ pour passer de $B'_{n-1, i_{n-1}}(n)$ à $T^i(B_n)$, également avec T^{-1} pour passer de $T^i(B_n)$ à $T^{i-1}(B_n)$ (car $i \geq 1$ donc on ne sort pas de la tour), et enfin c'est le cas avec $(S_1^{j_0} \dots S_{n-1}^{j_{n-2}})^{-1}$ pour passer de $T^{i-1}(B_n)$ à $B'_{n-1, j_{n-1}}(n)$. Donc $\tilde{S} := (S_1^{j_0} \dots S_{n-1}^{j_{n-2}})^{-1} T^{-1} S_1^{i_0} \dots S_{n-1}^{i_{n-2}}$ envoie $B'_{n-1, i_{n-1}}(n)$ sur $B'_{n-1, j_{n-1}}(n)$ en appliquant une puissance de T , de sorte à monter ou descendre dans la tour \mathcal{R}_n sans en sortir. $S_n^{(j_{n-1} - i_{n-1})}$ vérifie la même chose donc fait monter ou descendre du même nombre d'étages (car $B'_{n-1, i_{n-1}}(n)$ et $B'_{n-1, j_{n-1}}(n)$ sont des étages de \mathcal{R}_n et ses étages sont deux à deux disjoints). \tilde{S} et $S_n^{(j_{n-1} - i_{n-1})}$ sont donc la même puissance de T sur $B'_{n-1, i_{n-1}}(n)$. Or $\tilde{S}y = z$, ce qui donne $S_n^{(j_{n-1} - i_{n-1})}y = z$, donc $k_3 = j_{n-1} - i_{n-1}$ convient.

En utilisant (14) (car $S^i(B'_n) = B'_{n-1, i}$), on obtient $S^{h'_{n-1}(j_{n-1} - i_{n-1})}y = z$, donc $k_2 := h'_{n-1}(j_{n-1} - i_{n-1})$, il reste à contrôler $j_{n-1} - i_{n-1}$ pour contrôler k_2 . On a donc besoin d'un peu plus d'information sur la puissance de T qui coïncide avec $S_n^{(j_{n-1} - i_{n-1})}$ sur $B'_{n-1, i_{n-1}}(n)$, notons-la T^ℓ . Il suffit de regarder \tilde{S} (qui vaut la même chose sur $B'_{n-1, i_{n-1}}(n)$), de remarquer qu'on a $\tilde{S} = (S_1^{j_0}(L_1) \dots S_{n-1}^{j_{n-2}}(L_{n-1}))^{-1} T^{-1} S_1^{i_0}(M_1) \dots S_{n-1}^{i_{n-2}}(M_{n-1})$ avec $M_p, L_p \leq n$ (car en appliquant successivement les $S_p^{i_{p-1}}$, T^{-1} et les $S_p^{-j_{p-1}}$ à $B'_{n-1, i_{n-1}}(n)$, on est toujours dans des briques de la forme $B'_{p, i}(M)$ pour $M \leq n$) et d'utiliser la propriété 5 de la sous-partie 6.1.3, en majorant les $h_{j-1} + z_{j-1}$, $j \leq n$, par $h_{n-1} + \max(z_1, \dots, z_{n-1}) = h_{n-1} + Z_{n-1}$, pour obtenir

$$\begin{aligned} |\ell| &\leq (h_{n-1} + Z_{n-1})(i_0 + \dots + i_{n-2}) + 1 + (h_{n-1} + Z_{n-1})(j_0 + \dots + j_{n-2}) \\ &\leq 2(h_{n-1} + Z_{n-1})(q'_0 + \dots + q'_{n-2}) + 1 \\ &\leq 3(h_{n-1} + Z_{n-1})(q'_0 + \dots + q'_{n-2}) \\ &\leq 3(h_{n-1} + Z_{n-1})h'_{n-1} \end{aligned}$$

où le +1 vient du T^{-1} présent dans l'expression de \tilde{S} , qu'on a ensuite majoré par $(h_{n-1} + Z_{n-1})(q'_0 + \dots + q'_{n-2})$, et où la somme $q'_0 + \dots + q'_{n-2}$ a été majorée par le produit $q'_0 \dots q'_{n-2} = h'_{n-1}$. Toujours en utilisant la propriété 5 de la sous-partie 6.1.3, qui énonce en particulier que le cocycle de S_n est plus grand que 1, on a $S_n^{(j_{n-1} - i_{n-1})} = T^\ell$ avec $\ell \geq j_{n-1} - i_{n-1}$. Donc $j_{n-1} - i_{n-1} \leq 3(h_{n-1} + Z_{n-1})h'_{n-1}$. Donc $k_2 \leq 3(h_{n-1} + Z_{n-1})(h'_{n-1})^2$.

Au total, on a $T^{-1}x = S^kx$ avec

$$|k| \leq |k_0| + |k_1| + |k_2| \leq 2(h'_{n-1} - 1) + 3(h_{n-1} + Z_{n-1})(h'_{n-1})^2 \leq 4(h_{n-1} + Z_{n-1})(h'_{n-1})^2,$$

ce qui donne la borne souhaitée. \square

Corollaire 6.7. *T et S ont les mêmes orbites.*

Preuve du corollaire 6.7. Il suffit de montrer que les T -orbites sont incluses dans les S -orbites. D'après le lemme 6.5, $K := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est de mesure pleine. Le lemme 6.6 énonce en particulier que pour tout $x \in K$, $T^{-1}x$ vaut S^kx pour un certain k dépendant de x , noté $\kappa_T(-1, x)$ pour être cohérent avec les notations de la partie 1.1. On pose $c_T(x) := -\kappa(-1, Tx)$ (comme le suggère (1)). Presque partout, c_T est défini et vérifie $Tx = S^{c_T(x)}x$. \square

Remarque 6.8.

L'existence d'une équivalence orbitale entre une transformation de rang 1 et l'odomètre universel était déjà acquise grâce au théorème de DYE. Ici nous en avons obtenue une de manière plus explicite que dans les différentes preuves du théorème de DYE qui puissent exister et dans lesquelles on obtient une équivalence orbitale de manière abstraite, ne permettant pas de contrôler finement les deux cocycles (d'où la question ouverte 1.16).

