Feuille 2 : Recollement de polyèdres : un exemple hyperbolique

Exercice 1. Structures de similitudes sur le tore
On se donne un quadrilatère convexe du plan et on identifie les côtés opposés par l'unique similitude qui renverse l'orientation naturelle du bord.
Montrer que cette donnée permet de munir le tore d'une structure de similitude. Décrire la développante, l'holonomie. A quelle condition cette structure est-elle complète ?

Exercice 2. Préliminaires

1. Montrer que toute variété M de dimension impaire compacte et orientée a caractéristique d'Euler nulle.
2. Montrer que toute variété à bord de dimension impaire compacte orientée vérifie $2\chi(M) = \chi(\partial M)$.
3. Montrer qu'un recollement de polyèdres est une variété si et seulement si l'étoile de chaque sommet est une sphère. Un recollement de polyèdres est la donnée d'un nombre fini de polyèdres avec des identifications des faces 2 à 2 par un difféomorphisme qui renverse l'orientation.

Exercice 3. Structure hyperbolique
Dans cet exercice on considère des recollements de tétraèdres dits "idéaux", c'est à dire des tétraèdres plongés dans $\bar{\mathbb{H}}^3$, dont les sommets sont dans $\partial\mathbb{H}^3$. Le recollement est alors supposé épointé : on considère l'adhérence du complémentaire d'un petit voisinage des sommets.

1. Montrer qu'un recollement de tétraèdres idéaux admet une structure hyperbolique si et seulement si l'action sur les étoiles triangulaires des sommets induite par les recollements de faces est une action par similitudes et que la somme des angles au recollement autour des arêtes est égale à 2π.
2. Soit M une variété hyperbolique obtenue comme recollement de tétraèdres idéaux de $\mathbb{H}^3$. Montrer que l'étoile de tout sommet est un tore.
3. Pour simplifier on suppose qu'on a un recollement hyperbolique de tétraèdres idéaux avec une seule pointe. Montrer que la structure hyperbolique est complète ssi les recollements des arêtes de l'étoile du sommet sont donnés par des translations.

Exercice 4. Un recollement On peut voir un tétraèdre hyperbolique orienté comme la donnée de 4 points (ses sommets) dans $\mathbb{H}^3$, à permutation positive près. Un tétraèdre idéal est donc la donnée de 4 points dans $\partial\mathbb{H}^3 \simeq \mathbb{CP}^1$. Un tétraèdre sera dit *régulier* si son groupe d'isométrie s'identifie à $\mathcal{A}_4$.

1. Montrer que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ agit simplement 3-transitivement sur $\mathbb{CP}^1$. En déduire qu'un tétraèdre est déterminé par le bi-rapport de ses sommets, à isométrie près. On pourra vérifier que le bi-rapport est invariant par bi-transposition des coordonnées. Comment agissent les transpositions ?
2. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que les tétraèdres donnés par $T_1 = (\infty, 0, 1, -j^2)$ et $T_2 = (0, 1, -j, \infty)$ sont réguliers, en calculant leurs groupes d'isométries.

3. On considère deux tétraèdres idéaux réguliers, qu'on recolle comme indiqué sur le dessin suivant.

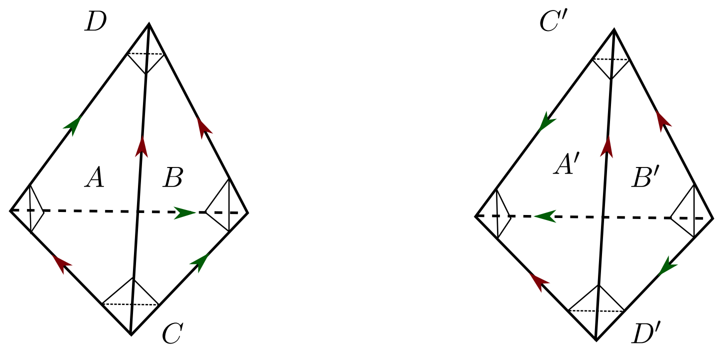

Figure 1 – Un recollement hyperbolique.

Montrer que la variété M obtenue par le recollement indiqué porte une structure hyperbolique complète à l'aide du critère donné à l'exercice précédent.

4. On peut identifier les deux tétraèdres à ceux de la question 2.
   (a) Donner les matrices dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ des identifications de faces de $T_1 \cup T_2$ décrites par la figure 1.
   (b) Retrouver qu'elles agissent par translation sur les côtés d'un domaine fondamental de ∂M.
   (c) Montrer que le groupe fondamental de M s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}[j])$.

   On peut montrer que ce groupe est d'indice 12 dans $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}[j])$, c'est un exemple de *groupe arithmétique*.

Cette feuille de TD est reprise de la feuille de Léo Bénard pour le cours de l'an dernier. Elle est grandement inspirée du mémoire de M2 de Miguel Acosta, disponible sur la page de son auteur.