

---

# GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE ET REPRÉSENTATIONS DE GROUPES DE SURFACE

---

Nicolas Bergeron et Antonin Guilloux

Ce cours est conçu comme une promenade autour des structures hyperboliques sur les surfaces compactes. Le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann compactes servira de prétexte pour esquisser le paysage de la géométrie hyperbolique et projective complexe. Nous nous placerons dans le cadre des  $(G, X)$ -structures et essayerons d'introduire certaines notions cruciales pour l'étude des représentations linéaires de groupes de surface.

De nombreux passages de ces notes sont directement empruntés au livre [Sai2011]. Une autre importante source d'inspiration a été différents cours d'Yves Benoist sur des sujets similaires.



# Sommaire

<b>I</b>	<b><math>(G, X)</math>-structures</b>	3
I.1	$(G, X)$ -variétés	3
I.2	Développante et holonomie	5
I.3	Fibrés à $(G, X)$ -connexion plate	8
I.4	Principe d'Ehresmann-Thurston	12
I.5	Complétude	14
I.6	Variétés hyperboliques	15
I.7	Classification des isométries	20
I.8	Structures projectives complexes	24
<b>II</b>	<b>Groupes fuchsien</b>	31
II.1	Groupes fuchsien et pavages	31
II.2	Domaine fondamental	32
II.3	Groupes fuchsien et surfaces de Riemann	41
<b>III</b>	<b>Théorème de Bieberbach et lemme de Margulis</b>	47
III.1	Géométrie euclidienne et sous-groupes discrets	47
III.2	Commutateurs d'isométries euclidiennes	48
III.3	Sous-groupes discrets d'isométries euclidiennes	50
III.4	Le lemme de Margulis	51
III.5	Décomposition fine-épaisse des variétés hyperboliques	54
III.6	Limites de représentations fidèles et discrètes	56
<b>IV</b>	<b>Variété des représentations d'un groupe de surface</b>	59
IV.1	Espaces de représentations	59
IV.2	Variété des représentations irréductibles	61
IV.3	Espace tangent	63
IV.4	Action par conjugaison	64
IV.5	Représentations réelles	65

<b>V Retour sur le théorème d'uniformisation</b>	67
V.1 L'espace de Teichmuller	67
V.2 L'espace de Fricke-Klein	68
V.3 L'ensemble des surfaces uniformisables est ouvert	69
V.4 Caractères et invariants fondamentaux	70
<b>VI Structures projectives complexes et équations différentielles</b>	75
VI.1 Dictionnaire	75
VI.2 L'espace des $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structures sur une courbe de genre $g$	82
VI.3 Equations différentielles sur une famille de courbes	86
VI.4 Équations uniformisantes	88
<b>VII Uniformisation des surfaces</b>	93
VII.1 L'espace de Teichmuller	93
VII.2 Deux points de vue différents	94
VII.3 L'ensemble des surfaces uniformisables est ouvert	96
VII.4 Caractères et invariants fondamentaux	97
VII.5 Longueurs extrémales	102
<b>Bibliographie</b>	105

## $(G, X)$ -structures

Nous formalisons ici la notion de structure géométrique sur une variété, et de déformation de cette structure. La notion de géométrie apparaît avec l'action d'un groupe de Lie sur un espace, dans la droite ligne du programme d'Erlangen de Klein. Plus avant dans le cours, nous considérerons en détail deux structures sur des surfaces : la géométrie hyperbolique, modelée sur l'action de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$  sur le plan hyperbolique  $\mathbb{H}$ , et les structures projectives (complexes), données par l'action de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$  sur la sphère de Riemann  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

### I.1. $(G, X)$ -variétés

#### I.1.1. Définition

Toutes les variétés et applications considérées dans ce cours sont lisses ( $C^\infty$ ). De plus  $X$  sera toujours, sauf mention du contraire, une variété connexe. On note  $G$  un sous-groupe du groupe des difféomorphismes de  $X$ . On ne veut pas considérer des groupes trop importants pour faire de la géométrie plutôt que de la topologie : on demande à  $G$  d'agir *analytiquement*.

**Définition I.1.1.** — Un sous-groupe  $G \subset \mathrm{Diff}(X)$  agit analytiquement sur  $X$  si pour tout couple d'éléments  $g_1, g_2$  de  $G$ , et tout ouvert non vide  $U$  de  $X$ , si les difféomorphismes  $g_1$  et  $g_2$  coïncident sur  $U$ , alors  $g_1 = g_2$ .

Dorénavant, on supposera toujours que l'action de  $G$  sur  $X$  est *transitive* et *analytique*. Étant donné un tel couple  $(G, X)$ , on peut définir la

notion de  $(G, X)$ -structure sur une variété  $V$  : c'est la donnée d'un atlas de carte sur  $V$  à valeur dans  $X$ , dont les changements de cartes sont donnés par des éléments de  $G$  (voir figure 1) :

**Définition I.1.2.** — Une  $(G, X)$ -structure sur une variété  $V$  est un atlas de cartes  $\varphi_i : V_i \rightarrow X$  tel que :

- Les  $V_i$  forment un recouvrement ouvert de  $V$
- Les  $\varphi_i$  sont des difféomorphismes sur leur image.
- Tout changement de cartes  $f_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ , de  $\varphi_i(V_i \cap V_j)$  dans  $\varphi_j(V_i \cap V_j)$  est localement la restriction de l'action d'un élément de  $G$ .

On appelle  $(G, X)$ -variété une variété munie d'une  $(G, X)$ -structure. L'intérêt de ces structures est que les constructions géométriques locales faites sur  $X$  descendent sur  $V$ . On peut penser par exemple à des métriques invariantes par le groupe  $G$ .

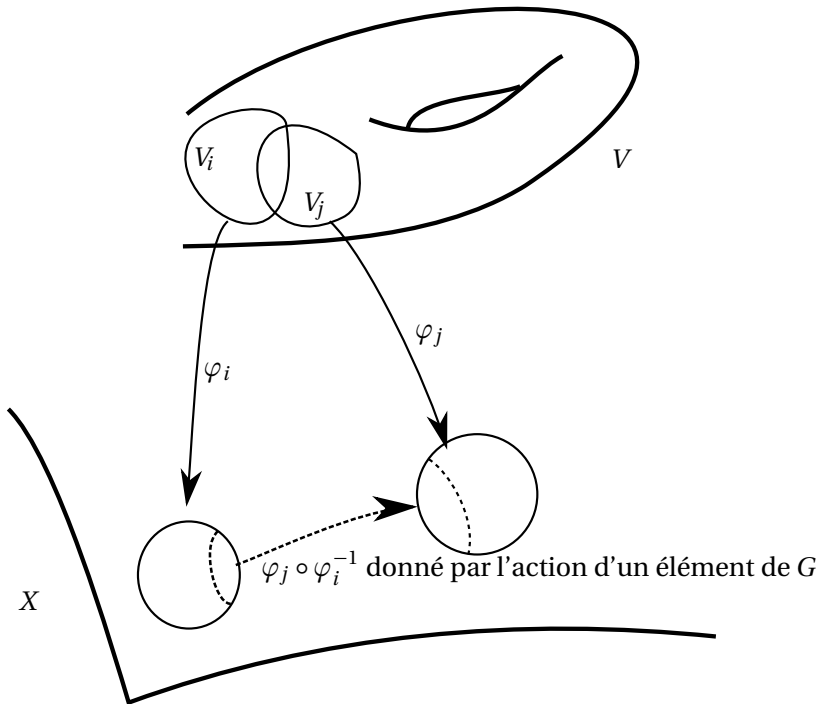


FIGURE 1. Les cartes d'une  $(G, X)$ -structure

### I.1.2. Exemples

Voici une liste d'exemples classiques. On rajoute le groupe d'isotropie de la structure, c'est-à-dire (la classe de conjugaison) du stabilisateur d'un point<sup>(1)</sup>. Nous reviendrons bientôt sur la construction de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ .

Structure	Espace $X$	Groupe $G$	Groupe d'isotropie
Euclidienne	$\mathbb{R}^n$	$O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$	$O(n)$
Sphérique	$\mathbb{S}^n$	$O(n+1)$	$O(n)$
Hyperbolique	$\mathbb{H}^n$	$O^+(n, 1)$	$O(n)$
Affine (réelle)	$\mathbb{R}^n$	$GL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$	$GL(n, \mathbb{R})$
Projective complexe	$\mathbb{C}P^1$	$PGL(2, \mathbb{C})$	$T^+ = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$
Conforme	$\mathbb{S}^n = \partial \mathbb{H}^{n+1}$	$O^+(n+1, 1)$	$(O(n) \times O^+(1, 1)) \ltimes \mathbb{R}^n$
Projective réelle	$\mathbb{R}P^n$	$PGL(n+1, \mathbb{R})$	$PGL(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$

Cette liste n'est pas exhaustive, on peut par exemple mentionner les structures hyperboliques complexes, Cauchy-Riemann, affines complexes, de translation... On laissera le lecteur se familiariser avec ces géométries, par exemple en vérifiant que le tore  $\mathbb{T}^2$  peut être muni d'une structure euclidienne, mais aussi projective complexe. Nous y reviendrons. Enfin, nous concluons cette liste d'exemples en précisant que dans le cas de la structure hyperbolique de dimension 2, le groupe  $G = O^+(2, 1)$  est isomorphe au groupe  $PGL(2, \mathbb{R})$ , qui est considéré plus habituellement.

### I.2. Développante et holonomie

Une façon de comprendre une  $(G, X)$ -structure sur une variété  $V$  connexe est de construire l'*application développante*. C'est le but de cette section. On se repose pour cela sur l'hypothèse d'analyticité de l'action de  $G$  sur  $X$  : en partant d'une carte, on peut en faire le prolongement analytique<sup>(2)</sup> grâce aux changements de cartes, pour finir par construire une application du revêtement universel  $\tilde{V}$  de  $V$  vers  $X$ . Cette application est par construction un difféomorphisme local, mais

1. Rappelons que l'action de  $G$  est supposée transitive ; donc tous les stabilisateurs sont conjugués.
2. de façon parfaitement similaire au prolongement analytique des fonctions holomorphes.

on verra que son comportement global peut-être très compliqué. Ayant construit cette application développante, l'action du groupe fondamental de  $V$  sur son revêtement universel se traduit par l'action d'éléments du groupe  $G$  : on obtient naturellement la *représentation d'holonomie* de la  $(G, X)$ -structure, c'est-à-dire un morphisme  $\pi_1(V) \rightarrow G$ .

### I.2.1. Construction de l'application développante

Nous commençons par définir la notion naturelle de morphisme de  $(G, X)$ -structure, ou  $(G, X)$ -morphisme :

**Définition I.2.1.** — Soit  $V$  et  $V'$  deux  $(G, X)$ -variétés. Un  $(G, X)$ -morphisme  $f : V \rightarrow V'$  est un difféomorphisme local qui est donné localement dans les cartes par l'action d'un élément de  $G$ .

Soit  $V$  une  $(G, X)$ -variété *connexe*. Son revêtement universel est naturellement muni d'une  $(G, X)$ -structure en composant les cartes par l'application de revêtement. On montre maintenant qu'il existe un  $(G, X)$ -morphisme  $D$  du revêtement universel  $\tilde{V}$  dans  $X$ , qui est essentiellement unique : on l'appelle application développante.

**Proposition I.2.2.** — *Il existe un  $(G, X)$ -morphisme  $D$  de  $\tilde{V}$  dans  $X$ . De plus, tout autre  $(G, X)$ -morphisme de  $\tilde{V}$  dans  $X$  est de la forme  $g \circ D$ , pour un élément  $g \in G$ .*

*Démonstration.* — Fixons un point  $\nu_0 \in \tilde{V}$ . On choisit une carte de la  $(G, X)$ -structure  $\varphi_0 : V_0 \rightarrow X$  autour de  $\nu_0$ . L'application  $D$  recherchée coïncidera avec  $\varphi_0$  sur  $V_0$  et on cherche à la prolonger. On montrera plus précisément : il existe un unique  $(G, X)$ -morphisme  $D$  de  $\tilde{V}$  dans  $X$  qui coïncide avec  $\varphi_0$  sur un voisinage de  $\nu_0$ . Pour simplifier nous supposons qu'il existe une suite de cartes  $(\varphi_i : V_i \rightarrow X)_{i \in I}$  de la  $(G, X)$ -structure telle que l'union des  $V_i$  recouvre  $\tilde{V}$  et  $V_i$  rencontre toujours  $V_{i+1}$ .

On commence par isoler le lemme suivant, qui met en évidence l'utilité de l'hypothèse d'analyticité :

**Lemme I.2.3.** — *Soit  $W$  une  $(G, X)$ -variété connexe. Deux  $(G, X)$ -morphisms  $\varphi, \varphi'$  à valeurs dans  $X$  qui coïncident sur un ouvert non vide coïncident sur tout  $W$ .*

*Démonstration.* — On considère l'ensemble des  $w \in W$  pour lesquels  $\varphi$  et  $\varphi'$  coïncident sur un voisinage de  $w$ . C'est un ensemble non-vide, ouvert par construction. Il reste à voir qu'il est fermé. Pour ça, soit  $w$



un point dans l'adhérence. Lisons  $\varphi$  et  $\varphi'$  dans une carte autour de  $w$ . Ils sont chacun donnés par un élément  $g$  et  $g'$  de  $G$ , par définition de  $(G, X)$ -morphisme. De plus,  $g$  et  $g'$  coïncident sur un ouvert inclus dans la carte, par hypothèse sur  $w$ . L'analyticité de l'action de  $G$  garantit que  $g = g'$ , c'est-à-dire que  $\varphi$  et  $\varphi'$  coïncident au voisinage de  $w$ .  $\square$

On prolonge alors  $\varphi_0$  de la manière suivante : considérons la suite de cartes  $(\varphi_i : V_i \rightarrow X)_{i \in I}$  de la  $(G, X)$ -structure telle que l'union des  $V_i$  recouvre  $\tilde{V}$  et  $V_i$  rencontre toujours  $V_{i+1}$ . Par définition de  $(G, X)$ -structure, il existe pour tout  $i \neq 0$  un élément  $g_i$  tel que  $\varphi_{i-1} = g_i \circ \varphi_i$ . Pour tout  $v \in V_i$ , on pose

$$D(v) = g_1 \circ \dots \circ g_i(\varphi_i(v)).$$

Cette application est bien définie : si  $v \in V_i \cap V_{i'}$ , alors par construction on a

$$g_{i+1} \circ \dots \circ g_{i'}(\varphi_{i'}(v)) = \varphi_i(v).$$

C'est bien sûr un  $(G, X)$ -morphisme. L'unicité du prolongement est enfin donnée par le lemme.

Le lemme permet aussi de montrer la deuxième partie de la proposition. Si  $D$  et  $D'$  sont deux  $(G, X)$ -morphisms, il existe un élément  $g \in G$  tel qu'au voisinage de  $v_0$ , on a  $D' = g \circ D$ . Ainsi, d'après le lemme,  $D' = g \circ D$  sur  $\tilde{V}$  tout entier.  $\square$

### I.2.2. Morphisme d'holonomie

On fixe toujours une  $(G, X)$ -variété connexe et on choisit un point base  $v \in V$ . Notons  $\Gamma = \pi_1(V, v)$ . Ce groupe agit sur le revêtement universel  $\tilde{V}$ . On fixe une application développante  $D$  de la  $(G, X)$ -structure. La proposition suivante définit le *morphisme d'holonomie* associé :

**Proposition I.2.4.** — *Il existe un unique morphisme  $h : \Gamma \rightarrow G$  tel que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , on a*

$$D \circ \gamma = h(\gamma) \circ D.$$

*Démonstration.* — Pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $D \circ \gamma$  est un  $(G, X)$ -morphisme de  $\tilde{V}$  vers  $X$ . D'après la proposition précédente, il existe un élément de  $G$ , qu'on note  $h(\gamma)$  tel que  $D \circ \gamma = h(\gamma) \circ D$ . On vérifie facilement que  $h$  est bien un morphisme de groupes.  $\square$

Pour les notions d'application développante et de morphisme d'holonomie, on fait des choix. Remarquons que si on change l'application

développante  $D$  en  $g \circ D$ , alors on conjugue le morphisme d'holonomie :  $h(\gamma)$  devient  $g \circ h(\gamma) \circ g^{-1}$ .

### I.3. Fibrés à $(G, X)$ -connexion plate

Le but de cette section est de donner une autre vision de la notion de  $(G, X)$ -structure, plus globale, que le couple développante/holonomie. On va montrer que la donnée d'une  $(G, X)$ -structure sur une variété  $V$  est équivalente à celle d'un fibré sur  $V$ , de fibre  $X$ , équipé d'une section et d'une connexion plate transverses. Cette vision sera très utile pour comprendre les déformations de  $(G, X)$ -structures. Dans toute cette section,  $V$  est une  $(G, X)$ -variété connexe.