Lemme 6.9. Pour $m > n \geq 1$, $D_n(m)$ est inclus dans $X_m \setminus E_{n,m-1}$ et

$$\mu(D_n(m)) \leq \begin{cases} \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m + \frac{s'_n}{h_{m-1}} & \text{si } n < m-1 \\ \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} + \frac{s'_{n-1} + p_{n-1}h'_{n-1}}{h_n} & \text{si } n = m-1 \end{cases}.$$

Pour $n \geq 1$, $\mu(D_n(n)) \leq \frac{q'_{n-1}}{h_n}$. De plus, pour tout $x \in D_n(m)$, $|c_S(x)| \leq (h_{m-1} + Z_{m-1})h'_{n-1}$.

Preuve du lemme 6.9. Pour $1 \leq n < m$, $D_n(m)$ est composé des translatés des blocs $T^i(B_m)$ qui constituent les $B'_{n-1,i}(m)$ et qui ne constituent donc pas les $B'_{n-1,i}(M)$ pour $n \leq M \leq m-1$, donc $D_n(m)$ est inclus dans X_m et disjoint de $E_{n,m-1}$. Ainsi $\mu(D_n(m)) \leq \mu(X_m \setminus X_{m-1}) + \mu(X_{m-1} \setminus E_{n,m-1})$ et on utilise le lemme 6.3.

Pour $n \geq 1$, on utilise la définition de $D_n(n)$, le fait que les S_i sont des « puissances de T par morceaux » et la T -invariance pour obtenir

$$\mu(D_n(n)) = (q'_{n-1} - 1)\mu(B'_{n-1,0}(n)) \leq q'_{n-1}\mu(B'_{n-1,0}(n)).$$

$B'_{n-1,0}(n)$ est un bloc de la forme $T^i(B_n)$, de mesure plus petite que $1/h_n$, d'où le résultat.

Pour le cocycle, on utilise l'expression (23) et la propriété 5 (sous-partie 6.1.3) des cocycles des S_i pour obtenir sur $D_n(m)$,⁴⁵

$$\begin{aligned} |c_S| &\leq (h_{m-1} + Z_{m-1})((q'_0 - 1) + \dots + (q'_{n-2} - 1) + 1) \\ &\leq (h_{m-1} + Z_{m-1})q'_0 \dots q'_{n-2} \\ &= (h_{m-1} + Z_{m-1})h'_{n-1}, \end{aligned}$$

ce qui donne la borne souhaitée. □

6.1.5 Preuve du théorème 6.1

Considérons maintenant $\varphi, \psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $\varphi(t) = o(t^{1/3})$ et $\psi(t) = o(t^{1/2})$. D'après le lemme 6.2, on peut supposer sans perte de généralité que φ et ψ sont croissantes, sous-additives, nulles en 0 et à valeurs strictement positives sur \mathbb{R}_+^* . Avec les résultats que nous venons d'établir (contrôle de la mesure de certaines parties K_n et $D_n(m)$, majoration des cocycles que ces parties), nous obtenons les majorations suivantes de la φ -intégrale de c_T et de la ψ -intégrale de c_S . Nous restons dans le cas général où T est de rang 1 afin d'établir une généralisation du théorème 6.1 dans la partie 6.2.

Majoration de la φ -intégrale de c_T : Par (1) dans la propriété 1.8 et par T -invariance, il suffit de montrer la φ -intégrabilité de $\kappa_T(-1, \cdot)$. Soit $(K'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la partition de X définie récursivement par

$$\begin{cases} K'_1 := K_1, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, K'_{n+1} := (K_{n+1} \cap X_n) \setminus K'_n. \end{cases}$$

Les K'_n sont deux à deux disjoints, par construction. On a $\mu(K_{n+1} \cap X_n) \rightarrow 1$ donc l'union des K'_n vaut X . C'est donc bien une partition. On a de plus $K_n \subset K'_n$ donc $K'_{n+1} \subset X_n \setminus K'_n \subset X_n \setminus K_n$. En utilisant les lemmes 6.5 et 6.3, cela donne

$$\mu(K'_{n+1}) \leq \mu(X_n) - \mu(K_n) \leq \mu(B_n) + 2\mu(X_n \setminus E_{n,n}) \leq \frac{1 + 2(s'_{n-1} + p_{n-1}h'_{n-1})}{h_n}.$$

K'_{n+1} est inclus dans K_{n+1} donc d'après le lemme 6.6, on a pour tout $x \in K'_{n+1}$,

$$|\kappa_T(-1, x)| \leq 4(h_n + Z_n)(h'_n)^2.$$

45. Avec les mêmes arguments que lorsqu'on majore $|\ell|$ à la fin de la preuve du lemme 6.6.

On obtient ainsi la majoration suivante.

$$\begin{aligned}
\int_X \varphi(|\kappa_T(-1, \cdot)|) d\mu &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{K'_{n+1}} \varphi(|\kappa_T(-1, \cdot)|) d\mu \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(K'_{n+1}) \varphi(4(h_n + Z_n)(h'_n)^2) \\
&\leq \mu(K'_1) \varphi(4h_0(h'_0)^2) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + 2(s'_{n-1} + p_{n-1}h'_{n-1})}{h_n} \varphi(4(h_n + Z_n)(h'_n)^2).
\end{aligned}$$

On a $h'_n = h'_{n-1}q'_{n-1}$ où, par construction, q'_{n-1} est plus petit que $r_{n,n}$ qui est plus petit que h_n . Donc h'_n est plus petit que $h'_{n-1}h_n$. Par croissance et sous-additivité, cela donne

$$\begin{aligned}
\varphi(4(h_n + Z_n)(h'_n)^2) &= \varphi(4(h_n + Z_n)(h'_{n-1}h_n)^2) \\
&\leq 4(h'_{n-1})^2 (\varphi(h_n^3) + \varphi(Z_n h_n^2))
\end{aligned}$$

Au total, on a

$$\begin{aligned}
\int_X \varphi(|\kappa_T(-1, \cdot)|) d\mu &\leq \mu(K'_1) \varphi(4h_0(h'_0)^2) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} 4(1 + 2(s'_{n-1} + p_{n-1}h'_{n-1})) (h'_{n-1})^2 \frac{\varphi(h_n^3)}{h_n} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} 4(1 + 2(s'_{n-1} + p_{n-1}h'_{n-1})) (h'_{n-1})^2 \frac{\varphi(Z_n h_n^2)}{h_n}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Majoration de la ψ -intégrale de c_S : D'après le lemme 6.9, on connaît la mesure de chacune des pièces $D_n(m)$ et on sait borner c_S dessus.

