Séance de TD n°1

12 septembre 2012

Exemples d'espaces topologiques.

1 Espaces projectifs réels

Pour tout entier naturel n, on définit l'espace quotient

$$\mathbb{R}P^n = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$$

où la relation d'équivalence $\sim$ est définie sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par : $x \sim y \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}^*, y = tx$.
On note $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ la projection canonique et on utilisera aussi la notation :

$$\pi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = [x_1, \ldots, x_{n+1}].$$

1. Montrer que $\mathbb{R}P^n$ est connexe et que l'application π est ouverte.

2. Montrer que $\mathbb{R}P^n$ est séparé.
Indication : considérer d'abord deux points $[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ de $\mathbb{R}P^n$ tels que $x_{n+1} \neq 0$. Montrer que la restriction de π à l'hyperplan $\mathcal{H} = \{x_{n+1} = 1\}$ est un plongement. Conclure puis passer au cas général.

3. Montrer que la restriction de π à S^n induit un homéomorphisme entre $\dfrac{S^n}{\sim}$ et $\mathbb{R}P^n$.
En déduire que $\mathbb{R}P^n$ est compact.

4. On note $S^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n, x_{n+1} \geqslant 0\}$ l'"hémisphère nord" de S^n.
Montrer que la restriction de π à S^n_+ induit un homéomorphisme entre $\dfrac{S^n_+}{\sim}$ et $\mathbb{R}P^n$.

5. On définit l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & D^n & \longrightarrow & S^n_+ \\ & x & \longmapsto & \left(x, \sqrt{1 - \|x\|^2}\right) \end{array}$$

Montrer que $\pi|S^n_+ \circ f$ est une application quotient et en déduire que $\mathbb{R}P^n \simeq \dfrac{D^n}{x \sim -x \text{ pour } x \in \partial D^n}$.

6. Montrer que $\mathbb{R}P^n$ s'obtient à partir de $\mathbb{R}P^{n-1}$ par attachement d'une cellule de dimension n.
Indication : considérer le quotient injectif de l'application $g : \mathbb{R}P^{n-1} \amalg D^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ définie par $g([x]) = [x, 0]$ pour $[x] \in \mathbb{R}P^{n-1}$ et $g(x) = [f(x)]$ pour $x \in D^n$.

2 Recollement de deux variétés suivant leurs bords

Soit M et N deux variétés compactes à bord de même dimension et $f : \partial N \longrightarrow \partial M$ un homéomorphisme de leurs bords. Soit $g : N \longrightarrow N$ un homéomorphisme. Montrer que :

$$M \cup_{f \circ g|\partial N} \simeq M \cup_f N$$

En d'autres termes, la variété recollée $M \cup_f N$ ne change pas si on compose f par un homéomorphisme de ∂N qui se prolonge à N.

3 Exemples de recollements en dimension 3 : les espaces lenticulaires.

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} q & s \\ p & r \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ l'application

$$\begin{array}{rccc} h_M : & S^1 \times S^1 & \longrightarrow & S^1 \times S^1 \\ & (u, v) & \longmapsto & (u^q v^s, u^p v^r) \end{array}$$

est un homéomorphisme du tore $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. On définit l'espace

$$L_M = D^2 \times S^1 \cup_{h_M} D^2 \times S^1 = \frac{D^2 \times S^1 \amalg D^2 \times S^1}{(x, y) \in \partial(D^2 \times S^1) \sim h_M(x, y) \in \partial(D^2 \times S^1)}$$

C'est une variété topologique de dimension 3, sans bord, compacte et connexe.

1. Montrer que pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $L_M \simeq S^3$.

2. Montrer que pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $L_M \simeq S^1 \times S^2$.

3. On appelle *twist méridien* du tore solide $D^2 \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ l'application

$$\begin{array}{rccc} t : & D^2 \times S^1 & \longrightarrow & D^2 \times S^1 \\ & (u, v) & \longmapsto & (uv, v) \end{array}$$

Soit $M = \begin{pmatrix} q & s \\ p & r \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $L_M \simeq L_{A_n}$ où $A_n = \begin{pmatrix} q & s + nq \\ p & r + np \end{pmatrix}$.

b. Montrer que $L_M \simeq L_{M'}$ où $M' = \begin{pmatrix} q & -s \\ p & -r \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$.

c. En déduire que L_M ne dépend (à homéomorphisme près) que du couple d'entiers premiers entre eux (p, q). Cette variété est appelée *espace lenticulaire* de paramètres p et q et est notée $L(p, q)$.

4. Avec les mêmes notations qu'à la question précédente, montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:
$L_M \simeq L_{B_n}$, où $B_n = \begin{pmatrix} q + np & s + nr \\ p & r \end{pmatrix}$.
En déduire que $L(p, q)$ ne dépend que de q modulo p.

5. Montrer que $L(-p, -q) \simeq L(-p, q) \simeq L(p, q)$.

6. Montrer que si $qq' \equiv \pm 1 [p]$ alors $L(p, q) \simeq L(p, q')$.

7. Montrer que le $\pi_1(L(p, q)) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.