Séance de TD n°2

18 septembre 2012

Calculs d'homologie singulière.

1 Calcul de $H_*(S^1)$

S^1 est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et on note $S = (0, -1)$ le "pôle sud" et $N = (0, 1)$ le "pôle nord".

1. Calculer l'homologie de la paire $(\mathbb{R}, \mathbb{R} \smallsetminus \{0\})$.

2. Montrer que $H_*(S^1, S^1 \smallsetminus \{S\}) \simeq H_*(\mathbb{R}, \mathbb{R} \smallsetminus \{0\})$.
Indication : projection stéréographique.

3. En utilisant la suite exacte longue de la paire $(S^1, S^1 \smallsetminus \{S\})$, en déduire $H_*(S^1)$.

2 Calcul de $H_*(S^2)$

Calculer l'homologie de la sphère S^2 en appliquant la même méthode que pour S^1.

3 Calcul de $H_*(S^1 \times S^1)$

On considère le tore $T = S^1 \times S^1$.

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1 \times S^1$ définie par $f(x, y) = (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y})$ est une application quotient.

On définit les parties suivantes de T : $Y = f(\mathbb{R}\times]\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}[)$ et $K = f(\mathbb{R} \times \{0\})$.

2. Déterminer $H_*(Y)$, $H_*(T \smallsetminus K)$ et $H_*(Y \smallsetminus K)$.

3. Justifier que l'inclusion de paires $(T \smallsetminus K, Y \smallsetminus K) \subset (T, Y)$ induit un isomorphisme en homologie.

4. Ecrire la suite exacte longue exacte de la paire $(T \smallsetminus K, Y \smallsetminus K)$ et en déduire $H_*(T \smallsetminus K, Y \smallsetminus K)$.

5. La suite exacte longue exacte de la paire (T, Y) s'écrit

$$0 \longrightarrow H_2(T) \longrightarrow H_2(T, Y) \xrightarrow{\alpha} H_1(Y) \xrightarrow{i_*} H_1(T) \longrightarrow H_1(T, Y) \xrightarrow{\beta} H_0(Y) \xrightarrow{j_*} H_0(T) \longrightarrow H_0(T, Y) \longrightarrow 0$$

a. Montrer que les morphismes α et β sont nuls.
Indication : on pourra utiliser (après l'avoir justifié) le carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H_2(T \smallsetminus K, Y \smallsetminus K) & \xrightarrow{\gamma} & H_1(Y \smallsetminus K) \\ \downarrow\simeq & & \downarrow k_* \\ H_2(T, Y) & \xrightarrow{\alpha} & H_1(Y) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des bords de suites exactes longues de paires et les flèches verticales sont induites par des inclusions.

b. En déduire $H_*(T)$.

6. En suivant toutes les étapes qui ont conduit à l'isomorphisme $H_1(S^1 \times S^1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, montrer que si un générateur de $H_1(S^1)$ est fixé, alors des générateurs de $H_1(S^1 \times S^1)$ sont donnés par les applications canoniques
$j_{1*} : H_1(S^1) \xrightarrow{\simeq} H_1(S^1 \times \{1\}) \xrightarrow{i_{1*}} H_1(S^1 \times S^1)$ d'une part et
$j_{2*} : H_1(S^1) \xrightarrow{\simeq} H_1(\{1\} \times S^1) \xrightarrow{i_{2*}} H_1(S^1 \times S^1)$ d'autre part
($i_1 : S^1 \times \{1\} \longrightarrow S^1 \times S^1$ et $i_2 : \{1\} \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ sont des inclusions).
Plus précisément, si $[u]$ est un générateur de $H_1(S^1)$ on a

$$H_1(S^1 \times S^1) \simeq \mathbb{Z}[u_1] \oplus \mathbb{Z}[u_2]$$

avec $[u_1] = j_{1*}([u])$ et $[u_2] = j_{2*}([u])$.