$$\begin{aligned}
\int_X \psi(|c_S|) d\mu &= \sum_{m \geq n \geq 1} \int_{D_n(m)} \psi(|c_S|) d\mu \\
&\leq \sum_{m \geq n \geq 1} \mu(D_n(m)) \psi((h_{m-1} + Z_{m-1})h'_{n-1}) \\
&\leq \sum_{n \geq 1} \left[\begin{array}{l} \mu(D_n(n)) \psi((h_{n-1} + Z_{n-1})h'_{n-1}) \\ + \mu(D_n(n+1)) \psi((h_n + Z_n)h'_{n-1}) \\ + \sum_{m \geq n+2} \mu(D_n(m)) \psi((h_{m-1} + Z_{m-1})h'_{n-1}) \end{array} \right] \\
&\leq \sum_{n \geq 1} \left[\begin{array}{l} \frac{q'_{n-1}}{h_n} \psi((h_{n-1} + Z_{n-1})h'_{n-1}) \\ + \left(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} + \frac{s'_{n-1} + p_{n-1}h'_{n-1}}{h_n} \right) \psi((h_n + Z_n)h'_{n-1}) \\ + \sum_{m \geq n+2} \left(\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m + \frac{s'_n}{h_{m-1}} \right) \psi((h_{m-1} + Z_{m-1})h'_{n-1}) \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Avec le même raisonnement que pour φ , on a

$$\begin{aligned}
\psi((h_{n-1} + Z_{n-1})h'_{n-1}) &\leq \psi((h_{n-1} + Z_{n-1})h'_{n-2}h_{n-1}) \\
&\leq h'_{n-2} (\psi(h_{n-1}^2) + \psi(Z_{n-1}h_{n-1})).
\end{aligned}$$

De plus, en imposant le critère (22), on a $q'_n/q_n \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique

$$\frac{q'_{n-1}}{h_n} \leq \frac{q'_{n-1}}{h_{n-1}q_{n-1}} \leq C \frac{1}{h_{n-1}}.$$

On utilisera ces deux majorations pour le terme du haut. Pour $m \geq n + 1$ (les termes du milieu et du bas), on a également

$$\psi((h_{m-1} + Z_{m-1})h'_{n-1}) \leq h'_{n-1}(\psi(h_{m-1}) + \psi(Z_{m-1})).$$

Au total, nous avons

$$\int_X \psi(|c_S|)d\mu \leq \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq n+1} \varepsilon_{m-1} h'_{n-1} (\psi(h_{m-1}) + \psi(Z_{m-1})) + \sum_{n \geq 1} \left[\begin{aligned} & C h'_{n-2} \left(\frac{\psi(h_{n-1}^2)}{h_{n-1}} + \frac{\psi(Z_{n-1} h_{n-1})}{h_{n-1}} \right) \\ & + (s'_{n-1} + p_{n-1} h'_{n-1}) h'_{n-1} \frac{\psi(h_n)}{h_n} + (s'_{n-1} + p_{n-1} h'_{n-1}) h'_{n-1} \frac{\psi(Z_n)}{h_n} \\ & + \sum_{m \geq n+2} \left(s'_n h'_{n-1} \frac{\psi(h_{m-1})}{h_{m-1}} + s'_n h'_{n-1} \frac{\psi(Z_{m-1})}{h_{m-1}} \right) \end{aligned} \right]. \quad (26)$$

Preuve du théorème 6.1. Supposons que T est un odomètre. On a donc une construction par *cutting & stacking* avec des tours de Rokhlin satisfaisant $X_n = X$, ainsi on a $\varepsilon_n = 0$, $\sigma_n = 0$ (donc $Z_n = 0$), ce qui enlève beaucoup de termes dans (25) et (26). En effet, il reste

$$\int_X \varphi(|\kappa_T(-1, \cdot)|)d\mu \leq \mu(K'_1) \varphi(4h_0(h'_0)^2) + \sum_{n=1}^{+\infty} 4(1 + 2(s'_{n-1} + p_{n-1} h'_{n-1})) (h'_{n-1})^2 \frac{\varphi(h_n^3)}{h_n},$$

$$\int_X \psi(|c_S|)d\mu \leq \sum_{n \geq 1} \left[C h'_{n-2} \frac{\psi(h_{n-1}^2)}{h_{n-1}} + (s'_{n-1} + p_{n-1} h'_{n-1}) h'_{n-1} \frac{\psi(h_n)}{h_n} + \sum_{m \geq n+2} s'_n h'_{n-1} \frac{\psi(h_{m-1})}{h_{m-1}} \right].$$

Comme on a $\varphi(t) = o(t^{1/3})$ et $\psi(t) = o(t^{1/2})$, on peut choisir les q_n assez grands (de manière équivalente les h_{n+1} grands) de sorte que

$$\forall n \geq 1, 4(1 + 2(s'_{n-1} + p_{n-1} h'_{n-1})) (h'_{n-1})^2 \frac{\varphi(h_n^3)}{h_n} \leq 1/2^n, \quad (27)$$

$$\forall n \geq 1, C h'_{n-1} \frac{\psi(h_n^2)}{h_n} \leq 1/2^n, \quad (28)$$

$$\forall n \geq 1, (s'_{n-1} + p_{n-1} h'_{n-1}) h'_{n-1} \frac{\psi(h_n)}{h_n} \leq 1/2^{n+1}, \quad (29)$$

$$\forall n \geq 1, m \geq n + 1, s'_n h'_{n-1} \frac{\psi(h_m)}{h_m} \leq 1/2^{m+1}. \quad (30)$$

Par exemple, le critère (30) est possible car à q_0, \dots, q_{m-2} fixés et avec q_{m-1} de plus en plus grand (quitte à remplacer par $q_{m-1} \dots q_{m-1+k}$), les $s'_n h'_{n-1}$ sont constants (pour $1 \leq n \leq m-1$) et $\psi(h_m)/h_m$ tend vers l'infini (car on a $0 \leq \psi(h_m)/h_m \leq \psi(h_m)^2/h_m$ et $\psi(t) = o(t^{1/2})$). C'est le même raisonnement pour les autres critères.