#### I.3.1. De la développante au fibré

On fixe une développante  $D$  et l'holonomie associée  $h$ . Le groupe fondamental  $\Gamma$  agit sur le produit  $\tilde{V} \times X$  par la formule naturelle  $\gamma.(\tilde{v}, x) = (\gamma\tilde{v}, h(\gamma)x)$ . Cette action est libre et proprement discontinue (car elle l'est sur  $\tilde{V}$ ). Ainsi on peut former le quotient, qui est une variété  $E$ , notée aussi  $V \times_h X$ . Cette opération s'appelle l'opération de suspension d'Haefliger. On dispose d'une projection naturelle  $\pi : \tilde{V} \times X \rightarrow V$  qui consiste à oublier le deuxième facteur et à projeter le facteur  $\tilde{V}$  sur  $V$ . Cette application passe au quotient en une submersion globale

$$\pi : E \rightarrow V.$$

qui est une fibration (exercice facile).

Ce fibré ne vient pas tout seul : on a quotienté une structure produit par une application localement constante dans les fibres : on sait toujours se déplacer localement « horizontalement » dans  $E$ . Plus précisément, le champ de plan  $\{x = \text{constante}\}$  est  $\Gamma$ -invariant et transverse aux fibres, donc passe au quotient en une *connexion*  $\xi$ .

Remarquons qu'on n'a pas encore exploité la développante. En effet, le graphe de  $D$  donne une sous-variété de  $\tilde{V} \times X$  globalement  $\Gamma$ -invariante. En passant au quotient, on obtient une section du fibré :

$$s : \begin{cases} V & \rightarrow & E \\ v & \mapsto & [(\tilde{v}, D(\tilde{v}))]. \end{cases}$$

La remarque finale, importante, est que  $D$  est un difféomorphisme local. On le traduit par le fait que la section  $s$  est partout transverse au champ de plans  $\xi$ .

Conclusion de cette discussion : à partir d'une  $(G, X)$ -structure avec un couple développante/holonomie, on a construit un triplet  $(\pi : E \rightarrow V, \xi, s)$ , où  $E$  est un fibré en  $X$  sur  $V$ ,  $s$  est une section et  $\xi$  une connexion, avec  $s$  et  $\xi$  transverses (voir figure 2).

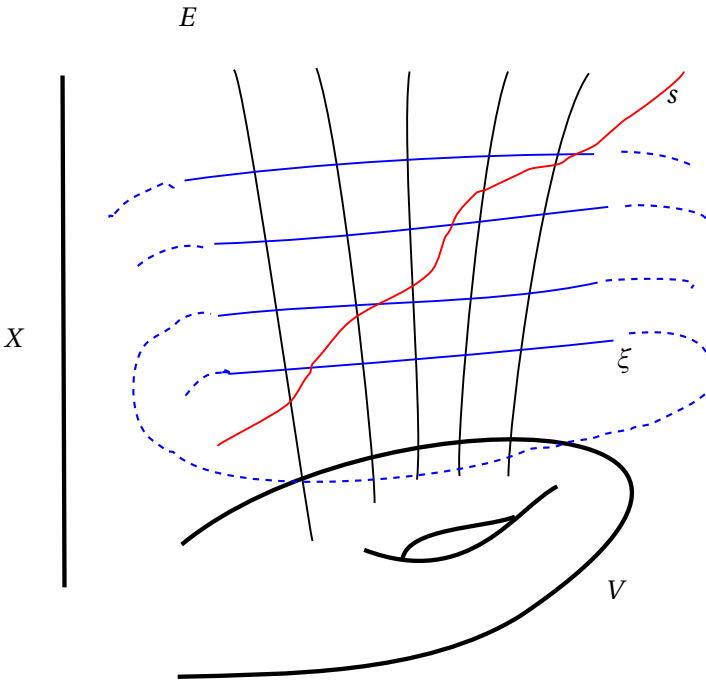


FIGURE 2. Construction du  $(G, X)$ -fibré à connexion plate  $E$

### I.3.2. Équivalence de fibré

On isole ici la notion d'équivalence de fibré à connexion, qui permet de refléter la dépendance de la construction précédente par rapport au choix  $D/h$ .

**Définition I.3.1.** — Deux fibrés en  $X$  sur  $V$ ,  $\pi : E \rightarrow V$  et  $\pi' : E' \rightarrow V$ , sont *isomorphes* si et seulement s'il existe un difféomorphisme  $f : E \rightarrow E'$  tel que  $\pi' \circ f = \pi$ .

Considérons donc le triplet  $(\pi' : E' \rightarrow V, \xi', s')$  associé à un autre choix  $D'/h'$ . On a vu qu'il existe un élément  $g \in G$  tel que  $D' = g \circ D$  et  $h' = g h g^{-1}$ . On vérifie alors facilement que le difféomorphisme

$$\begin{aligned} \tilde{V} \times X &\rightarrow \tilde{V} \times X \\ (\tilde{v}, x) &\mapsto (\tilde{v}, g.x) \end{aligned}$$

est  $\Gamma$ -équivariant et descend en un isomorphisme  $f$  des fibrés  $\pi : E \rightarrow V$  et  $\pi' : E' \rightarrow V$ . Cet isomorphisme vérifie de plus que  $f_*(\xi') = \xi$  et  $s' = f \circ s$ .

Dans ces conditions, on dit que les deux triplets  $(\pi : E \rightarrow V, \xi, s)$  et  $(\pi' : E' \rightarrow V, \xi', s')$  sont équivalents. On a donc une application naturelle de l'espace des  $(G, X)$ -structures sur  $V$  vers l'espace des triplets  $(\pi : E \rightarrow V, \xi, s)$  modulo équivalence.

### I.3.3. Du fibré à la $(G, X)$ -structure

Il reste à fermer la boucle : reconstruire une  $(G, X)$ -structure à partir d'un triplet  $(\pi : E \rightarrow V, \xi, s)$ . Nous ne faisons que survoler cette partie. Commençons par construire une développante. Pour ça fixons une fibre, isomorphe à  $X$ . Tout chemin dans  $V$  se relève grâce à la section  $s$  en un chemin dans  $E$ . Enfin, en suivant la connexion  $\xi$ , on ramène chaque point du chemin dans la fibre fixée (voir figure 3) : ça donne la développante. Les propriétés de transversalité assurent que c'est bien un difféomorphisme local.

Pour l'holonomie, c'est un peu plus délicat : on remarque que ça ne dépend pas de la section, mais seulement de la connexion  $\xi$ . En revanche, on verra que pour être sûr de reconstruire une  $(G, X)$ -structure, il faudra imposer une condition de compatibilité à l'action de  $G$ , dite de *platitude* pour  $\xi$ . Explicitons cela.

Considérons un chemin  $c$  dans  $V$  reliant deux points  $v$  et  $v'$ . À partir de chaque point  $[(\tilde{v}, x)]$  au-dessus de  $v$ , il existe un unique chemin  $\bar{c}$  parallèle à  $\xi$  et relevant  $c$ . Cette construction donne un difféomorphisme entre les fibres  $X_v$  et  $X_{v'}$ . Appliqué à un lacet  $\gamma \in \Gamma$  basé en  $v_0$ , on obtient un difféomorphisme  $h(\gamma)$  de  $X_{v_0}$  (voir figure 4). Cependant, à ce stade, il n'y a aucune raison pour que  $h(\gamma)$  soit un élément de  $G$ . Si  $\xi$  vérifie cette dernière propriété, on qualifie le triplet, en suivant Ehresmann, de  $(G, X)$ -connexion :

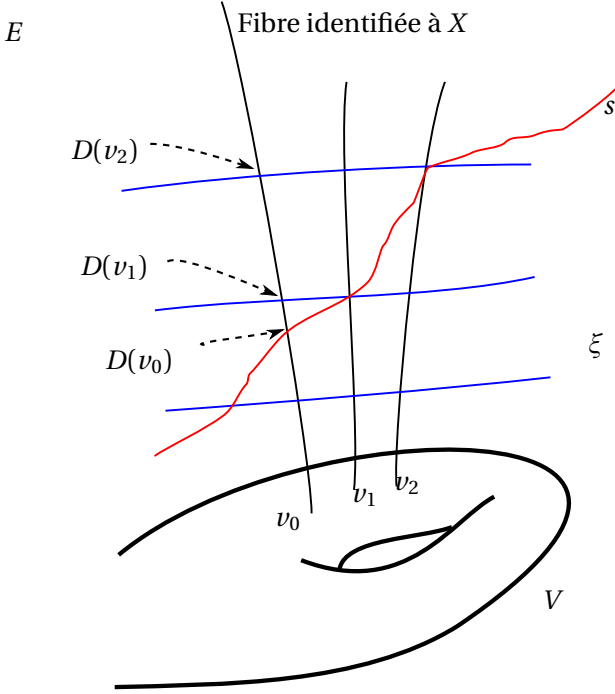


FIGURE 3. Construction de la développante à partir du fibré

**Définition I.3.2.** — Une  $(G, X)$ -connexion sur  $V$  est la donnée d'une classe d'équivalence de triplet  $(\pi : E \rightarrow V, \xi, s)$  telle que l'holonomie de toute courbe fermée est induite par un élément de  $G$ .

On dit de plus que la  $(G, X)$ -connexion est plate si  $\xi$  est localement triviale (i.e. localement équivalente à la connexion horizontale triviale).

Évidemment, dans la construction du triplet à partir de la développante, on a construit une  $(G, X)$ -connexion plate. De plus, la platitude assure que la construction de  $h(\gamma)$  ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin.

On peut conclure notre aller-retour sur la proposition suivante :

**Proposition I.3.3.** — La donnée d'une  $(G, X)$ -structure sur  $V$  est équivalente à celle d'une classe d'équivalence de  $(G, X)$ -connexion plate.

*Démonstration.* — Le sens direct a été vu en détail.

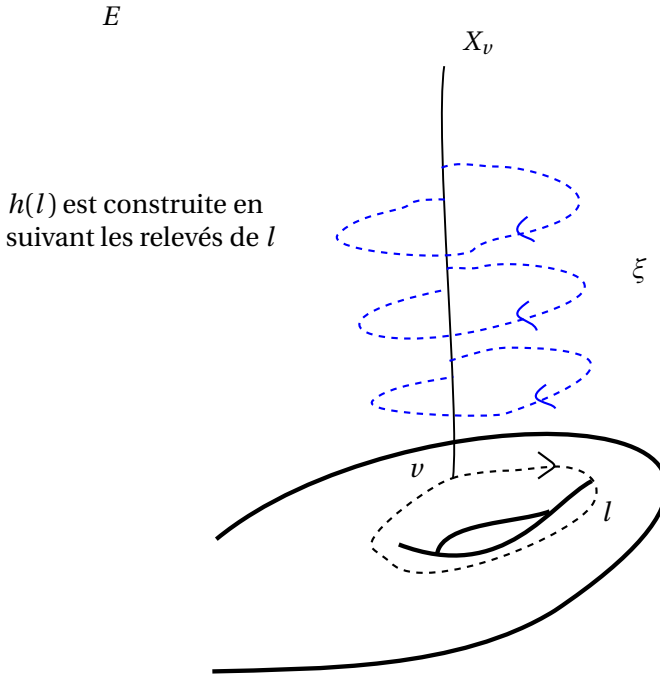


FIGURE 4. Construction de l'holonomie à partir du fibré

Pour le sens réciproque, la platitude permet d'écrire des trivialisations au-dessus de petits ouverts  $U \subset V$  :  $E_U \simeq U \times X$  et  $\xi = (U \times x)$ . La section  $s_U$ , lue dans la trivialisations, donne la carte sur  $U$ . De plus, les changements de cartes sont des holonomies de chemins fermés, donc sont donnés par des éléments de  $G$ .  $\square$

On laisse le lecteur se familiariser avec ces notions, en explicitant par exemple ces constructions dans le cas du cercle  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , vue comme  $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ -variété.

#### I.4. Principe d'Ehresmann-Thurston

Cette vision fibrée a le gros avantage de se prêter à des déformations et permet de montrer le principe d'Ehresmann-Thurston : si une représentation  $\Gamma \rightarrow G$  est l'holonomie d'une  $(G, X)$ -structure, il en est de même

pour toute représentation suffisamment proche. Commençons par définir l'espace des représentations et sa topologie, qui feront partie des objets centraux de ce cours.

Soit  $V$  une  $(G, X)$ -variété compacte,  $\Gamma$  son groupe fondamental. On définit l'espace des représentations

$$\mathcal{R}(\Gamma, G) = \{\text{morphisms } h : \Gamma \rightarrow G\},$$

muni de la topologie de la convergence simple. On peut en définir une base d'ouverts :  $\Gamma$  est de type fini, notons  $\Sigma$  une partie génératrice finie. Soit  $U$  un voisinage ouvert de  $e \in G$ . Deux représentations  $h_1$  et  $h_2$  dans  $\mathcal{R}(\Gamma, G)$  sont dites  $U$ -proches si pour tout  $\gamma \in \Sigma$ , on a  $h_1(\gamma) \in h_2(\gamma) \cdot U$ .

Plus que cette notion de proximité, nous utiliserons le notion de déformation d'une représentation en une autre :

**Définition I.4.1.** — Soit  $h_0 \in \mathcal{R}(\Gamma, G)$  et  $U$  un voisinage ouvert de  $e \in G$ . Une *déformation*  $U$ -proche de  $h_0$  est une représentation  $h_1 \in \mathcal{R}(\Gamma, G)$  tel qu'il existe un *chemin de déformation* joignant  $h_0$  à  $h_1$  et restant toujours  $U$ -proche de  $h_0$ .

On peut alors énoncer le *principe d'Ehresmann-Thurston* qui permet effectivement de déformer des  $(G, X)$ -structures.

**Théorème I.4.2.** — Soit  $h_0 \in \mathcal{R}(\Gamma, G)$  un morphisme d'holonomie d'une  $(G, X)$ -structure sur une variété compacte  $V$ . Il existe alors un voisinage  $U$  de  $e \in G$  tel que toute déformation  $h_1$   $U$ -proche de  $h_0$  soit un morphisme d'holonomie d'une  $(G, X)$ -structure.

Avant de donner la preuve, mentionnons que des variantes ou cas particuliers de ce théorème ont été démontrées plusieurs fois dans le courant de XXème siècle, par exemple par Poincaré, Weil, Thurston. Les démonstrations n'étaient pas toujours très claires (espérons que la nôtre le soit !). Le cadre des  $(G, X)$ -fibrés semble le bon pour la mettre bien en place.

*Démonstration.* — L'idée est que si  $h$  est une petite déformation de  $h_0$ , les fibrés  $E_{h_0} = \tilde{V} \times_{h_0} X$  et  $E_h = \tilde{V} \times_h X$  sont suffisamment proches pour qu'on conserve les propriétés de transversalité de leurs connexion et section. On note  $\xi_0$  et  $\xi$  les connexions naturelles respectives, qui sont par construction plates et avec des holonomies de chemin dans  $G$ . Il ne reste

qu'à construire une section de  $E_h$  transverse à  $\xi$ . Comme  $h_0$  est l'holonomie d'une  $(G, X)$ -structure, on dispose d'une section  $s_0$  transverse à  $\xi_0$ .

Nous utilisons maintenant le fait que  $h$  est une *déformation* de  $h_0$  pour montrer que :

**Lemme I.4.3.** — *Les fibrés  $E_{h_0} \rightarrow V$  et  $E_h \rightarrow V$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* — On note  $h_t$  un chemin de déformation de  $h_0$  à  $h_1 = h$ . On obtient donc un fibré en  $X$  :

$$\mathcal{E} \rightarrow V \times [0, 1].$$

La projection de  $\mathcal{E}$  sur  $[0; 1]$  est une submersion. Le théorème de fibration d'Ehresmann implique que cette projection est une fibration et qu'en particulier les fibres au-dessus de 0 et 1 sont isomorphes. Ce sont exactement les deux fibrés  $E_{h_0}$  et  $E_h$ .  $\square$

On remarque de plus que le difféomorphisme obtenu dépend continûment (pour la topologie  $C^\infty$ ) de  $h$  et du chemin de déformation. De plus, la connexion  $\xi$  dépend continûment de  $h$  et de sa déformation, au sens où  $f^*\xi$  est proche de  $\xi_0$ .

On peut conclure la preuve du théorème. Soit  $f$  l'isomorphisme ainsi construit entre  $E_{h_0}$  et  $E_h$ . On construit alors la section  $s = f \circ s_0$ . La dépendance continue de  $s$  et  $\xi$  en la déformation, associée au fait que  $s_0$  et  $\xi_0$  sont transverses, implique que pour des déformations suffisamment petites,  $s$  est transverse à  $\xi$ . Remarquons que c'est pour ce dernier point qu'on utilise la compacité de  $V$ .  $\square$

## I.5. Complétude

Nous concluons cette présentation abstraite des  $(G, X)$ -structures en nous penchant sur la notion cruciale de *complétude* d'une  $(G, X)$ -structure. En effet, un exemple naturel (voir TD) de  $(G, X)$ -structure est un quotient  $\Gamma \backslash X$ , où  $\Gamma$  est un réseau sans torsion de  $G$ . Dans ce cas, la développante est un revêtement de  $X$ . Mais il n'y a aucune raison que ce soit le cas en général (voir TD), et on en verra de nombreux exemples dans le cadre des  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structures. Ces « jolies » structures méritent une définition !



