TRIRAPPORT ET GÉOMÉTRIE DES ESPACES SYMÉTRIQUES

ANTONIN GUILLOUX

J'essaye ici de donner une interprétation du trirapport de 3 drapeaux de $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ en termes de la géométrie de l'espace symétrique X de $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$. Étant donnés trois drapeaux D_1, D_2 et D_3 en position générique, on peut définir un point de l'espace symétrique : le projeté orthogonal p du milieu de la chambre de Weyl associé à D_3 sur le plat A défini par D_1, D_2. En plus de ce point p, on dispose d'un vecteur tangent en p : le vecteur qui pointe vers le milieu de la chambre de Weyl ; il est orthogonal au plat A. C'est ce vecteur tangent qui détermine le trirapport des trois drapeaux. Rappelons ici que le trirapport de 3 drapeaux[1] $D_i = ([x_i],[f_i]) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{R})^*$ est :

$$Z = \frac{f_1(x_2)f_2(x_3)f_3(x_1)}{f_1(x_3)f_2(x_1)f_3(x_2)}.$$

Nous effectuons ici l'aller-retour entre les deux points de vue : étant donné un point dans un plat de l'espace symétrique, équippé d'un vecteur orthogonal au plat, retrouver le drapeau D_3 et calculer le trirapport. Inversement, étant donné les trois drapeaux avec leur trirapport, caractériser le point dans le plat associé aux deux premiers drapeaux.

1. Retrouver le drapeau à l'infini

On fixe la base canonique sur $\mathbf{R}^3$. Celà définit un point base p_0 dans l'espace symétrique (la norme invariante par $\mathrm{SO}(3)$), et le plat A_0 associé au groupe diagonal. Le groupe $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$ agit transitivement sur les plats pointés : tout point p dans un plat A s'envoie sur le couple p_0, A_0.

L'espace tangent à X en p_0 s'identifie au conoyau de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de $SO(3)$ via la projection $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R}) \to X = \mathrm{SL}(3,\mathbf{R}).p_O$. En utilisant la décomposition $sl(3,\mathbf{R}) = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$, on obtient que l'espace tangent à X en p_0 est l'espace $\mathfrak{p}$ des matrices symétriques de trace nulle. De plus l'espace tangent au plat A_0 est naturellement l'espace des matrices diagonales de $\mathfrak{p}$. Son supplémentaire orthogonal est donc

1. Un drapeau est usuellement vu comme un point dans une droite du plan projectif. Or une droite du plan projectif definit un point du plan projectif de l'espace dual : celui des formes linéaires dont la droite est le noyau. Un drapeau est donc un couple $([x],[f]) \in \mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{R})^*$ tel que $f(x) = 0$. Nous adopterons principalement ce point de vue dans cette note.

l'espace N des matrices de la forme

$$n(a,b,c)=\begin{pmatrix}0&a&b\\a&0&c\\b&c&0\end{pmatrix}.$$

Nous cherchons donc parmi les géodésiques issues de p_0 et dirigées par une matrice de N celles qui pointent vers le milieu d'une chambre de Weyl. L'interprétation algébrique de cette dernière propriété est très simple : il s'agit que les valeurs propres de la matrice soient de la forme $\lambda, 0, -\lambda$. Comme les matrices de N sont de trace nulle, ce dernier point est équivalent au fait que le déterminant soit nul. Un rapide calcul donne la condition :

Fait 1.1. *La géodésique issue de p_0 et dirigée par la matrice $n(a,b,c)$ pointe vers le milieu d'une chambre de Weyl si et seulement si $abc=0$.*

Démonstration. Let déterminant de $n(a,b,c)$ est $2abc$. □

Notons N^0 le cône de N défini par cette équation. Nous voulons maintenant déterminer la chambre de Weyl $W(a,b,c)$ vers laquelle pointe la géodésique issue de p_0 et dirigée par $n(a,b,c)\in N^0$. Pour cela il s'agit de diagonaliser la matrice $n(a,b,c)$. Avant ça, rappelons que si $r>0$, $W(a,b,c)=W(ra,rb,rc)$ (reparamétrer la géodésique ne change pas son point limite) et que le fixateur du couple (p_0,A_0) est le groupe des matrices diagonales de $\mathrm{O}(3)$, c'est-à-dire les matrices diagonales à coefficients ±1. Autrement dit, quitte à agir par un élément de $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$, on peut supposer que a,b,c sont positifs. On vérifie sans problème la proposition suivante :

Lemme 1. *Trois cas sont possibles :*

(1) $a=0$. *Les valeurs propres de $n(0,b,c)$ sont 0 et $\pm\sqrt{b^2+c^2}$. Les vecteurs propres associés sont :*

$$v_0=\begin{pmatrix}c\\-b\\0\end{pmatrix}\quad et\ v_\pm=\begin{pmatrix}b\\c\\\pm\sqrt{b^2+c^2}\end{pmatrix}.$$

