UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT
Année 2011-2012, Master 2

Examen du 27/10/2011 (durée : 3 heures)

I

Soit X le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ réunion de la sphère unité S^2 et du disque unité du premier plan de coordonnées : $D^2 \times \{0\}$.

1. Pour $N = (0,0,1)$, calculer l'homologie $H_*(X, X - \{N\})$.
2. Calculer l'homologie de X.
3. Pour $A = (1,0,0)$, calculer l'homologie $H_*(X, X - \{A\})$.
4. Est-ce que X est une variété topologique ?
5. Quel sont les points de X qui ont un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^2$?

II

Pour un espace topologique X, on définit la suspension SX comme le quotient de $[0,1] \times X$ qui identifie $\{0\} \times X$ à un point et $\{1\} \times X$ à un autre point.

1. Montrer que la suspension du cercle S^1 est une sphère.
2. Calculer l'homologie de la suspension de la sphère S^n pour tout $n \geq 0$.
3. Exprimer l'homologie de la suspension de X en fonction de l'homologie de X pour tout espace topologique X.

III

On note D^2 le disque unité de $\mathbb{C}$ et S^1 son bord. Soient A_1, A_2 deux copies de l'espace $D^2 \times D^2$. Pour $i \in \{1,2\}$ on note $T_i \subset A_i$ le tore plein $D^2 \times S^1$ et $T_i' \subset A_i$ le tore plein $S^1 \times D^2$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on considère l'espace P_k obtenu en attachant A_2 à A_1 avec l'application :

$$f_k : \begin{array}{ccc} T_2 & \longrightarrow & A_1 \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & (\alpha\beta^k, \beta) \end{array}$$

La projection canonique de $A_1 \amalg A_2$ sur P_k est notée π.

1. Justifier brièvement pourquoi A_1 et A_2 sont des variétés à bord et préciser leur bord.
2. Calculer les homologies $H_*(A_i, T_i)$ et $H_*(A_i, \partial A_i)$, $i \in \{1,2\}$.
3. Montrer que P_k est une variété de bord $M_k = \pi(T_1') \cup \pi(T_2')$.
4. Montrer que la restriction de π à A_1 (respectivement A_2) est un plongement.
   On note B_i, $i \in \{1,2\}$ le sous-espace $\pi(A_i)$.
5. Montrer que B_1 a un voisinage fermé qui se rétracte par déformation forte sur B_1.
6. Calculer les homologies $H_*(P_k, B_1)$, puis $H_*(P_k)$.
7. Calculer les homologies $H_*(B_1 \cup M_k, M_k)$, $H_*(P_k, B_1 \cup M_k)$ puis $H_*(P_k, M_k)$.
8. Calculer $H_*(M_k)$.
9. Etudier le problème d'homéomorphisme
   (a) entre les espaces P_k, $k \in \mathbb{Z}$;
   (b) entre les espaces M_k, $k \in \mathbb{Z}$, S^3 et $S^1 \times S^2$.