Un peu d'algèbre homologique : le foncteur $Ext(\cdot, G)$

Nous reprenons en les détaillant certaines démonstrations du cours.
On travaille dans la catégorie des groupes abéliens et G est un groupe abélien fixé. Dans ce qui suit, on peut sans dommage remplacer les groupes abéliens (= $\mathbb{Z}$-modules) par des modules sur un anneau principal quelconque.
Commençons par donner deux lemmes généraux. Le premier est très facile, le deuxième ("lemme du serpent") beaucoup moins (voir par exemple S.Lang, Algebra (III §7) pour une démonstration).

Lemme 1. Etant donné un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\beta} & B' \end{array}$$

on peut le compléter d'une seule manière en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 \longrightarrow & \text{Ker } \alpha & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & A' & \longrightarrow & \text{Coker } \alpha & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & \text{Ker } \beta & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\beta} & B' & \longrightarrow & \text{Coker } \beta & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Dans la suite, les morphismes induits sur les noyaux ou les conoyaux sont toujours les morphismes naturels décrits par le lemme 1.

Lemme 2 (Lemme du serpent). Soit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{cccccccc} & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & \\ 0 \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \end{array}$$

où les lignes sont exactes. Alors il existe un morphisme $\Delta : \text{Ker } \gamma \longrightarrow \text{Ker } \alpha$ qui rend la suite

$$\text{Ker } \alpha \longrightarrow \text{Ker } \beta \longrightarrow \text{Ker } \gamma \xrightarrow{\Delta} \text{Coker } \alpha \longrightarrow \text{Coker } \beta \longrightarrow \text{Coker } \gamma$$

exacte.

Reprenons maintenant la définition du groupe abélien $Ext(M, G)$ pour un groupe abélien M.

Proposition 1. Soit $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte.
Alors $0 \longrightarrow Hom(M'', G) \xrightarrow{{}^t p} Hom(M, G) \xrightarrow{{}^t i} Hom(M', G)$ est exacte.

Exercice 1. Démontrer la proposition 1.

On rappelle que si M est un groupe abélien, une *présentation* de M est une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où L et R sont libres (c'est un théorème qu'une présentation existe toujours).

Proposition 2. Soit M est un groupe abélien muni d'une présentation $0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$.
Alors $\text{Coker } ({}^t\text{i} : \text{Hom(L, G)} \longrightarrow \text{Hom(R, G)})$ est indépendant de la présentation à isomorphisme canonique près.

Cette proposition permet de définir $Ext(M, G) := \mathrm{Coker}\ ({}^t\mathrm{i})$.

Exercice 2. Démontrer la proposition 2.

Indication : pour deux présentations $0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$ et $0 \longrightarrow R' \xrightarrow{i'} L' \xrightarrow{p'} M \longrightarrow 0$ montrer qu'il existe un morphisme $F : L \longrightarrow L'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & R \xrightarrow{i} & L & \xrightarrow{p} & M & \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow F & & \| & \\
0 \longrightarrow & R' \xrightarrow{i'} & L & \xrightarrow{p'} & M & \longrightarrow 0
\end{array}$$

commute. Remarque : F n'est pas unique.
D'après le lemme 1, ce diagramme se complète de manière unique en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & R \xrightarrow{i} & L & \xrightarrow{p} & M & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow f & \downarrow F & & \| & \\
0 \longrightarrow & R' \xrightarrow{i'} & L & \xrightarrow{p'} & M & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Ensuite, ${}^t f : Hom(R', G) \longrightarrow Hom(R, G)$ induit un morphisme $\overline{{}^t f} : \mathrm{Coker}\ ({}^t\mathrm{i}) \longrightarrow \mathrm{Coker}\ ({}^t\mathrm{i}')$ (bien défini d'après le lemme 1.). Montrer que :

1. $\overline{{}^t f}$ est indépendant du choix de F.

2. $\overline{{}^t f}$ est un isomorphisme (construire l'inverse en utilisant l'unicité montrée à la question précédente).

Proposition 3. Soit $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte. Alors on a une suite exacte $0 \longrightarrow Hom(M'', G) \longrightarrow Hom(M, G) \longrightarrow Hom(M', G) \longrightarrow Ext(M'', G) \longrightarrow Ext(M, G) \longrightarrow Ext(M', G) \longrightarrow 0$.

Exercice 3. Démontrer la proposition 3.

Indication : utiliser le lemme du serpent et le lemme suivant (que l'on démontrera...)

Lemme 3. Soit $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte et $0 \longrightarrow R' \longrightarrow L' \longrightarrow M' \longrightarrow 0$ et $0 \longrightarrow R'' \longrightarrow L'' \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ des présentations.
Alors il existe une présentation $0 \longrightarrow R \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & 0 & \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow 0 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \longrightarrow & L' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L'' & \longrightarrow 0 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \longrightarrow & R' & \longrightarrow & R & \longrightarrow & R'' & \longrightarrow 0 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
& 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$