Une fois ces critères acquis, on montre immédiatement que les intégrales sont finies. \square

6.2 Obstructions et généralisation partielle aux transformations de rang 1

Comme nous venons de le voir dans la preuve du théorème 6.1, l'idée consiste à s'assurer que les termes tendent vers 0 pour les supposer aussi petit que l'on souhaite, afin d'obtenir des quantités sommables. Lorsque T est une transformation de rang 1 qui n'est pas un odomètre, nous avons des termes supplémentaires à étudier :

$$4(1 + 2(s'_{n-1} + p_{n-1}h'_{n-1})) (h'_{n-1})^2 \frac{\varphi(Z_n h_n^2)}{h_n}, \quad n \geq 1; \quad (31)$$

$$\varepsilon_{m-1} h'_{n-1} (\psi(h_{m-1}) + \psi(Z_{m-1})), \quad m \geq n + 1; \quad (32)$$

$$C h'_{n-2} \frac{\psi(Z_{n-1} h_{n-1})}{h_{n-1}}, \quad n \geq 1; \quad (33)$$

$$(s'_{n-1} + p_{n-1}h'_{n-1}) h'_{n-1} \frac{\psi(Z_n)}{h_n}, \quad n \geq 1; \quad (34)$$

$$s'_n h'_{n-1} \frac{\psi(Z_{m-1})}{h_{m-1}}, \quad m \geq n + 2. \quad (35)$$

Il faudrait ainsi que les quantités suivantes tendent vers 0 :

$$\frac{\varphi(Z_n h_n^2)}{h_n}, \quad (36)$$

$$\varepsilon_n \psi(h_n), \quad (37)$$

$$\varepsilon_n \psi(Z_n), \quad (38)$$

$$\frac{\psi(Z_n)}{h_n}. \quad (39)$$

Rappelons que la quantité Z_n correspond au nombre maximum de séparateurs consécutifs (entre deux piles ou avant la première ou après la dernière) lors des n premières étapes, son apparition est due à la majoration par $h_{m-1} + z_{m-1}$ du cocycle de $S_n(m)$ (voir la propriété 5 de la sous-partie 6.1.3).

Question 6.10. *Existe-t-il une manière plus intelligente de construire une équivalence orbitale entre une transformation T de rang 1 et un odomètre universel, généralisant la construction faite dans [KL22] (au sens où on retrouve cette construction lorsque T est un odomètre) et permettant une majoration plus fine du cocycle de $S_n(m)$ (c'est-à-dire avec un terme moins grossier que z_{m-1}) ?*

Supposons qu'on puisse répondre affirmativement à cette question à tel point qu'on n'ait plus besoin de s'occuper des termes (36), (38), (39), alors il resterait à contrôler ε_n en fonction de $\psi(h_n)$ (terme (37)). Cela concerne donc les transformations de rang 1 qui appartiennent à $R1^\psi$. Notre amélioration du théorème de BAXTER (théorème 5.10) trouverait toute son utilité. En effet, s'il suffit juste d'étudier le terme (37), alors on a juste à connaître la vitesse de remplissage des tours de Rokhlin en fonction du nombre d'étages, qu'elles soient emboîtées ou non, c'est pratique pour les rotations irrationnelles (voir le théorème 5.13).

En attendant un contrôle plus fin, on peut s'intéresser à des transformations de rang 1 pour lesquelles les Z_n admettent un contrôle en fonction de h_n . Mais cela n'a en fait pas de sens. En effet, pour rendre les quantités aussi petites que nous souhaitons, nous avons extrait une sous-suite de tours de Rokhlin, autrement dit nous avons sauté des étapes dans les passages de \mathcal{R}_n à \mathcal{R}_{n+1} . Si à l'étape n , nous passons directement de \mathcal{R}_n à \mathcal{R}_{n+k} pour $k \geq 2$, alors Z_n peut devenir plus grand. Si chaque Z_i est contrôlé par h_i , alors on peut perdre ce contrôle si les Z_n sont successivement de plus en plus augmentés au fur et à mesure qu'on saute des étapes. La propriété « chaque Z_n est contrôlé par h_n » n'a aucune raison d'être stable par extraction de la suite de tours de Rokhlin. Heureusement, il existe quand même une propriété des Z_n qui est stable par « saut d'étape », nous l'appliquerons par exemple à la transformation de CHACON introduite dans l'exemple 5.17.

Proposition 6.11. *Soit T une transformation de rang 1, admettant une construction par cutting & stacking telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_{n,0} = \sigma_{n,q_n} = 0$ et telle que (Z_n) est bornée (autrement dit l'ensemble $\{\sigma_{n,i} \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq q_n\}$ est borné). Alors*

1. L'hypothèse est encore valable (avec la même borne) si on extrait une sous-suite de la tour de Rokhlin ;
2. T est dans $R1^\varphi$ pour toute $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sous-linéaire ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

On est donc en particulier intéressé par la construction par *cutting & stacking* avec la convention de ne pas avoir de séparateurs extrémaux (voir le commentaire à ce propos, après la définition 5.14).

Exemple 6.12.

La transformation de CHACON est associée à $q_n = 3$, $\sigma_{n,0} = \sigma_{n,1} = \sigma_{n,3} = 0$, $\sigma_{n,2} = 1$. Elle satisfait les hypothèses de la proposition 6.11.

Preuve de la proposition 6.11. Notons K une borne de (Z_n) .

1. Esquisse de preuve. Supposons par exemple qu'on décide de passer directement de la tour \mathcal{R}_n à la tour \mathcal{R}_{n+2} . Lorsqu'on fabriquait d'abord la tour \mathcal{R}_{n+1} , on subdivisait \mathcal{R}_n en q_n sous-tours de Rokhlin. Or $\sigma_{n,q_n} = 0$ donc aucun séparateur ne se pose sur la dernière sous-tour. Ainsi le haut de \mathcal{R}_{n+1} correspond exactement au haut de la dernière sous-tour, c'est donc à cet endroit que vont se poser les séparateurs intervenant lors du passage de \mathcal{R}_{n+1} à \mathcal{R}_{n+2} (plus précisément ils se posent sur les $q_{n+1} - 1$ premières sous-sous-tours de la dernière sous-tour), ces séparateurs ne vont donc pas se poser sur des séparateurs de l'étape d'avant et donc ne vont pas s'additionner avec eux. Par exemple dans la situation à gauche dans la figure 16, on a σ_{1,q_1} non nul donc des séparateurs verts se posent sur des séparateurs bleus. L'hypothèse $\sigma_{n,0} = 0$ permet également de ne pas accumuler de plus en plus de séparateurs entre deux piles. Ainsi l'ensemble des nouveaux $\sigma_{n,i}$, $0 \leq i \leq q_n q_{n+1}$, valent l'ensemble des anciens $\sigma_{n+1,i}$, borné par K .
2. On a $\sigma_n \leq K q_n$. Ainsi

$$\varepsilon_n = \sum_{k \geq n} \frac{\sigma_k}{q_0 \dots q_k} \leq \frac{K}{q_0 \dots q_{n-1}} \sum_{k \geq n} \frac{1}{q_n \dots q_{k-1}}.$$