**Définition I.5.1.** — Une  $(G, X)$ -structure est dite *complète* si son application développante est un revêtement de  $X$ .

On peut remarquer que si  $X$  est simplement connexe (ce qui est le cas dans tous les exemples que nous traiterons), l'application développante devient alors un difféomorphisme, ce qui implique que le morphisme d'holonomie est injectif et discret. Si on identifie le groupe fondamental  $\Gamma$  avec son image dans  $G$ , on obtient donc que  $V$  est bien le quotient  $\Gamma \backslash X$ . Et réciproquement si  $\Gamma$  est un sous groupe discret sans torsion de  $G$ ,  $V = \Gamma \backslash X$  est une  $(G, X)$ -variété complète.

La notion de complétude peut être délicate à manipuler, y compris quand  $V$  est compacte. Mentionnons cependant un résultat important, qui sera prouvé en TD :

**Proposition I.5.2.** — Si  $X$  est muni d'une métrique riemannienne  $G$ -invariante, et que  $V$  est compacte, alors toute  $(G, X)$ -structure sur  $V$  est complète.

Un cadre très naturel dans lequel  $X$  est muni d'une métrique  $G$ -invariante est celui des quotients  $G/K$  où  $K$  est un sous-groupe compact. C'est le cas notamment des espaces hyperboliques. Nous construisons maintenant ces exemples qui sont en grande partie à l'origine de la théorie que nous venons d'exposer.

## I.6. Variétés hyperboliques

Nous décrivons ici les différents modèles de la géométrie hyperbolique réelle, et la classification de leurs isométries.

### I.6.1. Différents modèles

Le modèle de base est celui de l'hyperboloïde, où le groupe  $O^+(n, 1)$  apparaît naturellement. On considère la forme quadratique

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2,$$

et la nappe supérieure de l'hyperboloïde (voir figure 5)

$$X = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tels que } q(x) = -1 \text{ et } x_{n+1} > 0\}.$$

Le groupe  $G = O^+(n, 1)$  est défini comme le sous-groupe (d'indice 2) de  $O(n, 1)$  qui préserve  $X$ . Il agit transitivement sur  $X$ , et le stabilisateur

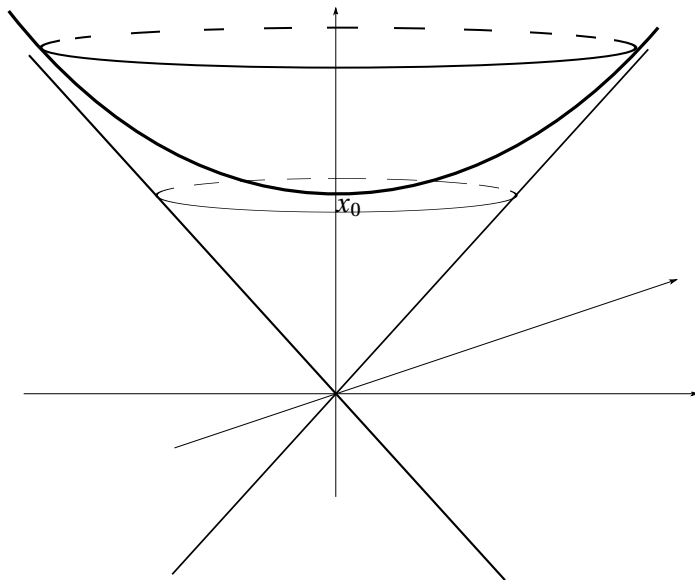


FIGURE 5. La nappe supérieure de l'hyperboloïde

du point  $x_0 = (0, \dots, 0, 1)$  est naturellement isomorphe à  $O(n)$ . On munit de plus  $X$  d'une métrique  $G$ -invariante. Soit  $b$  la forme bilinéaire associée à  $q$ . L'espace tangent  $T_x X$  en un point  $x$  à  $X$  s'identifie à l'orthogonal de  $x$  pour  $b$ . On voit alors que la restriction de  $b$  à  $T_x X$  est un produit scalaire. Cette métrique munit  $X$  d'une distance  $d$  : la distance hyperbolique.

**Définition 1.6.1.** — On appelle sous-espace de  $X$  une intersection non vide  $X \cap F$  où  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Cela permet de définir la notion de droite (l'intersection non vide  $d_P$  de  $X$  avec un plan vectoriel  $P$ ), d'hyperplan (l'intersection non vide  $L_y$  de  $X$  avec un hyperplan  $H_y = y^\perp$ )...

On peut déjà décrire la géométrie de  $X$  :

- Proposition 1.6.2.** —
1. Les droites de  $X$  sont les géodésiques de la métrique.
  2. Une droite  $d_P$  et un hyperplan  $L_y$  sont orthogonaux si et seulement si  $y \in P$ .

3. Si  $x, x' \in X$  et si  $L_y$  est un hyperplan, on a les formules :

$$-b(x, x') = \cosh(d(x, x')) \text{ et } |b(x, y)| = \sinh(d(x, L_y)).$$

4. Si  $x$  et  $x'$  sont deux points distincts de  $X$ , l'ensemble des points de  $X$  équidistants de  $x$  et  $x'$  est un hyperplan de  $X$ , appelé hyperplan médiateur.

*Démonstration.* — 1. Soit  $c$  la géodésique issue de  $x$  à vitesse  $v \in T_x X \setminus \{0\}$ . Par unicité, elle est invariante par tout élément  $g \in G$  préservant  $x$  et  $v$ . Donc,  $c$  doit être incluse dans le plan  $P$  engendré par  $x$  et  $v$ . La réciproque est évidente : tout couple de point de  $X$  définit un unique plan, qui doit donc être géodésique.

2. Considérons  $g$  la symétrie orthogonale par rapport à  $L_y$ . C'est l'élément de  $O(n, 1)$  qui envoie  $y$  sur  $-y$  et qui est l'identité sur  $y^\perp$ . La droite  $d_P$  (non-incluse dans  $L_y$ ) est orthogonale à  $L_y$  si et seulement si  $g(d_P) = d_P$ . Donc  $g$  doit préserver le plan  $P$  qui n'est pas inclus dans  $y^\perp$ . Ça implique que  $y \in P$ .

3.  $x_t = (0, \dots, 0, \sinh(t), \cosh(t))$  est une paramétrisation à vitesse 1 de la géodésique issue de  $x_0$  dans la direction  $v = (0, \dots, 0, 1, 0)$ . Donc on a bien,  $b(x_0, x_t) = -\cosh(d(x_0, x_t))$ . Pour conclure sur la formule générale, on utilise que  $G$  agit transitivement sur les couples de points à même distance (exercice !).

4. C'est une conséquence du deuxième point.

□

Mentionnons les autres modèles disponibles.

*I.6.1.i. Le modèle projectif B.* — Il s'agit de la projectivisation du précédent : on considère

$$\begin{cases} X & \rightarrow B = \{(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \mid v_1^2 + \dots + v_n^2 < 1\} \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) & \mapsto \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right). \end{cases}$$

Les géodésiques sont les droites (voir figure 6).

*I.6.1.ii. L'hémisphère nord  $\mathbf{S}^+$ .* — Il est obtenu à partir de  $B$  par projection verticale (voir figure 7).

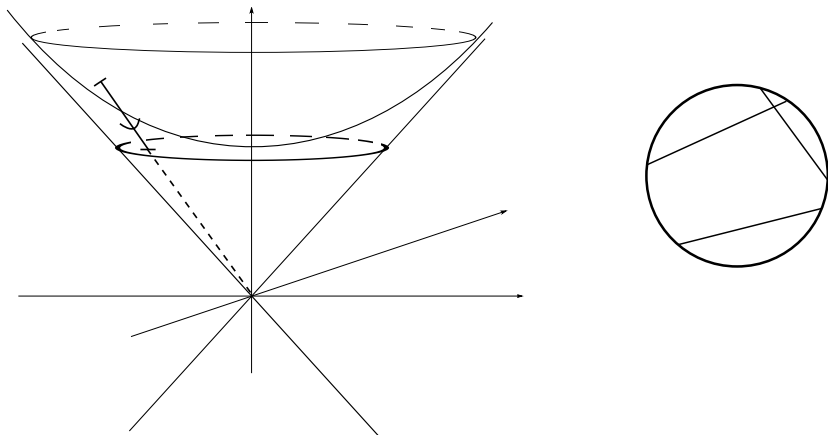


FIGURE 6. Le modèle projectif

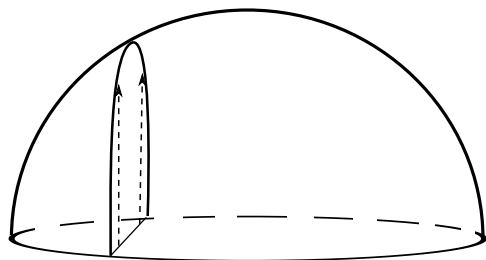


FIGURE 7. L'hémisphère

*I.6.1.iii. Le disque  $\mathbb{D}^n$ .* — Il est obtenu à partir de  $\mathbf{S}^+$  par projection stéréographique depuis le pôle sud (voir figure 8). Les géodésiques sont les arcs de cercles orthogonaux au bord<sup>(3)</sup>.

Dans ce modèle la métrique riemannienne hyperbolique est conforme à la métrique euclidienne (les angles s'y mesurent comme les angles euclidiens). En effet, la formule suivante pour la métrique (exercice) montre qu'elle est en chaque point proportionnelle à la métrique euclidienne :

$$\frac{2\sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}}{1 - \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}$$

3. qui se coupent en au plus 1 point!

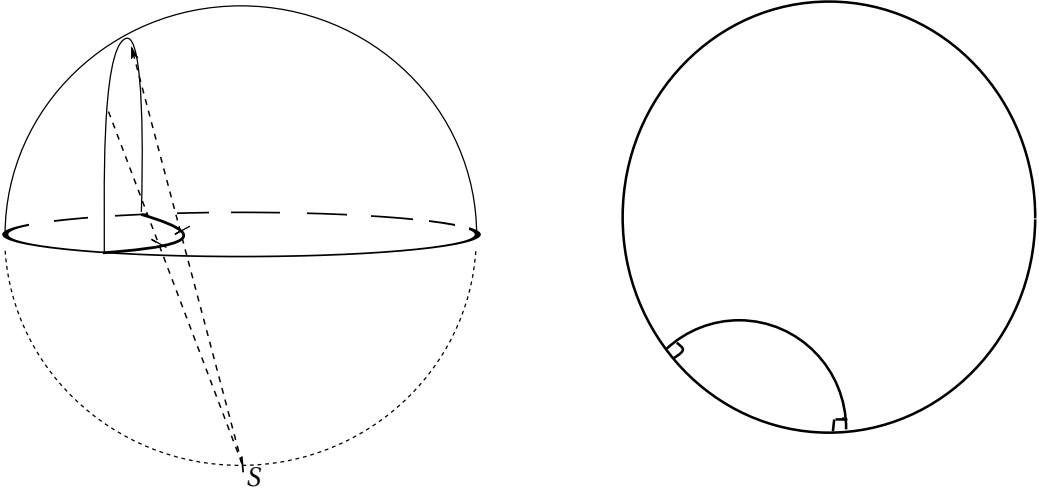


FIGURE 8. Le disque

*I.6.1.iv. Le demi-espace.* — Il s'obtient à nouveau à partir de  $\mathbf{S}^+$ , cette fois par une inversion à partir d'un point quelconque de l'équateur (cf figure 9). L'image de cette inversion est un demi-espace  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{>0}$ . Les

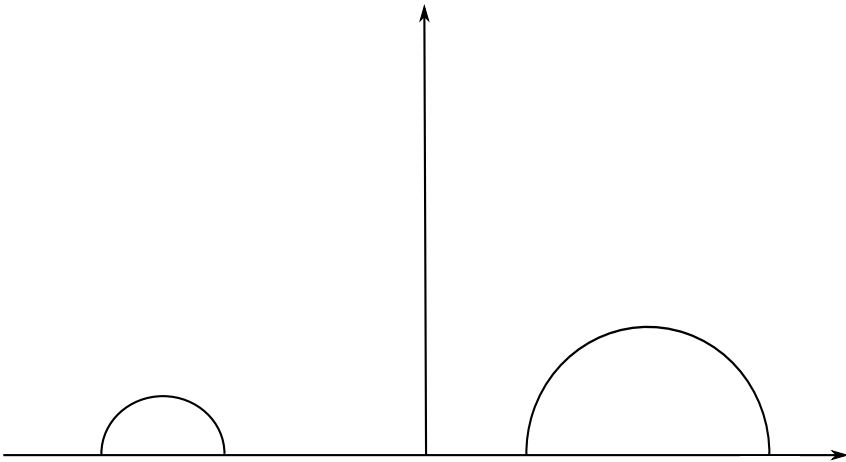


FIGURE 9. Le demi-espace

géodésiques sont les demi-droites verticales ou les arcs de cercles orthogonaux au plan horizontal. La métrique riemannienne est à nouveau

conforme à la métrique euclidienne, elle s'écrit :

$$\frac{\sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}}{x_n}.$$

*I.6.1.v. Isomorphismes exceptionnels.* — Quand  $n = 2$ , l'équivalence des modèles de l'hyperboloïde, du demi-plan (sur lequel agit  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$  par homographie) et du disque (sur lequel agit  $\mathrm{PU}(1, 1)$  par homographie) se traduit par les isomorphismes entre groupes de Lie :

$$\mathrm{SO}^+(2, 1) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{PU}(1, 1).$$

De même pour  $n = 3$ , on a  $\mathrm{SO}^+(3, 1) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ .

## I.7. Classification des isométries

Nous exploitons l'algèbre linéaire pour classifier les isométries hyperboliques. En effet,  $O(n, 1)$  étant un groupe algébrique sur  $\mathbb{R}$ , la décomposition de Jordan nous permet d'écrire tout élément de  $O(n, 1)$  de manière unique comme un produit commutatif  $g_s g_u = g_u g_s$  où  $g_s$  est *semi-simple*, i.e. diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ , et  $g_u$  est *unipotent*, i.e. il existe un entier  $k$  tel  $(g_u - \mathrm{Id})^k = 0$ . De plus l'ensemble des éléments unipotents de  $O(n, 1)$  est inclus dans  $O^+(n, 1)^{(4)}$ , donc en partant de  $g \in O^+(n, 1)$ , l'élément  $g_s$  est encore dans  $O^+(n, 1)$ .

Pour rester sur  $\mathbb{R}$ , on décompose chaque valeur propre de  $g_s$  sous la forme  $re^{i\theta}$  :  $g_s = g_h g_e = g_e g_h$  où  $g_h$  est dite *hyperbolique* (semi-simple à valeurs propres dans  $\mathbb{R}_{>0}$ ) et  $g_e$  *elliptique* (semi-simple à valeurs propres de module 1).

Tous les éléments  $g_u, g_h, g_e$  sont déterminés par  $g$  et si  $g \in O^+(n, 1)$  ils sont tous dans  $O^+(n, 1)$ . Forts de cette décomposition algébrique, nous pouvons la traduire en termes géométriques (voir figure 10) :

**Proposition I.7.1.** — *Un élément  $g$  de  $O^+(n, 1)$  est de l'une des trois formes suivantes :*

1.  *$g$  est loxodromique, c'est-à-dire  $g = g_h g_e$  avec  $g_h \neq \mathrm{Id}$ . Il réalise un vissage le long d'une droite de  $X$  et a deux points fixes dans  $\partial X$ , l'un attracteur et l'autre répulseur. Dans ce cas, on a  $\inf_{x \in X} d(x, g(x)) > 0$ .*

4. En effet, il est connexe.

2.  $g$  est parabolique, c'est-à-dire  $g = g_e g_u$  avec  $g_u \neq \text{Id}$ . On a un point fixe dans  $\partial X$  mais pas dans  $X$  et  $\inf_{x \in X} d(x, g(x)) = 0$
3.  $g$  est elliptique, c'est-à-dire  $g = g_e$ . Il y a au moins un point fixe dans  $X$ .

*Démonstration.* — Commençons par deux lemmes :

**Lemme I.7.2.** —  $g_e$  est conjugué dans  $G$  à un élément de  $O(n)$ .

*Démonstration.* — Il suffit de montrer que  $g_e$  fixe un point. Or  $g_e$  est inclus dans un sous-groupe compact commutatif de  $G$  (toutes ses valeurs propres sont de module 1). Votre théorème de point fixe préféré appliqué à l'action de ce groupe sur le modèle de la boule implique que  $g_e$  y a un point fixe : choisissons un point  $x$  dans le disque et considérons l'enveloppe convexe de son orbite sous  $g_e$  (enveloppe convexe au sens de la géométrie affine sur la boule). C'est un compact.