(2) $b=0$. *Les valeurs propres de $n(a,0,c)$ sont 0 et $\pm\sqrt{a^2+c^2}$. Les vecteurs propres associés sont :*

$$v_0=\begin{pmatrix}-c\\0\\a\end{pmatrix}\quad et\ v_\pm=\begin{pmatrix}a\\\pm\sqrt{a^2+c^2}\\c\end{pmatrix}.$$

(3) $c=0$. *Les valeurs propres de $n(a,b,0)$ sont 0 et $\pm\sqrt{a^2+b^2}$. Les vecteurs propres associés sont :*

$$v_0=\begin{pmatrix}0\\b\\-a\end{pmatrix}\quad et\ v_\pm=\begin{pmatrix}\pm\sqrt{a^2+b^2}\\a\\b\end{pmatrix}.$$

Le drapeau vers lequel cette géodésique pointe se lit sur la diagonalisation précédente. Notons $D_1 = (\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, [0,0,1])$ et $D_2 = (\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, [1,0,0])$. Ces deux drapeaux définissent le plat A_0. Etant donné un vecteur $n \in N^0$, nous voulons donc déterminer le drapeau D_3 vers lequel il pointe et calculer le trirapport de D_1, D_2 et D_3. Or, le drapeau vers lequel il pointe est composé par le point $[v_+]$ et la droite passant par v_+ et v_0 (avec les notations de la proposition précédente). Nous obtenons donc :

Proposition 2. *Soit $n(a,b,c) \in N^0$. Le drapeau D_3 vers lequel pointe la géodésique issue de p_0 et dirigée par $n(a,b,c)$ et le trirapport Z de D_1, D_2, D_3 sont dans les trois cas précédents :*

(1) *$a = 0$. Le drapeau D_3 est $(\begin{bmatrix}b\\c\\\sqrt{b^2+c^2}\end{bmatrix}, [b, c, -\sqrt{b^2+c^2}])$. Le trirapport est alors $Z = -\frac{b^2}{b^2+c^2}$.*

(2) *$b = 0$. Le drapeau D_3 est $(\begin{bmatrix}a\\\sqrt{a^2+c^2}\\c\end{bmatrix}, [a, -\sqrt{a^2+c^2}, c])$. Le trirapport est alors $Z = \frac{a^2}{c^2}$.*

(3) *$c = 0$. Le drapeau D_3 est $(\begin{bmatrix}\sqrt{a^2+b^2}\\a\\b\end{bmatrix}, [-\sqrt{a^2+b^2}, a, b])$. Le trirapport est alors $Z = -\frac{a^2+b^2}{b^2}$.*

Remarque. Dans les trois cas, on a $Z = \pm\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$ et

$$D_3 = (\begin{bmatrix}\sqrt{a^2+b^2}\\\sqrt{a^2+c^2}\\\sqrt{b^2+c^2}\end{bmatrix}, [\pm\sqrt{a^2+b^2}, \pm\sqrt{a^2+c^2}, \pm\sqrt{b^2+c^2}]).$$

2. Trouver le point de l'espace symétrique à partir des trois drapeaux

Donnons nous trois drapeaux D_1, D_2, D_3 en position générique, de trirapport Z. Il existe alors une unique base (à homotétie près) e_1, e_2, e_3 dans laquelle on a :

– $D_1 = ([e_1], [e_3^*])$,
– $D_2 = ([e_3], [e_1^*])$,
– $D_3 = (\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}, [\epsilon_u u, \epsilon_v v, \epsilon_w w])$ avec u, v et w positifs, les ϵ valent ± 1, et un seul vaut -1.

Le fait que D_3 est un drapeau implique que $\epsilon_u u^2 + \epsilon_v v^2 + \epsilon_w w^2 = 0$. Donc u, v, w sont les côtés d'un triangle rectangle et le seul signe $-$ est attribué au plus grand des trois, l'hypothénuse. De plus, le trirapport vaut :

$$Z = \frac{\epsilon_u u^2}{\epsilon_w w^2}.$$

Remarquons que cette dernière égalité permet de reconstruire entièrement le drapeau D_3 : on travaille projectivement, donc on peut fixer $w = 1$. Alors $u = \sqrt{|Z|}$. Si $Z > 0$, $\epsilon_v = -1$ et $v = \sqrt{1 + |Z|}$. Si $-1 \leq Z < 0$, $\epsilon_w = -1$ et $v = \sqrt{1 - |Z|}$. Enfin, si $Z \leq -1$, $\epsilon_u = -1$ et $v = \sqrt{|Z| - 1}$. Notamment, on a toujours $v = \sqrt{|1 + Z|}$.