Or les q_i sont plus grands ou égaux à 2, donc $\sum_{k \geq n} \frac{1}{q_n \dots q_{k-1}} \leq 2$. De plus $q_0 \dots q_{n-1}$ est asymptotiquement équivalent à h_n/M_0 . Donc $\varepsilon_n = O(1/h_n)$. Donc $\varepsilon_n = o(1/\varphi(h_n))$ dès que φ est sous-linéaire. □

Théorème 6.13. Soit $\varphi, \psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $\varphi(t) = o(t^{1/3})$ et $\psi(t) = o(t^{1/2})$. Pour toute transformation T de rang 1 satisfaisant les hypothèses de la proposition 6.11, il existe une OE entre T et l'odomètre universel S telle que c_T est φ -intégrable et c_S est ψ -intégrable. En particulier, ils sont φ -OE pour toute $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $\varphi(t) = o(t^{1/3})$, et sont donc Shannon-OE.

En particulier, l'odomètre universel est orbitalement équivalent à la transformation de CHACON avec cette quantification des cocycles. Cela veut donc dire que cette forme d'équivalence orbitale quantitative ne préserve pas le mélange faible.

Preuve du théorème 6.13. D'après le lemme 6.2, on peut supposer φ, ψ sous-additives, croissantes, nulles en 0 et à valeurs strictement positives sur \mathbb{R}_+^* . D'après la proposition 6.11, les Z_n restent bornés par la même constante K après avoir éventuellement extrait une sous-suite de la suite de tours de Rokhlin (afin d'avoir les q_n et les h_n assez grands). De plus, ψ est en particulier sous-linéaire et ne s'annule pas à partir d'un certain rang, donc T est dans $R1^\psi$. Ainsi toutes les quantités (36), (37), (38), (39) peuvent être rendues arbitrairement petite en prenant une sous-suite. Il reste à procéder comme dans la preuve du théorème 6.1 pour que les termes supplémentaires (31), (32), (33), (34), (35) soient sommables et ainsi que la φ -intégrale de c_T et la ψ -intégrale de c_S soient finies. □

6.3 Mélange fort pour des transformations de rang 1

D'après [GZ19] (théorème 1.3), les transformations de rang 1 satisfaisant les hypothèses du théorème 6.13 ne sont pas topologiquement mélangeantes, donc ne sont pas fortement mélangeantes (au sens mesuré). Existe-t-il des transformations fortement mélangeantes vérifiant la conclusion du théorème 6.13 ?

Supposons que nous connaissons des paramètres q_n et $\sigma_{n,i}$ permettant de construire une transformation de rang 1 mélangeante, notée T . On sait déjà que les $\sigma_{n,i}$ ne sont pas bornés. On ne peut donc pas utiliser la construction

car elle nécessite éventuellement d'extraire une sous-suite de la suite de tours de Rokhlin et donc à changer les $\sigma_{n,i}$, au risque que les Z_n grandissent beaucoup plus vite qu'avant l'extraction.

Changeons de stratégie. Comme indiqué dans la note 43 de bas de page, la construction par récurrence double peut se faire dans l'autre sens, c'est-à-dire une récurrence externe sur $m \geq 1$ et une récurrence interne sur $n \in \llbracket 1, m \rrbracket$. En effet, la construction des $B'_{n,i}(m)$, pour $0 \leq i \leq q'_n - 1$, ne nécessite que la connaissance des $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_m$. Autrement dit, à l'étape m de la récurrence externe, seule une information partielle de T est nécessaire. L'idée sera donc de construire T au fur et à mesure de la construction de S , avec les paramètres permettant d'abord à la construction de bien être définie, de définir une transformation S qui est un odomètre universel et de nous donner la quantification souhaitée, et ensuite permettant de définir une transformation T qui est fortement mélangeante.

Nous allons nous appuyer sur ce résultat dû à ORNSTEIN [Orn72].

Théorème 6.14 (ORNSTEIN - 1972). *En reprenant les notations de la définition par cutting & stacking (définition 5.14), il existe T fortement mélangeante avec les q_n arbitrairement grands (et plus grands que 10^n) et les $\sigma_{n,i}$ tels que $\sigma_{n,0} = 0$, $\sigma_{n,i} \leq 2h_{n-1}$ pour tout $1 \leq i \leq q_n$, et $\sigma_n \leq 2h_{n-1}$ (tous ces paramètres peuvent être choisis récursivement en n).*

Pour obtenir la propriété de mélange fort de la transformation, il suffit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le q_n -uplet $(\sigma_{n,1}, \dots, \sigma_{n,q_n})$ vérifie une certaine propriété. A n fixé, on démontre l'existence d'un tel q_n -uplet dès que q_n est assez grand. Un argument probabiliste permet de prouver l'existence à chaque n , la construction n'est donc pas explicite.

Le fait que les q_n puissent être choisis arbitrairement grands nous permet ainsi de les choisir au fur et à mesure de la construction de sorte qu'on n'ait plus besoin de considérer une extractrice de $(\mathcal{R}_n)_n$. On gardera donc les contrôles $\sigma_{n,i} \leq 2h_{n-1}$ et $\sigma_n \leq 2h_{n-1}$, en particulier on a $Z_n \leq 2h_{n-1} \leq q_{n-1}h_{n-1} \leq h_n$. Le contrôle de σ_n est également important pour la vitesse de remplissage des tours de Rokhlin.