Alors les sommes de Césaro  $\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} g_e^k x$  convergent vers un point de la boule, fixe sous  $g_e$ . □

**Lemme I.7.3.** —  $g_h \neq \text{Id}$  a une unique valeur propre  $> 1$ , de multiplicité 1.

*Démonstration.* — Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux valeurs propres avec  $\lambda\mu \neq 1$ , alors  $V_\lambda$  et  $V_\mu$  sont orthogonaux pour  $q$ . Ça implique notamment que si  $\lambda > 1$ ,  $V_\lambda$  est isotrope. Or  $q$  est de signature  $(n, 1)$ , donc la dimension maximale d'un espace isotrope est 1. L'existence de deux valeurs propres  $> 1$   $\lambda \neq \mu$  implique à son tour que le plan  $V_\lambda + V_\mu$  est isotrope, ce qui est absurde. □

L'élément  $g_e$  induit une décomposition orthogonale (pour  $q$ ) de  $\mathbb{R}_{n+1}$  en  $W \oplus W^1 \oplus W^{-1}$  où  $W^\varepsilon$  est l'espace propre pour la valeur propre  $\varepsilon$ . Sur  $W$ ,  $g_e$  se décompose par blocs  $2 \times 2$  de matrices de rotation. Comme  $g_u$  et  $g_h$  commutent à  $g_e$ , ils préservent cette décomposition et  $g_u$  agit trivialement sur  $W$ . De plus, la restriction de  $g_h$  à chaque plan sur lequel  $g_e$  agit par une rotation d'angle  $\neq 0$  ou  $\pi$  doit être une homothétie. Le second lemme implique que  $g_h$  restreinte à  $W$  est l'identité.

Il reste à montrer que sur  $W^+ \oplus W^-$ , on ne peut avoir à la fois  $g_h$  et  $g_u$  différent de l'identité.

Si  $g_h \neq \text{Id}$ , alors d'après le deuxième lemme,  $g_h$  est conjugué à

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \cosh(t) & \sinh(t) & \\ & & & \sinh(t) & \cosh(t) & \end{pmatrix}.$$

Par commutation,  $g_u$  doit donc avoir la même décomposition, c'est-à-dire appartenir au produit  $O(n-1) \times O^+(1, 1)$ . Comme il est de plus unipotent, on obtient bien  $g_u = 1$ . De plus, pour que  $g_e$  soit dans  $O^+(n, 1)$ , il faut que  $W^-$  soit inclus dans le sous-espace fixe pour  $g_h$ . Dans ce cas, on obtient bien la description annoncée : après conjugaison,  $g$  est la translation de longueur  $t$  le long de la géodésique  $(0, \dots, 0, \sinh(t), \cosh(t))$  plus une rotation dans son hyperplan orthogonal.

Il reste le cas  $g_h = \text{Id}$ , mais pas  $g_u$ . Il nous faut comprendre les éléments unipotents de  $O^+(n, 1)$ . Notons  $g_u = e^A$ ,  $A$  dans l'algèbre de Lie de  $G$ . Cette dernière condition se traduit par  $b(v, Aw) = -b(Av, w)$  pour tout couple  $(v, w)$ . En particulier, pour tout entier  $p$ ,  $\text{im}(A^p)$  et  $\text{ker}(A^p)$  sont orthogonaux. Autrement dit leur intersection est isotrope, donc de dimension  $\leq 1$ . D'autre part  $A$  se décompose par blocs de Jordan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Pour un tel bloc de taille  $r$ , si  $r > 3$ , la dimension de  $\text{im}(A^2) \cap \text{ker}(A^2)$  est 2. Donc la taille de chaque bloc est 2 ou 3. Enfin, il ne peut y avoir qu'un seul bloc non nul sinon la dimension de  $\text{im}(A) \cap \text{ker}(A)$  est  $> 1$ . Montrons par l'absurde que le bloc non nul ne peut avoir une taille 2 :  $\text{im}(A)$  est orthogonal à  $\text{ker}(A)$ . De plus, si  $v \notin \text{ker}(A)$ , alors  $b(Av, v) = -b(v, Av)$ , donc  $b(Av, v) = 0$ . Or  $Av$  est non nul, donc si  $\text{im}(A)$  est de dimension 1,  $v$  est orthogonal à  $\text{im}(A)$ . Donc l'orthogonal de  $\text{im}(A)$  serait tout  $\mathbb{R}^{n+1}$ , ce qui est absurde.





3. Les relevés à  $X$  de deux géodésiques distinctes ont des extrémités distinctes.

*Démonstration.* — 1. Le caractère discret sans-torsion de  $\Gamma$  exclut immédiatement les éléments elliptiques. Si un élément  $\gamma$  était parabolique, on aurait  $\inf_{x \in X} d(x, \gamma x) = 0$ . Donc on aurait des courbes fermées non triviales (projection de la géodésique reliant un point  $x$  à  $\gamma x$ ) arbitrairement courtes. C'est impossible.

2. Une courbe fermée simple correspond à un élément  $\gamma \in \Gamma$ . Cet élément est loxodromique, donc a un axe (l'unique géodésique reliant les deux points fixes sur  $\partial X$ ). La projection de cet axe est une géodésique fermée dans la classe du chemin de départ.
3. Deux géodésiques de  $X$  qui ont une extrémité commune se rapprochent indéfiniment, donc ne peuvent pas être distinctes dans  $X$ .

□

Nous renvoyons au TD pour un traitement plus particulier de la géométrie hyperbolique plane. Nous présentons maintenant le deuxième exemple qui nous intéressera dans ce cours : les  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structures.

## I.8. Structures projectives complexes

### I.8.1. Premiers exemples

On considère dans toute cette section une surface  $S$  compacte orientable sans bord. On appelle  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure ou *structure projective complexe* sur  $S$  une  $(\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}), \mathbb{C}\mathbb{P}^1)$ -structure. Pour une telle structure, une développante est un homéomorphisme local du revêtement universel  $\tilde{S}$  dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  et l'holonomie associée est un morphisme de  $\Gamma = \pi_1(S)$  vers  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ .

On peut donner un premier exemple qui permet de se raccrocher à la section précédente : si  $U$  est un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  et  $\Gamma$  agit librement sur  $U$ , alors on peut former le quotient  $\Gamma \backslash U$ . Par exemple, si  $U = \mathbb{H}$  est le demi-plan hyperbolique et  $\Gamma$  est un sous-groupe discret sans torsion de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ . Autrement dit, les structures hyperboliques sont des exemples de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structures.

En partant d'une surface hyperbolique, on peut appliquer le principe d'Ehresmann-Thurston dans le cadre des  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structures. Alors, après

une petite perturbation, l'ouvert  $\mathbb{H}$  se déforme un en *quasi-disque* (i.e. l'intérieur d'une courbe de Jordan) et la structure n'est plus hyperbolique.

Un autre exemple crucial est donné par les *groupes de Schottky*. Considérons  $2g$  disques  $D_1^-, D_1^+, \dots, D_g^-, D_g^+$  de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  d'adhérences 2 à 2 disjointes. Pour tout  $i = 1 \dots g$ , on considère un élément  $\gamma_i \in \text{PGL}(2, \mathbb{R})$  qui envoie l'intérieur de  $D_i^-$  sur l'extérieur de  $D_i^+$ . Notamment,  $\gamma_i$  est loxodromique et envoie le cercle frontière de  $D_i^-$  sur le cercle frontière de  $D_i^+$  (voir figure 11). On montre dans ce cas (exercice) que le groupe  $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_g \rangle$  est libre. Notons  $\Lambda_\Gamma$  l'ensemble limite de  $\Gamma$ , c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble des points fixes sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  des éléments de  $\Gamma$ . L'action de  $\Gamma$  sur l'ouvert  $\Omega_\Gamma = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \Lambda_\Gamma$  est alors libre et proprement discontinue. Le quotient  $\Gamma \backslash \Omega_\Gamma$  définit une structure projective complexe sur la surface de genre  $g$ .

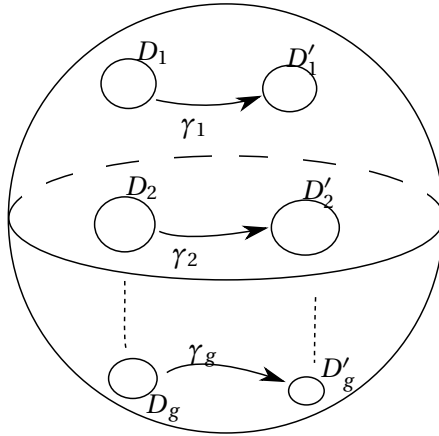


FIGURE 11. Un groupe de Schottky

On peut regarder plus précisément le cas des tores ( $g = 1$ ). Alors, à conjugaison près, le groupe  $\Gamma$  est engendré par une homothétie  $z \mapsto \lambda z$ , avec  $|\lambda| > 1$ . La structure projective sur le tore est donnée par le quotient  $\mathbb{C}^*/\lambda^{\mathbb{Z}}$ .

Dans ces exemples,  $D$  n'est pas un revêtement, et l'application d'holonomie n'est pas injective. C'est en fait forcément le cas :

**Proposition I.8.1.** — *Une surface de genre  $g \geq 1$  ne possède aucune structure projective complète.*

*Démonstration.* —  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  est simplement connexe, donc il faudrait écrire cette surface comme  $\Gamma \backslash \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , avec  $\Gamma$  agissant librement par homographies sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Le seul groupe agissant librement est le groupe trivial, ce qui ne donne pas une surface de genre  $g \geq 1$ .  $\square$

On a vu que les structures hyperboliques sont un exemple de structure projective. Or le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann énonce que toute surface de Riemann de genre  $g \geq 2$  admet une unique structure hyperbolique. On appellera parfois cette structure, vue comme structure projective, la *structure canonique*.

### I.8.2. Classification des $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structures sur les surfaces de Riemann

Quand la surface  $S$  est munie d'une structure de surface de Riemann, on dit qu'une  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure est *compatible* si la développante est une application holomorphe de  $\tilde{S}$  dans  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

*I.8.2.i. Sur la sphère de Riemann.* — Étant donnée une  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure sur la sphère de Riemann  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , l'application développante devient une application  $D : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  holomorphe et un difféomorphisme local. C'est donc une homographie de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ . Il n'y a donc qu'une  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure compatible sur la sphère.

*I.8.2.ii. Sur les courbes elliptiques.* — Soit  $S$  la courbe elliptique  $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ , avec  $\tau \in \mathbb{H}$ . Notons  $\Lambda$  le réseau  $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ . Considérons une  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure compatible sur  $S$ ,  $D : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  une développante et  $h$  le morphisme d'holonomie associé. Le groupe  $h(\Lambda)$  est un sous-groupe abélien de  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ . A conjugaison près, trois cas sont possibles (on écrit les groupes plutôt dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  pour la lisibilité) :

1.  $h(\Lambda) \subset \left\langle \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle$  pour  $a \in \mathbb{C}^*$  (action par homothétie),
2.  $h(\Lambda) \subset \left\langle \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  pour  $t \in \mathbb{C}$  (action par translation sur  $\mathbb{C}$ ),
3. ou  $h(\Lambda) \subset \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$  (action par  $z \mapsto -z$  et  $z \mapsto 1/z$ ).

La structure « standard » donnée par  $S = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  est dans le cas 2. D'autre part, pour tout  $c \in \mathbb{C}^*$ , l'application

$$D_c : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \\ u & \mapsto & \exp(cu) \end{cases}$$

est l'application développante d'une  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure dont l'holonomie est engendrée par les homothéties de rapport  $e^c$  et  $e^{c\tau}$ , qui ressortissent du premier cas. On remarque que toutes ces structures sont en fait affines (l'holonomie est incluse dans le groupe affine). Le théorème suivant indique que ce sont les seules et que seules les courbes elliptiques portent des structures affines.

**Théorème I.8.2 (Gunning).** — *Les structures projectives compatibles sur  $S = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  sont la standard et celles données par  $D_c$  pour  $c \in \mathbb{C}^*$ . Elles sont toutes affines. De plus si une surface porte une structure affine, c'est une courbe elliptique.*

*Démonstration.* — On donne seulement une idée de la preuve de ce que toutes les structures affines sont de cette forme. Soit  $D : U \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  la développante d'une structure projective à holonomie affine. On a déjà vu qu'il n'y a qu'une structure projective sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , donc on suppose que  $S \neq \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . En particulier,  $S$  possède une 1-forme holomorphe  $\omega_0$ .

On peut écrire  $\omega_0 = \varphi dD$ . Comme  $D$  est un homéomorphisme local holomorphe,  $dD$  ne s'annule jamais. Donc  $\varphi$  est holomorphe, et s'annule exactement en les zéros de  $\omega_0$  et les pôles de  $D$ . On construit alors la 1-forme

$$\omega = \frac{d\varphi}{\varphi}.$$

Comme  $\omega_0$  est  $\Lambda$ -invariante, on a  $\varphi(\gamma.u) = a_\gamma^{-1}\varphi(u)$ . Donc  $\omega$  est  $\Lambda$ -invariante et descend en une 1-forme méromorphe sur  $S$ . Elle a ses pôles (d'ordre 1) en les points d'annulation de  $\varphi$  : les pôles de  $\omega_0$  et les zéros de  $D$ . On remarque alors que tous ces pôles sont de résidu +1. D'après le théorème des résidus (la somme des résidus doit être nulle),  $\omega$  n'a pas de pôle. Donc  $D$  n'a pas de pôle : elle est à valeurs dans  $\mathbb{C}$  ; de plus  $\omega_0$  ne s'annule pas, ce qui implique que  $S$  est de genre 1 (voir un cours de surfaces de Riemann).

Montrons maintenant que toutes les structures affines sur le tore sont dans la liste donnée ci-dessus. Notons  $S = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  et  $u$  la variable dans  $\mathbb{C}$ . La 1-forme  $\omega$  définie ci-dessus est holomorphe sur  $S$ , elle est donc proportionnelle à  $du$  :  $\omega = -cd u$ . Autrement dit (calculer en coordonnées), on a :

$$\frac{D''}{D'} = c.$$

En résolvant cette équation différentielle sur  $\mathbb{C}$ , on obtient que la développante  $D$  est  $D_c$  si  $c \neq 0$  ou  $D = \text{Id}$  si  $c = 0$  (correspondant à la structure standard).  $\square$

### I.8.3. La dérivée schwarzienne

En regardant la preuve du théorème précédent, on peut imaginer qu'un point crucial pour l'étude des  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structures est de construire un objet vivant sur la surface : c'est le rôle joué par  $\omega$  (ou  $\frac{D'}{D}$  en coordonnées). Pour les structures affines, l'objet était assez simple : le quotient de la dérivée seconde par la dérivée est invariant par les transformations affines, donc par la monodromie. Pour les  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structures générales, on cherche maintenant un objet invariant par les homographies : *la dérivée schwarzienne*.

**Définition I.8.3.** — Soit  $f$  une fonction holomorphe définie sur un ouvert de coordonnée  $(U, z)$ . On appelle dérivée schwarzienne de  $f$  par rapport à  $z$ , notée  $S(f)$  ou bien, plus souvent,  $\{f, z\}$ , la quantité :

$$S(f) = \{f, z\} = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Remarquons que dans la définition précédente, le choix de considérer  $f$  comme une fonction sur  $U$  et  $z$  comme une variable est arbitraire : si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions holomorphes non constantes sur un ouvert  $U$ , on définit  $\{f, g\}$  en considérant  $g$  comme une variable locale. On laisse le lecteur vérifier la propriété suivante :

**Proposition I.8.4.** — *La dérivée schwarzienne vérifie une relation de cocycle : soit  $f, g$  deux fonctions sur  $U, z$  la coordonnée (par rapport à laquelle on dérive). On a alors :*

$$\{f \circ g, z\} = \{f, g\} \cdot (g')^2 + \{g, z\}.$$

*De plus la dérivée schwarzienne d'une homographie est nulle.*

**Corollaire I.8.5.** — *La différentielle quadratique  $\{f, z\}(dz)^2$  est invariante par pré- ou post-composition par une homographie.*

*Démonstration.* — Soit  $\varphi$  la fonction dont on calcule la dérivée schwarzienne. Il suffit d'appliquer la relation de cocycle avec  $f$  une homographie et  $g = \varphi$  ou  $f = \varphi$  et  $g$  une homographie pour avoir l'invariance.  $\square$

Soit maintenant  $(D, \rho)$  un couple développante-holonomie d'une  $\mathbb{CP}^1$ -structure sur une surface  $S$ . On note  $u$  la variable sur  $\tilde{S}$ . L'image de  $\rho$  est incluse dans les homographies. On déduit de la relation de cocycle et de son corollaire que la différentielle quadratique :

$$\omega = \{D, u\} du^2$$

est invariante par la monodromie, donc bien définie sur la surface  $S$ . De plus on remarque que cet objet est holomorphe : on vérifie facilement que la dérivée schwarzienne  $S(D)$  n'a pas de pôle en dehors des pôles de  $D$ . Mais en un pôle de  $D$  on peut, par post-composition par  $z \mapsto \frac{1}{z}$ , changer  $D$  en  $\frac{1}{D}$ . Comme on a composé par une homographie, ça ne change pas la dérivée schwarzienne, qui n'a donc pas de pôle.

