Séance de TD n°7

23 octobre 2012

Cohomologie, structures multiplicatives

Rappelons que, d'après le théorème des coefficients universels pour la cohomologie singulière, on a pour tout groupe abélien G une suite exacte scindée :

$$0 \longrightarrow Ext(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow H^n(X, G) \longrightarrow Hom(H_n(X), G) \longrightarrow 0 \tag{1}$$

De plus, d'après le théorème de Künneth, on a une suite exacte scindée :

$$0 \longrightarrow (H(X) \otimes H(Y))_n \xrightarrow{\times} H_n(X \times Y) \longrightarrow (Tor(H(X), H(Y))_{n-1} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

On pourra aussi utiliser le théorème suivant, conséquence de la propriété d'excision (voir par exemple A.Hatcher, Algebraic Topology, Corollary 2.25.) :

Théorème 1. Soit $X = \bigvee_\alpha X_\alpha$ un bouquet d'espaces topologiques obtenu à partir d'espaces pointés (X_α, x_α) tels que pour tout α il existe une rétraction par déformation d'un voisinage de X_α sur le point x_α. Alors les inclusions $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$ induisent un isomorphisme :

$$\oplus_\alpha i_{\alpha *} : \oplus_\alpha \tilde{H}_*(X_\alpha) \longrightarrow \tilde{H}_*(X)$$

1 Distinction de $S^p \times S^q$ et $S^p \vee S^q \vee S^{p+q}$ par le cup produit

On montre que ces deux espaces ont mêmes groupes d'homologie et de cohomologie, et on cherche à les distinguer par la structure d'anneau de la cohomologie.
En effet, munie du cup produit, la cohomologie singulière $(H^*(X), +, \cup)$ d'un espace topologique X est un anneau et cette structure d'anneau est un invariant du type d'homotopie de X. Ceci vient du fait que le cup produit est naturel : autrement dit, si on a une application $f : X \longrightarrow Y$ alors l'application induite $f^* : H^*(Y) \longrightarrow H^*(X)$ est un morphisme d'anneaux. Dans le cas où f est une équivalence d'homotopie (et a fortiori si f est un homéomorphisme), f^* est un isomorphisme d'anneaux.

Notation : pour tout entier naturel a on notera $\mathbb{Z}(a)$ le $\mathbb{Z}$-module gradué égal à $\mathbb{Z}$ en degré a et nul dans les autres degrés.

1.1 Calcul de $H_*(S^p \times S^q)$ et $H^*(S^p \times S^q)$

Montrer que $H_*(S^p \times S^q) \simeq \mathbb{Z}(0) \oplus \mathbb{Z}(p) \oplus \mathbb{Z}(q) \oplus \mathbb{Z}(p+q)$.
Déterminer également $H^*(S^p \times S^q)$.

1.2 Calcul de $H_*(S^p \vee S^q \vee S^{p+q})$ et $H^*(S^p \vee S^q \vee S^{p+q})$

Calculer $H_*(S^p \vee S^q \vee S^{p+q})$ et $H^*(S^p \vee S^q \vee S^{p+q})$ et en déduire que $S^p \times S^q$ et $S^p \vee S^q \vee S^{p+q}$ ont mêmes groupes d'homologie et de cohomologie.

1.3 Structure multiplicative de de $H^*(S^p \times S^q)$

Notation : dans toute sphère S^n on note 1 le point de coordonnées $(1, \underline{0})$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

L'isomorphisme de Künneth donne des générateurs du groupe abélien libre $H_*(S^p \times S^q)$:
$[1] \times [1] \in H_0(S^p \times S^q)$,
$a = [S^p] \times [1] \in H_p(S^p \times S^q)$,
$b = [1] \times [S^q] \in H_q(S^p \times S^q)$
et $[S^p] \times [S^q] \in H_{p+q}(S^p \times S^q)$.
Comme $H^*(S^p \times S^q) \simeq Hom(H_*(S^p \times S^q), \mathbb{Z})$, on obtient par dualité des générateurs de $H^*(S^p \times S^q)$:
$([1] \times [1])^* \in H^0(S^p \times S^q)$,
$\alpha = a^* \in H^p(S^p \times S^q)$,
$\beta = b^* \in H^q(S^p \times S^q)$,

et $([S^p] \times [S^q])^* \in H^{p+q}(S^p \times S^q)$.

On note i_1 et i_2 les injections canoniques $i_1 : S^p \longrightarrow S^p \times \{1\} \hookrightarrow S^p \times S^q$ et $i_2 : S^q \longrightarrow \{1\} \times S^q \hookrightarrow S^p \times S^q$, et p_1 et p_2 les projections canoniques $p_1 : S^p \times S^q \longrightarrow S^p$ et $p_2 : S^p \times S^q \longrightarrow S^q$.

1. Montrer que $a = i_{1*}([S^p]) \in H_p(S^p \times S^q)$ et $b = i_{2*}([S^q]) \in H_q(S^p \times S^q)$.

2. Montrer que $\alpha = p_1^*([S^p]^*) = [S^p]^* \times [1]^*$ et $\beta = p_2^*([S^q]^*) = [1]^* \times [S^q]^*$.

3. Montrer que $\alpha \cup \beta = [S^p]^* \times [S^q]^* = (-1)^{pq}([S^p] \times [S^q])^*$, que $\alpha \cup \alpha = 0$ et que $\beta \cup \beta = 0$.
Indication : si $d : X \to X \times X$ est l'inclusion diagonale, on a $f \cup g = d^*(f \times g)$ pour tous $f, g \in H^*(X)$.

1.4 Structure multiplicative de $H^*(S^p \vee S^q \vee S^{p+q})$

Appelons 1 le point commun des trois sphères dans l'espace $X = S^p \vee S^q \vee S^{p+q}$.

Alors, d'après le théorème 1, des générateurs du groupe abélien libre $H_*(X)$ sont donnés par :
$[1] \in H_0(X)$,
$a = i_*([S^p]) \in H_p(X)$,
$b = j_*([S^q]) \in H_q(X)$,
et $c = k_*([S^{p+q}]) \in H_{p+q}(X)$
où i, j et k sont les inclusions $i : S^p \hookrightarrow X$, $j : S^q \hookrightarrow X$ et $k : S^{p+q} \hookrightarrow X$.

De même que précédemment, on obtient dualement des générateurs de $H^*(X)$:
$[1]^* \in H^0(X)$,
$\alpha = a^* \in H^p(X)$,
$\beta = b^* \in H_q(X)$,
et $\gamma = c^* \in H^{p+q}(X)$.

Montrer que $\alpha \cup \beta = 0$, et aussi que $\alpha \cup \alpha = 0$ et $\beta \cup \beta = 0$.
Indication : calculer $k^*(\alpha \cup \beta)$.