Lemme 6.15. *Avec les mêmes propriétés sur les paramètres dans le théorème 6.14, en plus du mélange fort, on peut également demander*

$$\varepsilon_n \leq \frac{4}{q_0 \cdots q_{n-1}}.$$

En particulier, on peut trouver une transformation de rang 1 qui est fortement mélangeante et dans $\mathbb{R}1^\varphi$ pour toute φ sous-linéaire, avec les mêmes propriétés sur les paramètres.

Preuve du lemme 6.15. On a $\sigma_n \leq 2h_{n-1}$ donc

$$\varepsilon_n = \sum_{k \geq n} \frac{\sigma_k}{q_0 \cdots q_k} \leq \frac{2}{q_0 \cdots q_{n-1}} \sum_{k \geq n} \frac{h_{k-1}}{q_n \cdots q_k}.$$

Les q_k peuvent être choisis arbitrairement grands donc on peut imposer $q_k \geq h_{k-1}$. Les q_i sont plus grands que 2, donc la somme sur $k \geq n$ est plus petite que 2. \square

Théorème 6.16. *Soit $\varphi, \psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $\varphi(t) = o(t^{1/3})$ et $\psi(t) = O(t^{1/2})$. Il existe une transformation T de rang 1 fortement mélangeante et une OE entre T et l'odomètre universel S telle que c_T est φ -intégrable et c_S est ψ -intégrable (en particulier, c'est une φ -OE dès que $\varphi(t) = o(t^{1/3})$, et donc une Shannon-OE).*

Cela veut donc dire que la φ -OE pour $\varphi(t) = o(t^{1/3})$, en particulier la Shannon-OE, ne préserve pas le mélange fort.

Preuve du théorème 6.16. Nous supposons sans perte de généralité que φ et ψ satisfont les propriétés supplémentaires données par le lemme 6.2.

Supposons q_0, \dots, q_{m-1} et les $\sigma_{M,i}$, pour $1 \leq M \leq m-1$ et $0 \leq i \leq q_M$, définis, ce qui donne également h_1, \dots, h_m . En conséquence, cela donne q'_0, \dots, q'_{m-1} et des $t_{n,M}$, pour $1 \leq M \leq m$, $1 \leq n \leq M$, tous définis de la même manière que dans la construction de l'équivalence orbitale, présentée dans la sous-partie 6.1.2. Les q'_i permettent aussi de définir les h'_1, \dots, h'_m et les s'_1, \dots, s'_m . Tous ces paramètres jusqu'au rang m et relatifs à la future transformation S sont fixés et ne dépendent pas des paramètres relatifs à T et intervenant aux rangs $> m+1$.

A l'étape $m+1$, nous allons bien choisir les q_m et les $\sigma_{m,i}$. Les $\sigma_{m,i}$ seront simplement fournis par le théorème 6.14 une fois q_m choisi.

— On choisit q_m strictement plus grand que $\max(p_m, h_m)$ pour satisfaire le critère (13).

- Pour obtenir $q'_n/q_n \leq C$ pour une certaine constante C , nous avons tout à l'heure eu besoin d'imposer le critère (22). Ici nous devons revoir le raisonnement dans la propriété 7 (sous-partie 6.1.3) car il n'est plus question d'extraire une sous-suite de la tour de Rokhlin. Mais par le même raisonnement, on peut établir $q'_m \geq \gamma_{m+1,m+1}q_m - (2m + p_m)$ (le $2m + p_m$ vient de l'inégalité $[x] \geq x - 1$, du fait que le raisonnement fait intervenir les quantités $r_{n,m} + 1$ et de l'égalité $q_m = \lfloor r_{m+1,m+1}/p_m \rfloor p_m$, c'est important ici d'avoir une inégalité exacte et non pas asymptotique) avec $\gamma_{m+1,m+1}$ ne dépendant que des étapes précédentes, c'est donc constant en q_m .

On choisit q_m assez grand de sorte que $2h_m \leq \gamma_{m+1,m+1}q_m - (2m + 1)$. Une fois la construction terminée, nous aurons ainsi $\sigma_n \leq 2h_{n-1} \leq q'_{n-1}$ et donc $\frac{\sigma_n}{q'_0 \dots q'_{n-1}} \leq q_n$ par une majoration évidente. En reprenant le raisonnement dans la propriété 8 (sous-partie 6.1.3), on obtient $q'_n/q_n \leq 4$. La constante C vaudra donc 4.

- Les paramètres aux rangs précédents sont fixés donc on peut également imposer

$$\frac{s'_m + p_m h'_m}{h_m q_m} \leq 1/m$$

et que pour tout $t \geq h_m q_m$,

$$4(1 + 2(s'_m + p_m h'_m)) (h'_m)^2 \frac{\varphi(t^3)}{t} \leq 1/2^{m+1},$$

$$C h'_m \frac{\psi(t^2)}{t} \leq \frac{1}{2^{m+1}},$$

$$(s'_m + p_m h'_m) h'_m \frac{\psi(t)}{t} \leq \frac{1}{2^{m+2}},$$

$$\forall 1 \leq n \leq m, s'_n h'_{n-1} \frac{\psi(t)}{t} \leq \frac{1}{2^{m+2}},$$

permettant d'obtenir les critères (24), (27), (28), (29), (30), une fois avoir exploité l'inégalité $h_{m+1} \geq h_m q_m$ (lorsque h_{m+1} sera défini).

- On impose

$$q_m \geq (h'_m)^2 \tag{40}$$

(et donc $q_m \geq (h'_n)^2$ pour tout $n \geq m$).

- On choisit également cette entier assez grand de sorte à pouvoir obtenir plus tard une transformation T qui est fortement mélangeante et qui a la vitesse de remplissage énoncée dans le lemme 6.15 (on rappelle que pour une telle application, les q_n peuvent être récursivement choisis assez grands).