On a ainsi construit sur  $S$  un objet holomorphe reflétant la  $\mathbb{CP}^1$ -structure. Remarquons qu'à partir d'une différentielle quadratique  $\omega$ , on peut reconstruire la développante d'une  $\mathbb{CP}^1$ -structure en résolvant localement l'équation différentielle  $S(D)du^2 = \omega$ . Le point crucial est que deux solutions locales de cette équation diffèrent seulement d'une homographie. On renvoie le lecteur au chapitre VI pour une étude plus complète des  $\mathbb{CP}^1$ -structures.





# Groupes fuchsien

Un groupe fuchsien est un sous-groupe discret de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . On a vu qu'une structure hyperbolique sur une surface compacte naissait forcément d'un groupe fuchsien (sans torsion) de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Nous voyons dans ce chapitre comment construire de tels groupes, grâce au théorème du polygone de Poincaré – dont nous donnerons quelques pistes de généralisations. Nous concluons ce chapitre en construisant des fonctions méromorphes sur les surfaces hyperboliques compactes, ce qui implique que ce sont des courbes algébriques.

### II.1. Groupes fuchsien et pavages

Ce chapitre est consacré au théorème du polygone de Poincaré. Ce théorème fameux permet de construire effectivement des groupes fuchsien. Il a engendré de nombreuses tentatives de généralisation, parfois très délicates. Il consacre avant tout l'importance de la notion de *domaine fondamental* dans l'étude des sous-groupes discrets. En effet, on est souvent réduit à montrer l'existence d'un tel domaine fondamental pour montrer la discrétude d'un sous-groupe d'un groupe de Lie.

Nous avons choisi de rester dans le cadre des groupes fuchsien, gardant en tête notre objectif du théorème d'uniformisation. Nous mentionnerons au cours de la présentation les propriétés qui sont vraiment spécifiques à ce cadre là. Nous devons prévenir le lecteur que c'est un cas où tout se passe merveilleusement bien ; le passage à la dimension supérieure n'est jamais anodin.

## II.2. Domaine fondamental

On considère un sous-groupe  $\Gamma$  de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Une première remarque est que le caractère fuchsien se lit sur l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}$  :

**Lemme II.2.1.** —  $\Gamma$  est fuchsien si et seulement si il agit discontinûment sur  $\mathbb{H}$  (i.e. toutes les orbites sont discrètes).

*Démonstration.* — En effet,  $\mathbb{H}$  est homéomorphe au quotient

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2),$$

donc est un quotient compact de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . La seule façon pour qu'un groupe  $\Gamma$  ait une orbite  $\Gamma.x$  discrète sans être fuchsien est que un voisinage de l'identité dans  $\Gamma$  soit inclus dans le stabilisateur de  $x$ . Mais il suffit de prendre n'importe quel autre point  $y$  pour que l'orbite  $\Gamma.y$  ne soit plus discrète.  $\square$

### II.2.1. Polygone de Dirichlet

**Définition II.2.2.** — Un *polygone* de  $\mathbb{H}$  est une partie convexe fermée à bord géodésique par morceaux<sup>(1)</sup>. Un *côté* du polygone est un segment géodésique maximal dans le bord. Un *sommet* est un point du bord à l'intersection de deux côtés.

S'il n'a qu'un nombre fini de côtés, un polygone est dit fini.

On définit maintenant la définition de polygone fondamental<sup>(2)</sup> :

**Définition II.2.3.** — Un polygone  $P$  est dit fondamental pour le groupe  $\Gamma$  si :

- Les translats  $\gamma(\overset{\circ}{P})$  de l'intérieur de  $P$  sont 2 à 2 disjoints.
- Les translats  $\gamma(P)$  pavent  $\mathbb{H} : \cup_{\Gamma} \gamma(P) = \mathbb{H}$ .

Dans ce cas  $\Gamma$  est appelé le groupe d'isométrie du pavage.

Si on part du groupe  $\Gamma$ , on peut construire des polygones fondamentaux particuliers : les *polygones de Dirichlet* :

1. Dans la notion de géodésique par morceaux, mettons le doigt sur le fait qu'on demande que le nombre d'arcs soit localement fini dans  $\mathbb{H}$  : dans tout ouvert de  $\mathbb{H}$ , le bord du polygone peut s'écrire comme une union finie d'arcs géodésiques.

2. Remarquons que la notion générale de domaine fondamental a la même définition, si ce n'est qu'on ne demande plus au domaine d'être un polygone, mais en général un ouvert connexe.

**Définition II.2.4.** — Le polygone de Dirichlet  $P_p$  associé à  $\Gamma$  et centré en  $p \in \mathbb{H}$  est l'ensemble :

$$P_p = \{z \in \mathbb{H} \mid \forall \gamma \in \Gamma, d(z, p) \leq d(z, \gamma p)\}.$$

On peut par exemple donner le bien-connu polygone de Dirichlet pour  $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  centré en  $2i$  (voir figure 1). Nous n'avons pas encore

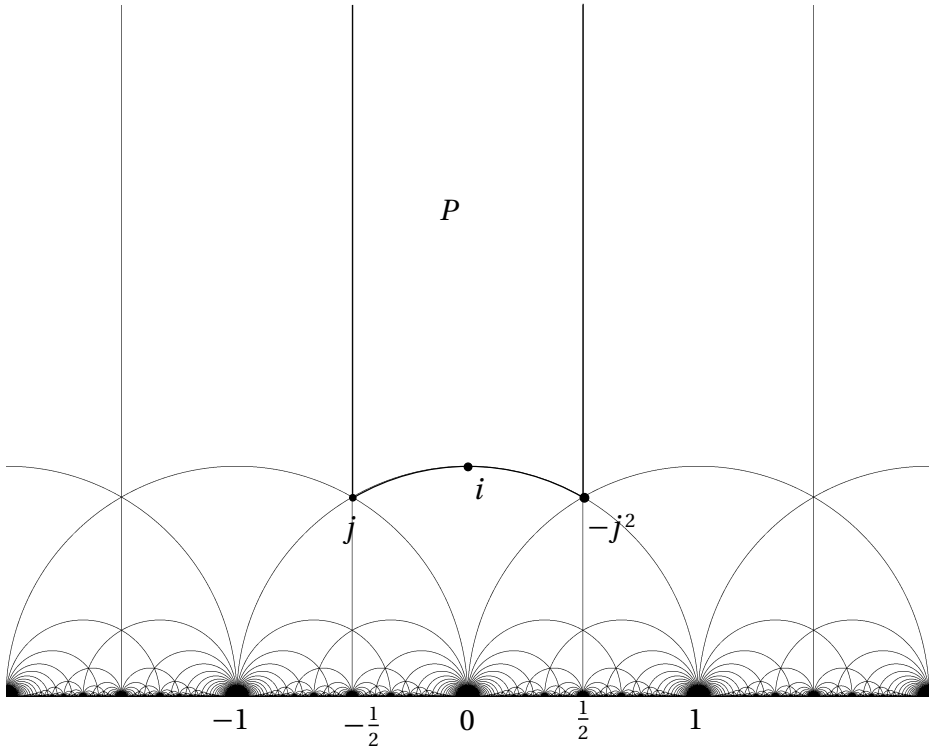


FIGURE 1. Un polygone de Dirichlet

vérifié que ce polygone de Dirichlet était en effet un polygone. C'est presque toujours le cas :

**Proposition II.2.5.** — Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien et  $p \in \mathbb{H}$  de stabilisateur trivial dans  $\Gamma$ . Alors le polygone de Dirichlet  $P_p$  est un polygone.

*Démonstration.* —  $P_p$  est l'intersection des demi-plans :

$$D_\gamma = \{z \in \mathbb{H} \mid d(z, p) \leq d(z, \gamma p)\}, \gamma \in \Gamma.$$

C'est donc un convexe fermé. Il reste à vérifier la finitude locale. Soit  $R > 0$ . Notons  $\Gamma_R = \{\gamma \neq \text{id} \in \Gamma \mid d(\gamma p, p) \leq 2R\}$ . Cet ensemble est fini car l'orbite de  $p$  est discrète et  $p$  n'a pas de stabilisateur. Alors l'intersection  $P_p \cap B(p, R)$  se réécrit comme l'intersection finie  $\bigcap_{\gamma \in \Gamma_R} D_\gamma \cap B(p, R)$ . Donc, restreint à  $B(p, R)$ , le bord de  $P_p$  est composé d'un nombre fini d'arcs géodésiques.  $\square$

On peut montrer que si  $\Gamma$  est de type fini,  $P_p$  est fini. Ce résultat est propre au cas de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  et n'est pas vérifié dès la dimension 3. Dans la suite nous nous intéresserons surtout aux polygones compacts qui sont automatiquement finis. Le théorème suivant énonce que ces polygones de Dirichlet sont des polygones fondamentaux

**Théorème II.2.6.** — *Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien. Alors tout polygone de Dirichlet centré en  $p$  à stabilisateur trivial est un polygone fondamental pour  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* — Soit  $p \in \mathbb{H}$  à stabilisateur trivial et  $P_p$  le polygone de Dirichlet associé. Par discrétude, l'orbite  $\Gamma.p$  est fermée. Pour tout  $z \in \mathbb{H}$ , il existe donc  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $d(z, \Gamma.p) = d(z, \gamma p)$ . Alors on a par construction  $\gamma^{-1}z \in P_p$ . Ca montre que l'union  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma P$  des translatés de  $P$  couvre tout  $\mathbb{H}$ .

Montrons que les intérieurs des translatés sont disjoints. Soit donc  $z \in \gamma P \cap \gamma' P$ , avec  $\gamma \neq \gamma'$ . Alors la distance de  $z$  à  $\Gamma p$  est atteinte en 2 points différents. Autrement dit, le point  $\gamma^{-1}z$  est équidistant de  $p$  et  $\gamma^{-1}\gamma'p$ . Ce point est donc sur la médiatrice  $D_{\gamma^{-1}\gamma'}$  et donc sur le bord de  $P$ . Donc les intérieurs sont disjoints.  $\square$

## II.2.2. Pavage et présentation

Soit  $\Gamma$  un groupe fuchsien et  $P = P_p$  un polygone de Dirichlet associé à un point sans stabilisateur. On va trouver une présentation de  $\Gamma$  à partir du polygone  $P$ . On commence par « standardiser » le bord de  $P$ .

**Lemme II.2.7.** — *Soit  $z \in \partial P$ . Alors il existe  $\gamma \neq \text{Id} \in \Gamma$  tel que  $\gamma z$  appartient aussi à  $\partial P$ . De plus un tel  $\gamma$  est unique si  $z$  n'est pas un sommet.*

*Démonstration.* —  $P$  est de Dirichlet. Donc  $z \in \partial P$  si et seulement si il existe  $\gamma \neq \text{Id}$  tel que la distance de  $z$  à  $\Gamma p$  est atteinte à la fois en  $p$  et  $\gamma p$ . Alors la distance de  $\gamma^{-1}z$  est atteinte à la fois en  $p$  et  $\gamma^{-1}z : \gamma^{-1}z$  est encore dans le bord de  $P$ .

Réciproquement, si  $z$  et  $\gamma^{-1}z$  sont dans  $\partial P$ , alors  $z$  est équidistant de  $p$  et  $\gamma p$ . Si  $z$  n'est pas un sommet, ça prouve l'unicité de  $\Gamma$ .  $\square$

Le lemme précédent ne précise pas qu'on doit avoir  $\gamma z \neq z$ . Cette égalité peut par exemple être vérifiée pour les sommets, mais aussi pour les milieux des segments géodésiques de  $\partial P$ <sup>(3)</sup>. Ce dernier cas est illustrée par le point  $i$  pour le polygone  $P_{2i}$  associé à  $PSL(2, \mathbb{Z})$ . On rajoute ces points aux sommets : dorénavant, si un point  $z \in \partial P$  est dans un côté  $c$  et n'est pas un sommet, alors le point  $\gamma z$  appartient à un *autre* côté  $c'$ . Les côtés sont donc des segments géodésiques  $c_1, \dots, c_p, \dots$  – naturellement orientés comme le bord de  $P$  – tels que pour chaque  $1 \leq i$ , il existe un unique  $\gamma_i \neq \text{Id} \in \Gamma$  et un unique  $j \neq i$  tel que  $\gamma_i$  envoie  $c_i$  sur  $c_j$  en renversant l'orientation. Ce renversement d'orientation est dû au fait que l'intérieur de  $\gamma_i P$  ne rencontre pas l'intérieur de  $P$ , donc est situé de « l'autre côté » de  $c_j$ . Si le nombre de côtés est fini, on en déduit notamment qu'il est pair et que les côtés sont appariés. En effet, par unicité,  $\gamma_j = \gamma_i^{-1}$ . On notera  $\sigma$  l'involution  $i \mapsto j$ . La donnée de  $\sigma$  et des  $\gamma_i$  s'appelle un *appariement de faces* pour le polygone  $P$ . Nous montrons déjà que les  $\gamma_i$  forment une famille génératrice de  $\Gamma$ . Nous décrirons les relations ensuite.

**Proposition II.2.8.** — *On suppose  $P$  fini. Alors, avec les notations précédentes,  $\Gamma$  est engendré par les  $\gamma_i$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\gamma \in \Gamma$ . Si  $\gamma$  est un des  $\gamma_i$ , alors  $\gamma p$  appartient à une copie de  $P$  voisine à  $P$ . Sinon, considérons  $\alpha$  un chemin (compact) de  $p$  à  $\gamma p$  qui évite les sommets et qui est transverse aux côtés. Considérons la suite finie des côtés  $C_1, \dots, C_N$  qu'on croise le long du chemin. Chacun est l'image d'un unique  $c_{i_k}$  de  $P$ . Le voisin de  $P$  le long de  $c_{i_k}$  est par construction le translaté  $\gamma_{i_k}^{-1}(P)$ . Donc, la suite des translatés de  $P$  qu'on traverse est :

$\gamma_{i_1}^{-1}(P), \gamma_{i_1}^{-1}\gamma_{i_2}^{-1}\gamma_{i_1}(\gamma_{i_1}^{-1}(P)) = \gamma_{i_1}^{-1}\gamma_{i_2}^{-1}(P)$ , jusqu'à  $\gamma(P) = \gamma_{i_1}^{-1} \dots \gamma_{i_N}^{-1}(P)$ . On a bien écrit  $\gamma$  comme un produit des  $\gamma_i$ . Cette preuve est illustrée figure 2 (dans le cas du groupe  $PSL(2, \mathbb{Z})$ ).  $\square$

On veut maintenant trouver les relations. Elles sont associées aux sommets du polygone (ou aux points à l'infini si on ne suppose pas le

3.  $\gamma$  est alors la symétrie centrale par rapport à ce milieu.

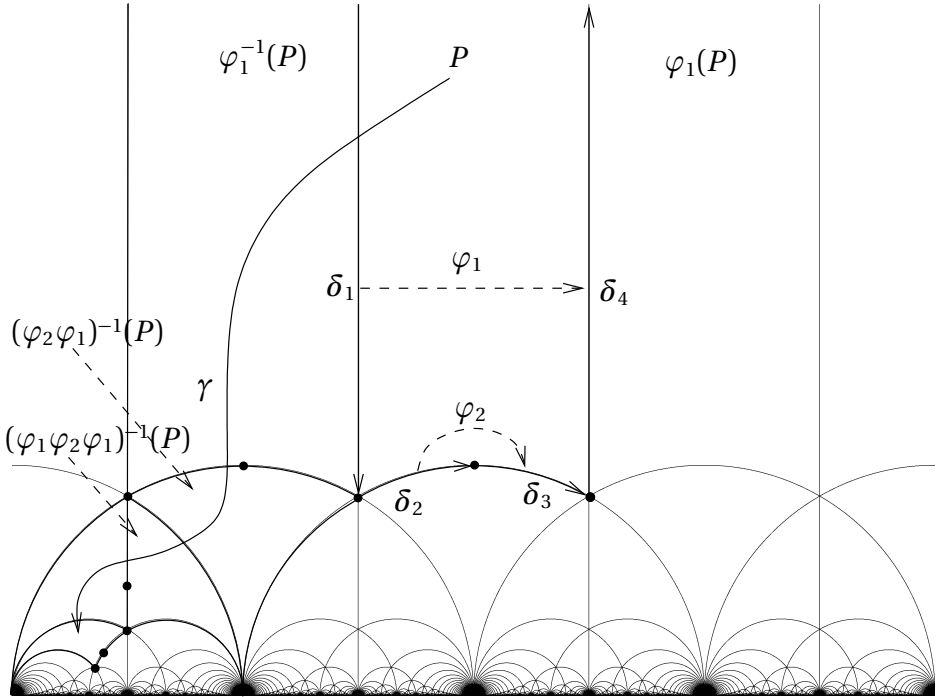


FIGURE 2. Le groupe est engendré par les appariements de faces

polygone compact). Remarquons qu'on dispose d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des sommets :  $s \sim s'$  si il existe  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma s = s'$ .

