Séance de TD n°4 et 5

2 et 9 octobre 2012

Calculs d'homologie singulière. Calculs de degrés.

1 Homologie du complémentaire d'un noeud

On considère un plongement $f : D^2 \times S^1 \longrightarrow S^3$ et on note $K = f(0 \times S^1)$ l'âme du tore plongé.
Calculer $H_*(S^3 \setminus K)$ à l'aide d'une suite de Mayer-Vietoris.

2 Degré des puissances sur le cercle

Soit $k \in \mathbb{N}$. Quel est le degré de l'application $\phi_k : S^1 \longrightarrow S^1$ définie par $\phi_k(z) = z^k$?

3 Homologie de $\mathbb{R}P^2$ et $\mathbb{R}P^3$

1. **a.** Justifier que $\mathbb{R}P^2 \simeq S^1 \cup_\varphi D^2$ où $\varphi : S^1 \longrightarrow S^1$ est définie par $\varphi(z) = z^2$.
   b. Calculer par excision l'homologie de la paire $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^2 \setminus \{p\})$ où p est l'image du centre de D^2 dans le quotient.
   c. En déduire $H_*(\mathbb{R}P^2)$.
2. En s'inspirant du calcul précédent, calculer $H_*(\mathbb{R}P^3)$

4 Degré d'attachement de cellules dans les espaces projectifs réels

On rappelle que $\mathbb{R}P^n$ s'obtient à partir de $\mathbb{R}P^{n-1}$ par attachement d'une cellule de dimension n. Plus précisément, on a :

$$\mathbb{R}P^n \simeq \mathbb{R}P^{n-1} \cup_\varphi D^n$$

où $\varphi : \partial D^n = S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ est définie par $\varphi(x) = [x]$ (cf séance 1).
Calculer au signe près le degré de l'application

$$\pi \circ \varphi : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1} / \mathbb{R}P^{n-2}$$

où π est la projection $\pi : \mathbb{R}P^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1} / \mathbb{R}P^{n-2}$.