Une fois avoir défini tous les paramètres, on définit T associée, qui est donc mélangeante. La construction présentée dans la sous-partie 6.1.2 peut se faire sans nécessiter de sauter des étapes dans la construction par *cutting & stacking*, la quantification va également s'établir sans cette manipulation. Il reste justement à étudier les termes (31), (32), (33), (34), (35), constituant la principale obstruction à une généralisation du théorème de KERR et LI. Pour (31), (33), (34) et (35), on utilise l'inégalité $Z_n \leq h_n$, la croissance de φ et ψ , ainsi que (27), (28), (29) et (30). Il reste le terme (32). On dispose d'une certaine constante $C' > 0$ tel que $\psi(t) \leq C' t^{1/2}$ pour tout $t \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la majoration $Z_{m-1} \leq h_{m-1}$ et le lemme 6.15, on obtient

$$\varepsilon_{m-1} h'_{n-1} (\psi(h_{m-1}) + \psi(Z_{m-1})) \leq \frac{4h'_{n-1}}{q_0 \dots q_{m-2}} \cdot 2\psi(h_{m-1}) \leq \frac{8C' h'_{n-1}}{q_0 \dots q_{m-2}} h_{m-1}^{1/2}$$

et on a également la majoration $(h_{m-1} M_0)/(q_0 \dots q_{m-2}) \leq 1$, ainsi que $q_{m-2} \geq h'_{n-1}$ d'après le critère (40) (car $m \geq n + 1$), ce qui permet d'obtenir

$$\varepsilon_{m-1} h'_{n-1} (\psi(h_{m-1}) + \psi(Z_{m-1})) \leq \frac{8C' h'_{n-1}}{(M_0 q_0 \dots q_{m-2})^{1/2}} \leq \frac{8C'}{(M_0 q_0 \dots q_{m-3})^{1/2}} \leq \frac{8C'}{\sqrt{M_0} \sqrt{2}^{m-2}},$$

la dernière inégalité étant due au fait que les q_i sont plus grands que 2.

Au total, toutes les quantités sont sommables. D'après les majorations (25) et (26) des φ - et ψ - intégrales, on obtient la quantification voulue. \square

7 Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons ainsi présenté la preuve des deux théorèmes de KERR et LI, figurant dans l'article [KL22], ce sont les théorèmes 2.8 et 2.10 dans ce rapport.

Le premier énonce la préservation de l'entropie par équivalence orbitale de Shannon. Dans les deux premières sections, nous avons présenté l'état de l'art dans le domaine de l'équivalence orbitale et nous avons défini toutes les notions nécessaires à la compréhension de l'énoncé et à l'élaboration de la preuve. Nous démontrons ensuite dans la troisième section le théorème dans le cas particulier du groupe \mathbb{Z} (l'énoncé précis est le théorème 2.9).

Des travaux dans [CJLT23], en lien avec l'équivalence orbitale de Shannon, nous ont donné une piste pour une nouvelle preuve du théorème. Nous n'avons pas abouti, pour la raison toute simple que nous ne pouvons pas contrôler l'entropie d'une partition en fonction de la mesure d'une très grande pièce, il faudrait une construction permettant un contrôle sur les autres pièces. Cependant cela nous a donné des idées pour une stratégie de preuve du théorème de BELINSKAYA, que nous avons réussi à mettre en place et que nous présentons dans la quatrième section.

Avant de démontrer le second théorème ainsi que des extensions que nous avons pu établir durant ce stage (les théorèmes 6.13 et 6.16), nous avons d'abord défini ce que sont les odomètres, une classe que nous élargissons dans nos énoncés puisque nous considérons plus généralement les transformations de rang 1. Tout cela est introduit dans la cinquième section, notamment la construction par *cutting & stacking* donnant une information géométrique très intéressante sur les transformations de rang 1.

Dans la sixième et dernière section, il est temps de démontrer le théorème 2.10, dont nous trouvons un énoncé encore plus précis (théorème 6.1). Nous utilisons la géométrie des transformations de rang 1 pour construire une équivalence orbitale avec l'odomètre universel, qui sera parfois de Shannon, avec une quantification comme dans le théorème 6.1. Dans le théorème 6.13, cela concernera par exemple la transformation de CHACON. Dans le théorème 6.16, il sera question de transformations mélangeantes. D'après le premier énoncé, le mélange faible n'est pas préservé pour une telle quantification des cocycles, le mélange fort non plus d'après le second énoncé.

Beaucoup de questions ouvertes peuvent être posées après la lecture de ce mémoire. En voici quelques-unes.

1. La question ouverte 3.4 : en équivalence orbitale de Shannon, que peut-on dire des entropies si les U -orbites ne sont pas incluses dans les T -orbites mais que l'inverse a lieu, comme dans le cas très simple où T est une puissance de U (autre que U et U^{-1}) ?
2. Peut-on trouver une nouvelle preuve du théorème 2.9 en « démêlant » les T -orbites du point de vue de la dynamique de U , comme on essaye de le faire dans la partie 4.2 ?
3. Cette méthode de « démêlage » fonctionne dans le cadre du théorème de BELINSKAYA, puisque l'intégrabilité du cocycle c_T implique un certain comportement statistique de la dynamique de T du point de vue de celle de U . Peut-elle fonctionner sur d'autres énoncés, par exemple le théorème 1.32 ? Dans la preuve que nous avons présentée, nous avons en quelque sorte utilisé la géométrie du groupe \mathbb{Z} , c'est pourquoi il serait raisonnable de s'intéresser au théorème de BOWEN.
4. Concernant les transformations de rang 1 vérifiant les hypothèses du théorème 6.13 ou pouvant être obtenues grâce à la méthode dans la preuve du théorème 6.16, on peut se demander si elles constituent un ensemble « très gros ». Peut-on par exemple établir que c'est un G_δ -dense pour la topologie faible ?
5. Nous nous sommes concentrés sur l'odomètre universel mais pouvons-nous établir une équivalence orbitale de Shannon entre certaines transformations et un odomètre non universel ? Lors de ce stage, nous sommes parvenus à construire une équivalence orbitale entre le 2-odomètre et le 3-odomètre (nous avons fait le choix de ne pas présenter le raisonnement dans ce mémoire). Cependant, nous n'avons pas réussi à établir que l'OE est de Shannon, ni même à quantifier les cocycles. Ou bien nos majorations sont trop grossières, ou bien ces transformations ne sont tout simplement pas Shannon orbitalement équivalentes.
6. Justement, il nous faut trouver des méthodes pour montrer que deux transformations ne sont pas Shannon orbitalement équivalentes. Le théorème 2.8 fournit un invariant : l'entropie. Il faut trouver des invariants plus fins pour pouvoir distinguer des transformations de même entropie. Par exemple, il existe la notion de *slow entropy* introduite dans [BKW21], étudiée pour des transformations d'entropie nulle admettant une construction géométrique intéressante comme les transformations de rang 1. Il serait pertinent de se demander si c'est un invariant d'équivalence orbitale de Shannon et le cas échéant de trouver des transformations d'entropie nulle n'ayant pas la même *slow entropy*.