**Définition II.2.9.** — Un cycle elliptique est une classe d'équivalence pour la relation  $\sim$ .

Remarquons qu'une telle classe d'équivalence est finie, car  $\cup_{\gamma s \in \partial P} \gamma^{-1} P$  pave un voisinage ouvert de  $s \in \mathbb{H}$ .

**Définition II.2.10.** — L'angle d'un cycle est la somme des angles internes à  $P$  en chaque sommet du cycle.

Nous donnons encore l'exemple de  $P_{2i}$  pour  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  en figure 3. On peut retrouver ces cycles de manière combinatoire : notons  $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i) - 1$ . On notera  $s_i$  le sommet  $c_i \cap c_{i+1}$ . Alors le cycle de  $s_i$  est

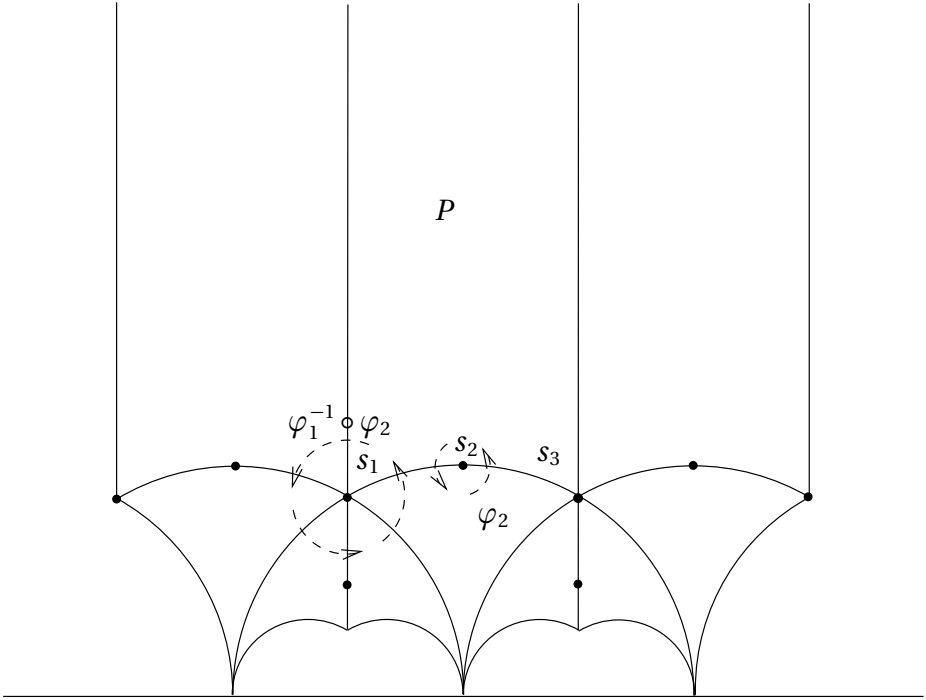


FIGURE 3. Les cycles elliptiques

$\{s_i, s_{\tilde{\sigma}(i)}, \dots, s_{\tilde{\sigma}^l(i)}\}$  où  $l$  est tel que  $\tilde{\sigma}^{l+1}(i) = i$  et est le premier (exercice). On déduit de cette étude la proposition suivante.

**Proposition II.2.11.** — *L'angle d'un cycle est de la forme  $\frac{2\pi}{q}$  pour un  $q \in \mathbb{Z}$ . Dans ce cas  $\gamma_{\tilde{\sigma}^l(i)} \circ \dots \circ \gamma_i$  engendre le stabilisateur de  $s_i$  et est d'ordre  $q$ .*

*Démonstration.* — Par construction  $\gamma_{\tilde{\sigma}^l(i)} \circ \dots \circ \gamma_i$  stabilise  $s_i$ , donc est d'ordre fini. Or c'est la rotation d'angle l'angle du cycle. Ca prouve l'existence de  $q$ . D'autre part, si  $\gamma$  est dans le stabilisateur de  $s_i$ , en reprenant la preuve de la proposition précédente, alors  $\gamma$  (ou son inverse) est de la forme  $\gamma_{\tilde{\sigma}^k(i)} \circ \dots \circ \gamma_i$ . On vérifie alors que  $k$  est un multiple de  $l$ . □

### II.2.3. Le théorème du polygone

Nous montrons dans cette section le théorème du polygone de Poincaré. C'est une forme de réciproque de la section précédente : en présence d'un polygone avec appariements de faces tel que les cycles soient d'angle divisant  $2\pi$ , ces appariements de faces engendrent un groupe

fuchsien, dont on décrit la présentation. On reprend les notations du paragraphe précédent.

**Théorème II.2.12 (Poincaré).** — Soit  $P$  un polygone compact de côtés  $c_1, \dots, c_{2n}$  avec un appariement de face  $(\sigma, (\gamma_i)_{1 \leq i \leq 2n})$  tel que l'angle de chaque cycle divise  $2\pi$ .

Alors le groupe  $\Gamma$  engendré par les  $\gamma_i$  est fuchsien, de présentation :

$$\langle (\gamma_i)_{1 \leq i \leq 2n} \mid \gamma_{\sigma(i)} = \gamma_i^{-1} \text{ et } (\gamma_{\sigma^l(i)} \circ \dots \circ \gamma_i)^q = 1$$

pour chaque sommet  $s_i$  où l'angle du cycle est  $\frac{2\pi}{q}$ .

*Démonstration.* — Considérons le groupe  $G$  abstrait, de présentation :

$$\langle (a_i)_{1 \leq i \leq 2n} \mid a_{\sigma(i)} = a_i^{-1} \text{ et } (a_{\sigma^l(i)} \circ \dots \circ a_i)^q = 1$$

pour chaque sommet  $s_i$  où l'angle du cycle est  $\frac{2\pi}{q}$ .

On veut montrer que comme groupe  $\Gamma = G$  et que  $P$  est un polygone fondamental pour  $\Gamma$ , ce qui implique la discrétude. Pour ça, on construit un *espace combinatoire de pavage*. Soit  $\mathcal{H} = P \times G$ . On met une relation d'équivalence sur  $\mathcal{H}$  engendrée par :  $(p, g) \sim (p', g')$  si et seulement si il existe  $i$  tel que  $p' = \gamma_i p$  et  $g' = g a_i^{-1}$ . On note  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} / \sim$ . Ce quotient  $\mathcal{H}^*$  est (bien sûr) muni de la topologie quotient. Une base d'ouvert en est la suivante :

- les boules incluses dans l'intérieur d'une copie  $P \times \{g\}$  de  $P$ ,
- l'union de deux demi-boules de même rayon, l'une dans  $P \times \{g\}$  centrée en un point  $(p, g)$ ,  $p \in \partial P$  et l'autre dans  $P \times \{g a_i^{-1}\}$  centrée en  $(\gamma_i p, g a_i^{-1})$ ,
- l'union de toutes les portions de boules de même rayon centrées en les  $(s_{\sigma^k(i)}, g(a_{\sigma^k(i)} \dots a_i(a_{\sigma^l(i)} \dots a_i)^m)^{-1})$  pour  $1 \leq k \leq l$  et  $1 \leq m \leq q$ .

Cette topologie rend  $\mathcal{H}^*$  connexe. En effet, pour  $g \in G$ , notons  $l(g)$  sa longueur minimale comme mot en les  $a_i$ . Notons  $\mathcal{H}_n^* = P \times \{g \mid l(g) \leq n\} / \sim$ . Alors  $\mathcal{H}_1^*$  est homéomorphe à  $P$  donc est connexe. Si  $\mathcal{H}_n^*$  est connexe, soit  $g$  de longueur  $n+1$  et écrivons le  $g' a_i$ ,  $l(g') = n$ . Alors si  $p \in c_i$ ,  $(p, g) \sim (\gamma_i p, g')$ . Donc la projection du connexe  $P \times \{g\}$  dans  $\mathcal{H}_{n+1}^*$  intersecte le connexe  $\mathcal{H}_n^*$ . Ils sont donc dans la même composante connexe. Comme c'est vrai pour tout élément de longueur  $n+1$ ,  $\mathcal{H}_{n+1}^*$  est connexe. On conclut par récurrence.  $G$  agit sur  $\mathcal{H}$  par  $g.(p, g') = (p, g g')$  et cette action passe au quotient  $\mathcal{H}^*$ .



Remarquons que d'après le paragraphe précédant, les relations  $\gamma_{\sigma(i)} = \gamma_i^{-1}$  et  $(\gamma_{\sigma^l(i)} \circ \dots \circ \gamma_i)^q = 1$  sont bien vérifiées dans  $\Gamma^{(4)}$ . On a donc un morphisme  $r$  de  $G$  dans  $\Gamma$ , défini par  $r(a_i) = \gamma_i$ . On peut donc définir

$$i : \begin{cases} \mathcal{H} & \rightarrow \mathbb{H} \\ (p, g) & \mapsto r(g) \cdot p \end{cases}.$$

L'espace  $\mathcal{H}$  en lui-même n'est pas intéressant : c'est une union de copies de  $P$  disjointes. Les recollements le long des côtés sont faits en passant à  $\mathcal{H}^*$ . Le lemme suivant énonce que  $i$  passe au quotient.

**Lemme II.2.13.** —  $i$  descend en une application  $i^*$  de  $\mathcal{H}^*$  vers  $\mathbb{H}$ .

*Démonstration.* — Soit  $(p, g)$  et  $(p', g')$  deux points équivalents de  $\mathcal{H}$  tels qu'il existe  $i$  avec  $p' = \gamma_i p$  et  $g' = g a_i^{-1}$ . On a alors :

$$i(p', g') = r(g') p' = r(g) \gamma_i^{-1} (\gamma_i p) = r(g) p = i(p, g).$$

□

Montrons maintenant que  $i^*$  est un homéomorphisme local. Au vu de la liste d'une base d'ouverts de  $\mathcal{H}^*$ , on vérifie qu'il n'y a pas de problème sur l'intérieur d'un pavé  $P \times \{g\}$ , ni sur le voisinage d'un point  $(p, g)$  sur  $\partial P \times \{g\}$  : un voisinage de  $(p, g)$  est divisé en deux parties recollées le long de  $\partial P \times \{g\}$  qui sont envoyées homéomorphiquement sur un voisinage de  $r(g)p$  dans  $\mathbb{H}$ . De même, si  $p$  est un sommet, l'image du voisinage décrit de  $(p, g)$  dans  $\mathcal{H}^*$  pave homéomorphiquement un voisinage de  $r(g)p$ .

On a même montré qu'il existe un voisinage de  $P \times \{1\}$  dans  $\mathcal{H}^*$  sur lequel  $i^*$  réalise un homéomorphisme vers un voisinage  $W$  de  $P$  dans  $\mathbb{H}$ . Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $W$  soit un  $\varepsilon$ -voisinage de  $P$ . Ainsi, l'image de  $i^*$  est son propre  $\varepsilon$ -voisinage : c'est  $\mathbb{H}$  tout entier. Ce qui nous fait maintenant avancer est que la propriété de relèvement des chemins pour  $i^*$  est claire. Cette remarque est le point crucial :  $i^*$  est un revêtement. Par connexité de  $\mathcal{H}^*$  et simple connexité de  $\mathbb{H}$ ,  $i^*$  réalise un homéomorphisme de  $\mathcal{H}^*$  sur  $\mathbb{H}$ . Son injectivité implique que  $\ker r$  est trivial, soit  $\Gamma \simeq G$ . De plus, comme  $P \times \{1\}$  est fondamental pour  $G$  agissant sur  $\mathcal{H}^*$ ,  $P$  est fondamental pour  $\Gamma$  agissant sur  $\mathbb{H}$ . □

4. Le lecteur pourra vérifier que, pour ces résultats, on n'a pas utilisé que  $P$  est de Dirichlet.

Un exemple crucial est le cas où il n'y a qu'un seul cycle d'angle  $2\pi$  : les sommets ont alors un stabilisateur trivial et l'action de  $\Gamma$  est libre. Dans ce cas  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  est une surface hyperbolique, homéomorphe au quotient de  $P$  par les appariements de faces.

**II.2.4. Généralisations du théorème du polygone**

*II.2.4.i. Polygones finis non-compacts.* — Si le polygone est non-compact, on a des sommets à l'infini : deux cotés successifs sont des arcs de géodésiques dont le point commun est à l'infini. Si  $s_i = C_i \cap C_{i+1}$  est un tel sommet à l'infini, on définit encore son cycle, dit *parabolique*,  $s_i, \dots, s_{\sigma^l(i)}$ , et l'application de retour  $\gamma_{\sigma^l(i)} \circ \dots \circ \gamma_i$ . On montre alors :

**Théorème II.2.14.** — *Soit  $P$  un polygone fini de côtés  $c_1, \dots, c_{2n}$  avec un appariement de faces  $(\sigma, (\gamma_i)_{1 \leq i \leq 2n})$  tel que l'angle de chaque cycle elliptique est  $\frac{2\pi}{q}$  et que pour chaque cycle parabolique l'application de retour est un élément parabolique de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .*

*Alors le groupe  $\Gamma$  engendré par les  $\gamma_i$  est fuchsien, de présentation :*

$$\langle (\gamma_i)_{1 \leq i \leq 2n} \mid \gamma_{\sigma(i)} = \gamma_i^{-1} \text{ et } (\gamma_{\sigma^l(i)} \circ \dots \circ \gamma_i)^q = 1 \text{ pour chaque sommet } s_i \text{ où l'angle du cycle est } \frac{2\pi}{q} \rangle.$$

On peut donner comme exemple les groupes de Hecke définis à la figure 4. Dans ce cas  $T$  et  $S$  engendrent un groupe fuchsien de présentation  $\langle T, S \mid S^2 = 1 \text{ et } (TS)^k = 1 \rangle$ . Pour  $k = 3$ , on retrouve  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .

*II.2.4.ii. Polyèdres et symétries.* — En dimension supérieure, on préfère utiliser les symétries par rapport aux faces d'un polyèdre. De manière surprenante au premier abord, les conditions à vérifier concernent uniquement les angles dièdres (i.e. le long des arêtes de codimension 2) :

**Théorème II.2.15.** — *Soit  $P$  un polyèdre compact de  $\mathbb{H}^n$  dont tous les angles dièdres sont de la forme  $\pi/k$ . Alors le groupe engendré par les symétries par rapport aux faces est discret dans  $O(n, 1)$ , et  $P$  est un polygone fondamental.*

On peut encore le généraliser dans le cadre de  $(\text{PSL}(n + 1, \mathbb{R}), \mathbb{RP}^n)$ -structures : c'est le théorème de Vinberg. En pratique, on n'arrive à construire de tels polyèdres qu'en petite dimension. Le groupe engendré

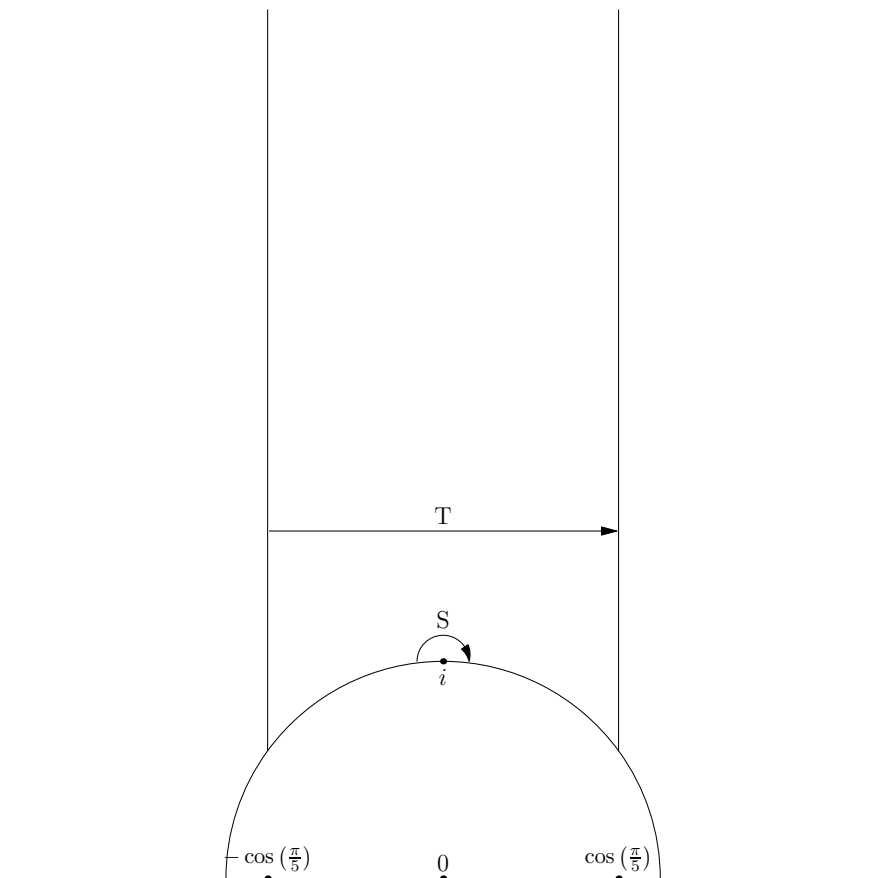


FIGURE 4. Le groupe de Hecke pour  $k = 5$

est alors un groupe de Coxeter, ce qui lui fournit plusieurs propriétés intéressantes.