La comparaison avec la proposition 2 montre que le projeté du milieu de la chambre de Weyl associée à D_3 sur le plat D_1, D_2 est la norme canonique dans l'unique base e_1, e_2, e_3 telle que :

$$\begin{cases} D_1 = (e_1, e_3^*) \\ D_2 = (e_3, e_1^*) \\ D_3 = \left(\left[\sqrt{|Z|}e_1 + \sqrt{|1+Z|}e_2 + e_3\right], \left[\pm\sqrt{|Z|}e_1^* \pm \sqrt{|1+Z|}e_2^* \pm e_3^*\right]\right) \end{cases}.$$

3. Permutation circulaire des drapeaux et quadruplet de drapeaux

Notons p_{123} le point associé à D_1, D_2, D_3.

Une première remarque est qu'on vérifie facilement que $p_{123} = p_{213}$ (c'est évident géométriquement, facile algébriquement).

Il peut être utile de connaître la relation entre p_{123} et p_{231}. Un rapide calcul de changement de base montre qu'on passe l'un à l'autre par $p_{123} = T(Z)p_{231}$ où $T(Z)$ est la matrice (écrite dans la base e_1, e_2, e_3) :

$$T(Z) = \begin{pmatrix} \sqrt{|Z|} & \epsilon\sqrt{|1+Z|} & \epsilon' \\ \sqrt{|1+Z|} & -\sqrt{|Z|} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\epsilon = \epsilon_x \epsilon_y$ vaut 1 si et seulement si $-1 \leq Z < 0$ et $\epsilon' = \epsilon_x \epsilon_z$ vaut 1 si et seulement si $Z \leq -1$.

D'autre part, avec les notations de birapport de Fock et Goncharov, quand on a 2 triangles de drapeaux D_1,D_2,D_3 et D_1,D_2, D_4 avec des coordonnées d'arète z_{12}, z_{21} et des trirapport $Z = z_{123}$ et $Z' = z_{124}$, la relation entre les points p_{123} et p_{124} est donnée par $p_{123} = E(z_{12}, z_{21}, Z, Z')p_{124}$, où la matrice E dans la base associée à D_1, D_2, D_3 est :

$$E(z_{12}, z_{21}, Z, Z') = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\left|\frac{Z'(1+Z)}{Z(1+Z')}\right|}\frac{1}{z_{21}} & & \\ & \pm 1 & \\ & & \pm z_{12}\sqrt{\left|\frac{1+Z}{1+Z'}\right|} \end{pmatrix}.$$

On pourrait décrire les signes ± 1 en fonction de Z et Z'.

Pour le voir, dans la base associée à D_1, D_2, D_3, notons $D_4 = ([x_4],[f_4]) = (\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, [a,b,c])$. On calcule alors :

$$\begin{aligned} z_{12} &= \frac{f_1(x_3)\det(x_1,x_2,x_4)}{f_1(x_4)\det(x_1,x_2,x_3)} = \frac{v}{w\sqrt{|1+Z|}} \\ z_{21} &= \frac{f_2(x_4)\det(x_2,x_1,x_3)}{f_2(x_3)\det(x_2,x_1,x_4)} = \frac{u\sqrt{|1+Z|}}{\sqrt{|Z|}v} \end{aligned}$$

On peut fixer $v = \sqrt{|1+Z'|}$, ce qui donne $u = \frac{z_{21}\sqrt{|Z|}\sqrt{|1+Z'|}}{\sqrt{|1+Z|}}$ et $w = \frac{\sqrt{|1+Z'|}}{z_{12}\sqrt{|1+Z|}}$.

D'autre part, la définition de Z' comme trirapport donne $Z' = \frac{au}{cw}$ et, comme D_4 est un drapeau, on a $au + bv + cw = 0$. En fixant $b = \pm\sqrt{|1+Z'|}$, on obtient : $au + cw = \pm|1+Z'|$. On déduit de ces deux relations que $(1+Z')(cw \pm 1) = 0$ ou encore que $cw = \pm 1$. Enfin $au = \pm Z'$. Donc dans la base e_1, e_2, e_3, le drapeau D_4 est donné par :

$$D_4 = \left(\begin{bmatrix} \frac{z_{21}\sqrt{|Z|}\sqrt{|1+Z'|}}{\sqrt{|1+Z|}} \\ \sqrt{|1+Z'|} \\ \frac{\sqrt{|1+Z'|}}{z_{12}\sqrt{|1+Z|}} \end{bmatrix} ; \left[\pm\frac{|Z'|\sqrt{|1+Z|}}{z_{21}\sqrt{|Z|}\sqrt{|1+Z'|}} ; \pm\sqrt{|1+Z'|} ; \pm\frac{z_{12}\sqrt{|1+Z|}}{\sqrt{|1+Z'|}} \right] \right).$$

La matrice de passage de la base associée au triplet 123 à celle associée au triplet 124 est donc bien la matrice E décrite ci-dessus : il faut renvoyer la coordonnée u sur $\sqrt{|Z'|}$ et w sur 1.

Institut de Mathématiques de Jussieu, Unité Mixte de Recherche 7586 du CNRS, Université Pierre et Marie Curie, 4, place Jussieu 75252 Paris Cedex 05, France,

E-mail address: aguillou@math.jussieu.fr

URL: http://people.math.jussieu.fr/~aguillou