7. Evidemment, nous pouvons également poser la question (très) ouverte 1.16 sur une hypothétique version quantitative du théorème de DYE. La recherche d'invariants assez fins montre encore toute sa pertinence, au cas où l'énoncé est faux.

Cette expérience de stage, me préparant au doctorat, m'a permis de me rendre un peu plus compte de l'immensité des mathématiques, même dans un domaine bien précis, aussi bien du point de vue de la quantité de savoir requise (comme en témoigne déjà la longue bibliographie de ce mémoire, dont 99% des références sont encore à lire en entier), que du point de vue de la multitude de piste d'explorations, face à notre immense ignorance sans laquelle il n'y aurait aucune activité de recherche.

J'ai également pris beaucoup de recul sur ce que je connaissais déjà. Par exemple lorsqu'on a déjà suivi un cours de théorie ergodique classique, il est très satisfaisant de prendre connaissance de la généralisation de la théorie pour des actions de groupes, notamment les groupes moyennables offrant un cadre dans lequel il existe encore des théorèmes ergodiques et une notion d'entropie. La théorie ergodique est fascinante pour sa proximité avec une multitude de domaines des mathématiques.

Je prends plaisir à explorer le domaine de l'équivalence orbitale. Je tiens à remercier François Le Maître pour son expertise inégalable, ses commentaires avisés, pour ce sujet si riche qu'il m'a proposé, et pour cette initiation à la recherche en général, avec le groupe de travail et l'exposé que j'ai eu l'occasion de présenter. Enfin, je lui suis reconnaissant pour le temps qu'il a consacré à la relecture de ce mémoire.

Références

- [Aus16a] Tim AUSTIN. *Behaviour of Entropy under Bounded and Integrable Orbit Equivalence*. 2016. arXiv : 1604.00892 [math].
- [Aus16b] Tim AUSTIN. « Integrable Measure Equivalence for Groups of Polynomial Growth ». In : *Groups, Geometry, and Dynamics* 10.1 (2016), p. 117-154.
- [Bax71] J. R. BAXTER. « A Class of Ergodic Transformations Having Simple Spectrum ». In : *Proceedings of the American Mathematical Society* 27.2 (1971), p. 275-275.
- [Bel69] R. M. BELINSKAYA. « Partitions of Lebesgue Space in Trajectories Defined by Ergodic Automorphisms ». In : *Functional Analysis and Its Applications* 2.3 (1969), p. 190-199.
- [BKW21] Shilpak BANERJEE, Philipp KUNDE et Daren WEI. *Slow Entropy of Some Combinatorial Constructions*. 2021. arXiv : 2010.14472 [math].
- [Cha67] R. V. CHACON. « A Geometric Construction of Measure Preserving Transformations ». In : *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 2 : Contributions to Probability Theory, Part 2*. T. 5.2B. University of California Press, 1967, p. 335-361.
- [CJLT23] Alessandro CARDERI, Matthieu JOSEPH, François LE MAÎTRE et Romain TESSERA. « Belinskaya's Theorem Is Optimal ». In : *Fundamenta Mathematicae* (2023). arXiv : 2201.06662 [math].
- [Dye59] H. A. DYE. « On Groups of Measure Preserving Transformations. I ». In : *American Journal of Mathematics* 81.1 (1959), p. 119. JSTOR : 2372852.
- [Fer97] Sebastien FERENCZI. « Systems of Finite Rank ». In : *Colloquium Mathematicum* 73 (1997).
- [FF86] Adam FIELDSTEEL et N. A. FRIEDMAN. « Restricted Orbit Changes of Ergodic \mathbb{Z}^d -Actions to Achieve Mixing and Completely Positive Entropy ». In : *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 6.4 (1986), p. 505-528.
- [FRW11] Matthew FOREMAN, Daniel RUDOLPH et Benjamin WEISS. « The Conjugacy Problem in Ergodic Theory ». In : *Annals of Mathematics* 173.3 (2011), p. 1529-1586.
- [Gla03] E. GLASNER. *Ergodic Theory via Joinings*. T. 101. Mathematical Surveys and Monographs. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 2003.
- [GZ19] Su GAO et Caleb ZIEGLER. « Topological Mixing Properties of Rank-One Subshifts ». In : *Transactions of the London Mathematical Society* 6.1 (2019), p. 1-21. arXiv : 1806.11005 [math].

- [HV42] Paul R. HALMOS et John VON NEUMANN. « Operator Methods in Classical Mechanics, II ». In : *The Annals of Mathematics* 43.2 (1942), p. 332. JSTOR : 1968872.
- [Iwa94] A. IWANIK. « Cyclic Approximation of Irrational Rotations ». In : *Proceedings of the American Mathematical Society* 121.3 (1994), p. 691-695.
- [KL17] D. KERR et H. LI. *Ergodic Theory : Independence and Dichotomies*. Springer Monographs in Mathematics. Springer International Publishing, 2017.
- [KL19] D. KERR et H. LI. *Entropy, Shannon Orbit Equivalence, and Sparse Connectivity*. 2019. arXiv : 1912.02764 [math].
- [KL22] D. KERR et H. LI. *Entropy, Virtual Abelianness, and Shannon Orbit Equivalence*. 2022. arXiv : 2202.10795 [math].
- [Orn70] Donald ORNSTEIN. « Bernoulli Shifts with the Same Entropy Are Isomorphic ». In : *Advances in Mathematics* 4.3 (1970), p. 337-352.
- [Orn72] Donald S. ORNSTEIN. « On the Root Problem in Ergodic Theory ». In : *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 2 : Probability Theory*. T. 6.2. University of California Press, 1972, p. 347-357.
- [OW80] Donald S. ORNSTEIN et Benjamin WEISS. « Ergodic Theory of Amenable Group Actions. I : The Rohlin Lemma ». In : *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society* 2.1 (1980), p. 161-164.
- [OW87] Donald S. ORNSTEIN et Benjamin WEISS. « Entropy and Isomorphism Theorems for Actions of Amenable Groups ». In : *Journal d'Analyse Mathématique* 48.1 (1987), p. 1-141.
- [Rok67] V. A. ROKHLIN. « Lectures on the Entropy Theory of Measure-Preserving Transformations ». In : *Russian Mathematical Surveys* 22.5 (1967), p. 1-52.