### II.3. Groupes fuchsiens et surfaces de Riemann

#### II.3.1. Genre

Soit  $P$  un polygone à  $2n$  côtés d'aire finie avec  $(\sigma, (\gamma_i))$  un appariement de faces,  $c_e$  le nombre de ses cycles hyperboliques et  $c_p$  de ses cycles paraboliques.

**Proposition II.3.1.** — *Si  $P$  vérifie les hypothèses du théorème de Poincaré II.2.14 et  $\Gamma$  est le groupe engendré par les  $\gamma_i$ , alors le quotient de  $\mathbb{H}^* =$*

$\mathbb{H} \cup_s$  sommet à l'infini  $\Gamma.s$  par  $\Gamma$  est une surface de Riemann compacte de genre  $g = \frac{1+n-(c_e+c_p)}{2}$ .

*Démonstration.* — On renvoie à un cours de Surfaces de Riemann pour le fait que  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$  est une surface de Riemann compacte. On calcule le genre via la caractéristique d'Euler : choisissons  $p$  à l'intérieur de  $P$ , et traçons les géodésiques de  $p$  vers les sommets de  $P$ . Ces géodésiques avec les côtés de  $P$  forment une triangulation de la surface qui a  $2n + 1$  sommets,  $4n$  arêtes et  $2n$  triangles. Modulo l'action de  $\Gamma$ , il reste  $c_e + c_p$  sommets,  $3n$  arêtes et  $2n$  triangles. Ainsi, la caractéristique d'Euler  $2 - 2g$  vaut  $2n - 3n + c_e + c_p$ . Ce qui mène bien à  $2g = 1 + n - (c_e + c_p)$ .  $\square$

L'exemple crucial est un  $4g$ -gone compact avec identification des faces telle qu'il n'y ait qu'un cycle, d'angle  $\frac{2\pi}{k}$ . Alors  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  est une surface de genre  $g$ . Si de plus  $k = 1$ , alors c'est une surface hyperbolique, sur laquelle un point (l'image du cycle) est marqué. Comptons rapidement les modules (réels) de tels  $4g$ -gones :

$4g$ -gones	$8g$ paramètres
appariement de faces	$2g$ conditions de longueur
angle $2\pi$	1 condition
modulo $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$	$3$ paramètres inutiles

Au final, il y a  $6g - 4$  paramètres pour de tels polygones. Or les surfaces de Riemann de genre  $g$  marquées ont un espace de modules (complexe) de dimension  $3g - 2$ . Le théorème d'uniformisation dit que ces espaces sont « les mêmes ». Ce calcul de dimension donna l'idée à Klein et Poincaré de la méthode de continuité : en supposant ces espaces connexes, montrer que l'image de l'un dans l'autre est ouverte et fermée. C'est cette méthode que nous illustrerons dans ce cours.

### II.3.2. Algébricité des surfaces hyperboliques compactes

Nous concluons ce chapitre par la preuve de Poincaré du fait que les surfaces hyperboliques compactes sont des courbes algébriques. Pour ça, il suffit de montrer qu'elles portent suffisamment de fonctions méromorphe. Nous renvoyons au cours de Surface de Riemann pour ce point. Le but ici est de construire des fonctions méromorphes.

Soit donc  $P$  un polygone compact avec appariement de faces pavant  $\mathbb{H}$  et  $\Gamma$  le groupe fuchsien associé. Via l'isomorphisme  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{PU}(1, 1)$ , on fait agir  $\Gamma$  sur le disque  $\mathbb{D}$ , par  $\gamma.z = \frac{Az - \bar{B}}{Bz - \bar{A}}$ , où  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $A = b - c -$

$i(a + d)$  et  $B = b + c + i(d - a)$ . On note  $\Phi$  l'image de  $\Gamma$  dans  $\text{PU}(1, 1)$  et  $\gamma.z = \varphi_\gamma(z)$ .

On veut montrer :

**Proposition II.3.2.** — Soit  $s_1, \dots, s_k$  des points de  $S = \Phi \backslash \mathbb{D}$ . Alors il existe une fonction méromorphe sur  $S$  ayant des pôles au moins simple en les  $s_i$ .

Comme dit précédemment, cette proposition implique :

**Théorème II.3.3.** — Toute surface de Riemann compacte associée à un groupe fuchsien est une surface de Riemann algébrique.

On prouve la proposition dans le cas où la surface est associée à un polygone compact. Pour ce faire, on construit d'abord des formes automorphes :

**Définition II.3.4.** — Une fonction  $\theta : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  est automorphe de poids  $\nu \in \mathbb{N}$  si la forme  $\theta(z)(dz)^\nu$  est invariante par  $\Phi$ , ou encore, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $\varphi \in \Phi$  :

$$\theta \circ \varphi(z)(\varphi'(z))^\nu = \theta(z).$$

Il est alors facile (après Poincaré) de construire de telles formes par un procédé de moyenne, pour  $\nu \geq 2$  :

**Lemme II.3.5.** — Soit  $f$  une fonction rationnelle sur  $\mathbb{D}$ , sans pôles sur  $\partial\mathbb{D}$ . Alors, pour tout  $\nu \geq 2$ ,

$$\theta(z) = \sum_{\varphi \in \Phi} f \circ \varphi(z)(\varphi'(z))^\nu$$

converge uniformément sur tout compact vers une forme méromorphe automorphe de poids  $\nu$ .

On montre d'abord la convergence. Soit donc  $p$  un point de  $\mathbb{D}$  à stabilisateur trivial dans  $\Phi$  et  $\varepsilon > 0$  tels que les disques  $D(\varphi(p), \varepsilon)$  soient 2 à 2 disjoints. On note aire l'aire euclidienne d'un sous-ensemble de  $\mathbb{D}$ . Alors on obtient tout de suite, comme l'aire du disque est  $\pi$  :

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \text{aire}(D(\varphi(p), \varepsilon)) \leq \pi.$$

Mais, en outre, il existe une constante  $c$  tel que pour tout  $z \in D(p, \varepsilon)$ , on a

$$|\varphi'(z)|^2 \leq c \frac{\text{aire}(D(\varphi(p), \varepsilon))}{\text{aire}(D(p, \varepsilon))}.$$

Prouvons cette dernière égalité. On utilise la formule pour  $\varphi(z)$  donnée plus haut. Si  $B = 0$ , alors  $\varphi$  fixe 0 : ça ne concerne qu'un nombre fini d'éléments, ce qui ne dérange pas l'existence de la constante  $c$ . Sinon, on calcule

$$|\varphi'(z)| = \left| \frac{4^2}{B} \frac{1}{(z - \frac{A}{B})^2} \right|.$$

Or le module de  $A$  est  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ad - bc) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2$  tandis que le module de  $B$  est  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2$ . Ainsi, on a :

$$\frac{\max_{D(p,\varepsilon)} |\varphi'(z)|}{\min_{D(p,\varepsilon)} |\varphi'(z)|} \leq \frac{(d(p, \partial\mathbb{D}) - \varepsilon)^2}{(d(p, \partial\mathbb{D}) + \varepsilon)^2} = c.$$

Alors  $\text{aire}(D(\varphi(p), \varepsilon)) > \min |\varphi'|^2 \text{aire} D(p, \varepsilon) \geq \max |\varphi'|^2 \frac{\text{aire} D(p, \varepsilon)}{c^2}$ . Cela montre l'inégalité voulue.

Revenons à  $\theta$ . Considérons l'union des  $D(\varphi(p), \varepsilon)$  ne contenant pas de pôle de  $f$ . On les a tous sauf au plus un nombre fini. Sur cette union,  $f$  est bornée. Donc la convergence de  $\theta$  est équivalente à celle de la somme des  $\varphi'(z)$ . En utilisant l'inégalité démontrée, chaque terme est inférieur à  $\text{aire}(D(\varphi(p), \varepsilon))^{\frac{\nu}{2}}$ . Comme  $\nu \geq 2$ , c'est inférieur à la somme des  $\text{aire}(D(\varphi(p), \varepsilon))$ , donc fini d'après la première remarque.

Le caractère automorphe de  $\theta$  est assez clair sur la série. La proposition est prouvée.

On a construit une forme automorphe sur  $\mathbb{D}$ , mais on veut définir une forme sur  $S$ .

**Proposition II.3.6.** —  $\theta(z)(dz)^\nu$  est une forme méromorphe de degré  $\nu$  sur  $S$ .

*Démonstration.* — Il suffit de comprendre ce qu'il se passe au voisinage d'un cycle elliptique. Quitte à conjuguer, on suppose donc que 0 est un sommet du polygone, d'angle  $\frac{2\pi}{q}$ . Alors, sur  $S = \Phi \setminus \mathbb{D}$ , une coordonnée locale au voisinage de la projection de 0 est  $w = z^q$ . On veut montrer que  $\theta(z)(dz)^\nu$  s'écrit dans la coordonnée  $w$ .

Or le stabilisateur de 0 dans  $\Phi$  est engendré par la rotation  $\varphi(z) = e^{\frac{2i\pi}{q}} z$ . En écrivant l'invariance de  $\theta(z)(dz)^\nu$ , on obtient :

$$\theta(z)z^\nu = \sum_{k \geq k_0} a_k z^{kq}.$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} \theta(z)(dz)^\nu &= \left( \sum_{k \geq k_0} a_k w^k \right) \left( \frac{dz}{z} \right)^\nu \\ &= \left( \sum_{k \geq k_0} a_k w^k \right) \left( \frac{dw}{qw} \right)^\nu \\ &= \left( \sum_{k \geq k_0} \frac{a_k}{q^\nu} w^{k-\nu} \right) (dw)^\nu. \end{aligned}$$

Cela prouve le résultat. Remarquons qu'on peut avoir créé un pôle d'ordre  $\nu$  en ce sommet.  $\square$

**Remarque II.3.7.** — On peut suivre la même stratégie pour le cas des sommets à l'infini si le polygone n'est pas compact. Cependant, il est plus facile de revenir au modèle du demi-plan pour écrire proprement les séries.

Nous sommes maintenant prêts à prouver la proposition II.3.2 :

*Démonstration.* — On construit des fonctions comme quotients de formes de même poids. Fixons donc  $\nu \geq 2$ , et considérons  $f_1$  la fonction constante 1,  $w_1 = \theta_1(z)(dz)^\nu$  la forme associée vue comme forme sur  $S$ . Cette forme n'a des pôles qu'en les projections des sommets du polygone, comme vu dans proposition précédente.

On fixe, comme dans l'énoncé de la proposition II.3.2,  $k$  points  $s_1, \dots, s_k$  sur  $S$ . Et on choisit les relevés  $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_k$  dans  $P \subset \mathbb{D}$ . Choisissons alors une fonction une autre fonction  $f$  dont tous les pôles soient exactement les  $\tilde{s}_i$ . Considérons  $w = \theta(z)(dz)^\nu$  la forme associée. Elle a des pôles en les  $s_i$  et éventuellement en les projection des sommets.

La fonction  $\frac{w}{w_1}$  est une fonction méromorphe sur  $S$ , qui se relève en  $\tilde{f}(z) = \frac{\theta(z)}{\theta_1(z)}$  et qui a des pôles au moins simples en les  $s_i$ .  $\square$





# Théorème de Bieberbach et lemme de Margulis

## III.1. Géométrie euclidienne et sous-groupes discrets

Dans cette section, on s'intéresse aux structures euclidiennes, c'est-à-dire que  $X = \mathbb{R}^n$  et  $G = \mathbb{I}(n) = \mathbb{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n \subset \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$ . En effet, on laisse le lecteur vérifier qu'un élément  $\alpha = (A, a)$  de  $G$  peut-être identifié à la matrice  $\begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On note  $p$  la projection canonique de  $\mathbb{I}(n)$  dans  $\mathbb{O}(n)$ .

**Définition III.1.1.** — On appelle *axe* de l'élément  $\alpha$  l'espace affine dirigé par  $\ker(A - \mathrm{Id})$  et tel que  $\alpha$  agisse par vissage le long de cet axe (i.e. rotation dans son orthogonal et translation le long de ce sous-espace).

Mentionnons que  $\alpha$  est une translation si son axe est tout  $\mathbb{R}^n$  et une rotation si son axe est réduit à un point. Par exemple une rotation de centre  $b$  s'écrit

$$(A, b - Ab) = (\mathrm{Id}, b)(A, 0)(\mathrm{Id}, b)^{-1}.$$

Le théorème de Bieberbach permet de décrire les sous-groupes  $\Delta$  discrets et cocompacts (i.e.  $\Delta \backslash \mathbb{I}(n)$  est compact) :

**Théorème III.1.2 (Bieberbach, 1911).** — *Tout sous-groupe  $\Delta$  discret cocompact de  $\mathbb{I}(n)$  contient un sous-groupe d'indice fini constitué de translations.*

Le théorème implique que  $p(\Delta)$  est fini. D'autre part, ce sous-groupe d'indice fini de translations est un sous-groupe discret cocompact de  $\mathbb{R}^n$ .

Il est donc abélien et un exercice classique montre que c'est le groupe engendré par  $n$  translations le long des vecteurs d'une base de  $\mathbb{R}^n$ .

**Corollaire III.1.3.** — *Toute variété euclidienne compacte de dimension  $n$  admet un revêtement fini homéomorphe à un tore de dimension  $n$ .*

On va démontrer ce théorème dans les deux paragraphes suivants. Le point crucial est ce principe :

**Principe III.1.4.** — *Si deux isométries  $\alpha$  et  $\beta$  de  $I(n)$  engendrent un groupe discret et vérifient que  $A = p(\alpha)$  et  $B = p(\beta)$  sont suffisamment proche de l'identité, alors  $\alpha$  et  $\beta$  commutent.*

On reverra un énoncé similaire à ce principe dans le cadre de la géométrie hyperbolique.

### III.2. Commutateurs d'isométries euclidiennes

On note dans cette section  $\|\cdot\|$  la norme d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  déduite de la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemme III.2.1.** — *Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $O(n)$ . Alors on a :*

$$\|[A, B] - \text{Id}\| \leq 2\|A - \text{Id}\| \|B - \text{Id}\|.$$

*Démonstration.* — On écrit  $[A, B] - \text{Id} = ABA^{-1}B^{-1} - \text{Id} = (AB - BA)A^{-1}B^{-1} = ((A - \text{Id})(B - \text{Id}) - (B - \text{Id})(A - \text{Id}))A^{-1}B^{-1}$ . En passant à la norme (rappelons que  $\|A\| = \|B\| = 1$ ), on obtient bien l'inégalité annoncée.  $\square$

En particulier, si  $\|A - \text{Id}\|$  et  $\|B - \text{Id}\| < \frac{1}{2}$ , on a encore  $\|[A, B] - \text{Id}\| < \frac{1}{2}$ .

**Lemme III.2.2.** — *Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $O(n)$  avec  $\|B - \text{Id}\| < \frac{1}{2}$ . Si  $A$  commute à  $[A, B]$ , alors  $A$  et  $B$  commutent.*

*Démonstration.* — Comme  $A$  et  $[A, B]$  commutent, alors  $A$  et  $BAB^{-1}$  commutent. On diagonalise ces deux dernières matrices par blocs  $2 \times 2$  dans une base orthonormée : soient  $E_1, \dots, E_r$  les sous-espaces de diagonalisation de  $A$  et  $BAB^{-1}$ . Comme  $BE_1, \dots, BE_r$  sont aussi des sous-espaces stables pour  $BAB^{-1}$ , alors  $B$  permute les  $E_i$ .

Supposons  $x \in E_i$  et  $Bx \in E_j$  avec  $i \neq j$ . Alors  $\|Bx - x\|^2 = \|Bx\|^2 + \|x\|^2 = 2\|x\|^2$ . Donc  $\|B - \text{Id}\|$  n'est pas  $< \frac{1}{2}$ . Donc  $B$  préserve chacun des sous-espaces propres de  $A$ , et  $A$  et  $B$  commutent.  $\square$

Des deux précédents lemmes, ainsi que de la remarque entre les deux, on déduit le corollaire :

**Corollaire III.2.3.** — Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $O(n)$  avec  $\|A - \text{Id}\|$  et  $\|B - \text{Id}\| < \frac{1}{2}$ . Si la suite

$$([A, [A, \dots, [A, B] \dots]])_{k \geq 0}$$

stationne en  $\text{Id}$ , alors  $A$  et  $B$  commutent.

Etudions maintenant les commutateurs d'éléments de  $I(n)$ . Soient  $\alpha = (A, a)$ ,  $\beta = (B, b)$  deux éléments de  $I(n)$  et  $\gamma = (C, c)$  leur commutateur. On montre d'abord :

**Lemme III.2.4.** —  $|c| \leq \|B - \text{Id}\| |a| + \|A - \text{Id}\| |b|$ .

*Démonstration.* — On calcule directement

$$c = A(BA^{-1}B^{-1} - \text{Id})b - (ABA^{-1} - \text{Id})a.$$

Il suffit alors de prendre la norme.  $\square$

En particulier, si  $\|A - \text{Id}\|$  et  $\|B - \text{Id}\| < \frac{1}{2}$ , on a  $|c| < (|a| + |b|)$ . On déduit de tout cela le lemme suivant, qui n'est autre que la version précise du principe énoncé plus haut :

**Lemme III.2.5.** — Soient  $\alpha = (A, a)$  et  $\beta = (B, b)$  deux éléments de  $I(n)$  avec  $\|A - \text{Id}\|$  et  $\|B - \text{Id}\| < \frac{1}{2}$ . Si  $\alpha$  et  $\beta$  engendrent un sous-groupe discret de  $I(n)$  alors ils commutent.

*Démonstration.* — Soit  $\gamma_k$  la suite définie par  $\gamma_0 = \beta$  et  $\gamma_{k+1} = [\alpha, \gamma_k]$ . Notons  $\gamma_k = (C_k, c_k)$ . Le lemme III.2.1 implique que  $C_k$  tend vers  $\text{Id}$ . Ensuite le lemme III.2.4 implique que  $c_k$  reste bornée. Par discrétude de  $\langle \alpha, \beta \rangle$ , la suite  $C_k$  stationne en  $\text{Id}$ . Le corollaire III.2.3 implique que  $A$  et  $B$  commutent.

Donc  $\gamma_1 = (\text{Id}, c)$ , avec  $c = (A - \text{Id})b + (\text{Id} - B)a$ , puis  $\gamma_k = (\text{Id}, (A - \text{Id})^k c)$ . Comme on a  $\|A - \text{Id}\| < \frac{1}{2}$ , la suite  $c_k$  tend vers 0. Toujours par discrétude, pour  $k$  grand,  $(A - \text{Id})^k c = 0$ . Mais  $A$  est orthogonale, donc on obtient  $Ac = c$  et  $c$  est orthogonal à

$im(A - \text{Id})$ . On montre de même que  $c$  est orthogonal à  $im(B - \text{Id})$ .

Enfin, la formule  $c = (A - I)b + (I - B)a$  que  $c = 0$  :  $a$  et  $\beta$  commutent.  $\square$

Ce résultat est la partie difficile du théorème de Bieberbach, mais n'utilise pas crucialement la géométrie euclidienne. On en verra d'ailleurs une généralisation en géométrie hyperbolique. La différence est qu'en géométrie euclidienne on peut en déduire le théorème de Bieberbach, et donc une classification des variété euclidiennes compactes ; alors qu'il est plus délicat de faire de même en géométrie hyperbolique.

### III.3. Sous-groupes discrets d'isométries euclidiennes

#### III.3.1. Preuve du théorème de Bieberbach

**Lemme III.3.1.** — *Tous sous-groupe discret  $\Delta$  de  $I(n)$  contient un sous-groupe abélien distingué d'indice fini qui contient toutes les translations*

*Démonstration.* — On définit :

$$\Delta_1 = \{(A, a) \in \Delta \mid \|A - \text{Id}\| < \frac{1}{2}\}.$$

Il est clair que  $\Delta_1$  contient toutes les translations et est stable par conjugaison. De plus les lemmes III.2.1 et III.2.5 implique que c'est un sous-groupe abélien. Il reste à prouver qu'il est d'indice fini.

La compacité de  $O(n)$  implique qu'il existe un nombre fini (disons  $M$ ) d'éléments  $C_i \in p(\Delta)$  tels que pour tout  $A \in p(\Delta)$ , il existe  $i$  tel que  $\|A - C_i\| < \frac{1}{2}$ . Pour chaque  $i$  on choisit un élément  $\gamma_i = (C_i, c_i) \in \Delta$ . Soit alors  $\alpha = (A, a) \in \Delta$  et  $i$  tel que  $\|AC_i^{-1} - \text{Id}\| = \|A - C_i\| < \frac{1}{2}$ . Alors  $\alpha\gamma_i^{-1}$  est un élément de  $\Delta_1$ . Le sous-groupe  $\Delta_1$  est donc d'indice inférieur à  $M$ .  $\square$

Le théorème de Bieberbach est alors une conséquence directe du lemme suivant :

**Lemme III.3.2.** — *Tout sous-groupe  $\Delta$  discret abélien et cocompact de  $I(n)$  n'est composé que de translations.*

*Démonstration.* — Soit  $\alpha \in \Delta$ . Tout élément de  $\Delta$  commute à  $\alpha$ , donc doit préserver son axe. Cet axe  $E$  est donc un sous-espace invariant de  $\mathbb{R}^n$ . La cocompacité force ce sous-espace à être tout  $\mathbb{R}^n$ . En effet, sinon, il y a des points  $x$  arbitrairement loin de l'axe  $E$  de  $\alpha$ . Or la distance de

tous les points de  $\Delta x$  à  $E$  est la même : on trouve donc des orbites de  $\Delta$  arbitrairement loin ce qui contredit la cocompacité.

L'axe de  $\alpha$  est  $\mathbb{R}^n$ , donc  $c$ 'est une translation. □

Le théorème de Bieberbach se montre alors directement : soit  $\Delta$  un sous-groupe discret cocompact de  $I(n)$ . Alors le groupe  $\Delta_1$  donné par le lemme III.3.1 est d'indice fini et discret, abélien et cocompact. Il est donc composé de translations.

### III.3.2. Variétés euclidiennes

Les variétés complètes localement modelées sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  sont les variétés de la forme  $\Delta \backslash \mathbb{R}^n$  où  $\Delta$  est un sous-groupe discret sans torsion de  $I(n)$ .

Le théorème de Bieberbach implique que les variétés euclidiennes compactes sont finiment revêtues par un tore plat. On comprend donc très bien leur topologie. On pourra montrer par exemple que les seules surfaces euclidiennes compactes sont le tore et la bouteille de Klein (exercice : classifier les non-compactes). On connaît aussi la classification en dimension 3 et 4.

On aimerait suivre la même stratégie dans le cadre des variétés hyperboliques, mais on ne sait pas le faire. Cependant, on peut s'inspirer des techniques précédentes pour comprendre en partie la topologie des variétés hyperboliques. Nous le présentons dans le reste de ce chapitre.

## III.4. Le lemme de Margulis

On reprend les arguments d'algèbre linéaire développée ci-dessus, dans le cadre cette fois de  $O^+(n, 1)$ . On obtient un résultat analogue au lemme III.2.5 pour  $O^+(n, 1)$ . C'est un cas particulier d'un résultat plus général dû à Zassenhaus que nous énoncerons ensuite.

Pour deux éléments  $A$  et  $B$  dans  $GL(n + 1, \mathbb{R})$ , on note  $\alpha = A - \text{Id}$  et  $\beta = B - \text{Id}$ . On a :

**Lemme III.4.1.** — *On suppose  $\|\alpha\|$  et  $\|\beta\| < 1$ . Alors*

$$\|[A, B] - \text{Id}\| \leq \frac{2\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}{(1 - \|\alpha\|)(1 - \|\beta\|)}.$$

*Démonstration.* — On écrit comme dans la preuve de III.2.1 :

$$[A, B] - 1 = (\alpha\beta - \beta - \alpha)A^{-1}B^{-1}.$$

Or, comme  $\|\alpha\| < 1$  et  $A^{-1} = (\text{Id} + \alpha)^{-1}$  (idem pour  $B$ ), on a

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\alpha\|} \text{ et } \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\beta\|}.$$

□

En particulier, si  $\|A - \text{Id}\|$  et  $\|B - \text{Id}\| < 2 - \sqrt{3}$ , alors on a encore  $\|[A, B] - \text{Id}\| < 2 - \sqrt{3}$ . On déduit un analogue du lemme III.2.5 pour  $O^+(n, 1)$  :

**Lemme III.4.2 (Zassenhaus, 1938).** — Soient  $A$  et  $B$  dans  $O^+(n, 1)$  tels que  $\|A - \text{Id}\|$  et  $\|B - \text{Id}\| < 2 - \sqrt{3}$ . On suppose qu'ils engendrent un sous-groupe discret de  $O^+(n, 1)$ . Alors  $A$  et  $B$  commutent.

*Démonstration.* — On note  $\Gamma$  le groupe engendré par  $A$  et  $B$ . L'hypothèse est que  $\Gamma$  est discret.

Soit donc  $C$  un élément de  $\Gamma \setminus \{\text{Id}\}$  tel que  $\|C - \text{Id}\|$  soit minimale (en particulier  $\|C\| < 2 - \sqrt{3}$ ). D'après le lemme III.4.1,  $[A, C] = [B, C] = \text{Id}$ . Discutons selon la nature de  $C$  :

1.  $C$  est loxodromique : alors tout le groupe  $\Gamma$  préserve l'axe de  $C$  et agit sur l'orthogonal. Autrement dit, à conjugaison près,  $\Gamma \subset O(n - 1) \times \mathbb{R}$  et la projection de  $\Gamma$  sur  $O(n - 1)$  n'augmente pas la norme. On est donc ramené au cas orthogonal (on notera que  $2 - \sqrt{3} < \frac{1}{2}$ ).
2.  $C$  est elliptique : alors  $C$  fixe un sous-espace hyperbolique de dimension  $1 \leq d < n$  et  $\Gamma$  préserve ce sous-espace. Donc, à conjugaison près,  $\Gamma \subset O^+(d, 1) \times O(n - d)$ . On conclut par récurrence et en utilisant le cas orthogonal.
3.  $C$  est parabolique. Alors  $\Gamma$  fixe le point à l'infini fixé par  $C$ . Donc, à conjugaison près,  $\Gamma$  est un sous-groupe du groupe des similitudes euclidiennes de dimension  $n - 1$ . Mais une similitude qui n'est ni une dilatation ni une contraction serait un élément loxodromique de  $O^+(n, 1)$  et donc ne commuterait pas à  $C$ . Donc  $\Gamma$  est inclus dans  $I(n - 1)$  et on peut utiliser le lemme III.2.5.

□

On en déduit le résultat suivant, connu sous le nom de lemme de Margulis ou de Kazhdan-Margulis.

**Théorème III.4.3.** — Pour tout  $n \geq 2$ , il existe  $\varepsilon(n) > 0$  tel que pour tout groupe discret  $\Gamma$  de  $O^+(n, 1) = \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  et tout  $x \in \mathbb{H}^n$ , le groupe  $\Gamma_\varepsilon(x)$  engendré par les éléments  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $d(\gamma x, x) \leq \varepsilon$  contient un sous groupe abélien distingué et d'indice fini.

*Démonstration.* — La preuve est analogue à celle du lemme III.3.1. On note  $G = O^+(n, 1)$  et  $G_x = \text{Stab}_G(x)$ . Il nous sera utile de noter que  $G_x$  est compact. On utilisera aussi le lemme technique suivant :

**Lemme III.4.4.** — Soit  $\Gamma$  un groupe, avec  $S$  un ensemble générateur, qui agit transitivement sur un ensemble  $E$  de cardinal  $> m$ . On note  $\Gamma_m$  les éléments de  $\Gamma$  qui s'écrivent comme des mots de longueur  $\leq m$  en  $S$ .

Alors, pour tout  $e \in E$ , le cardinal de  $\Gamma_m \cdot e$  est au moins  $m + 1$ .

*Démonstration.* — Notons  $r(m)$  le cardinal de l'orbite  $\Gamma_m \cdot e$ . Si  $r(m) \leq m$ , il existe  $i < m$  tel que  $r(i + 1) = r(i) \leq m$ . Mais alors, pour tout  $m \geq i$ , on a  $r(m) = r(i) \leq m$ . Ça contredit la transitivité de l'action de  $\Gamma$  sur  $E$  (qui est de cardinal  $> m$ ).  $\square$

Reprenons la preuve du théorème. Soit  $U$  le voisinage ouvert de  $\text{Id}$

$$U = \{A \in O^+(n, 1) \mid \|A - \text{Id}\| < 2 - \sqrt{3}\}.$$

Soit  $H$  le sous groupe engendré par les éléments de  $\Gamma_\varepsilon(x) \cap U$ . Le lemme III.4.2 implique que  $H$  est abélien. Montrons qu'il est d'indice fini pour un  $\varepsilon$  bien choisi.

Soit  $V$  un voisinage compact de  $G_x$  et  $m$  le nombre de translatés de  $U$  nécessaires pour recouvrir  $V$ . On considère un voisinage symétrique  $W = W^{-1}$  de  $G_x$  tel que  $W^m \subset V$ . Alors il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $g \in G$ ,  $d(gx, x) < \varepsilon$  implique  $g \in W$ . C'est le  $\varepsilon$  qu'on cherche pour le théorème.

Montrons en effet que pour ce  $\varepsilon$ ,  $H = \Gamma_\varepsilon(x) \cap U$  est d'indice fini. Soit  $E$  l'ensemble  $\Gamma_\varepsilon(x)/H$ . On veut montrer que le cardinal de  $E$  est fini. Or  $\Gamma_\varepsilon(x)$  agit transitivement sur l'ensemble  $E$ . Et, par définition de  $\varepsilon$ , l'ensemble  $S = \Gamma_\varepsilon(x) \cap W$  engendre  $\Gamma_\varepsilon(x)$ . Montrons que le lemme III.4.4 implique que le cardinal de  $E$  est  $\leq m$ . Si on suppose le contraire, le cardinal de  $S^m H/H$  est au moins  $m + 1$ . Or  $S^m \subset W^m \subset V$ . Donc,  $S^m H/H \subset (V \cap \Gamma_\varepsilon(x))H/H$ . Or  $V$  est recouvert par  $m$  translatés de  $U$ , donc le cardinal de  $(V \cap \Gamma_\varepsilon(x))H/H$  est inférieur à  $m$ .

Nous avons donc construit un sous-groupe  $H$  abélien d'indice fini. Il reste à le rendre distingué. Mais pour ça, il suffit de remplacer  $H$  par l'intersection de ses conjugués (il n'y en a qu'un nombre fini).  $\square$

Mentionnons maintenant les généralisations de ces résultats. Tout d'abord, le lemme III.4.2 est un cas particulier du théorème de Zassenhaus :

**Théorème III.4.5 (Zassenhaus).** — *Soit  $G$  un groupe de Lie. Alors il existe un voisinage  $U$  de l'identité tel que tout groupe discret  $\Gamma$  de  $G$  engendré par des éléments de  $U$  est nilpotent.*

Le lemme de Margulis s'étend alors à un cadre plus général : on considère  $G$  un groupe de Lie,  $X = G/K$  - avec  $K$  un sous-groupe compact - portant une métrique riemannienne  $G$  invariante. On reprend les notations de III.4.3.

**Théorème III.4.6 (Kazhdan-Margulis).** — *Il existe  $\varepsilon > 0$  ne dépendant que de  $X$  tel que pour tout  $x \in X$  et  $\Gamma$  sous-groupe discret de  $G$ ,  $\Gamma_\varepsilon(x)$  contient un sous-groupe d'indice fini nilpotent et distingué.*

Ce théorème se prouve comme le théorème III.4.3, en considérant  $H$  le groupe engendré par  $\Gamma_\varepsilon(x) \cap U$ .

### III.5. Décomposition fine-épaisse des variétés hyperboliques

On tire ici des conséquences topologiques de ces résultats pour les variétés hyperboliques. Soit  $M = \Gamma \backslash \mathbb{H}^n$  une variété hyperbolique complète (éventuellement de volume  $\infty$ ).

**Définition III.5.1.** — – Si  $x \in M$ , le *rayon d'injectivité* de  $M$  en  $x$  est la borne supérieure des rayons des boules ouvertes centrées en  $x$  plongées dans  $M$ . On le note  $r_M(x) = r(x)$ .

– Pour  $\varepsilon > 0$ , la *partie  $\varepsilon$ -épaisse* de  $M$  est l'ensemble

$$M_{\geq \varepsilon} = \{x \in M \mid r(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}\},$$

– et la *partie  $\varepsilon$ -fine* de  $M$  est son complémentaire, soit l'ensemble

$$M_{< \varepsilon} = \{x \in M \mid r(x) < \frac{\varepsilon}{2}\}.$$



Le lemme de Margulis implique que la partie fine a une forme standard dès que  $\varepsilon \leq \varepsilon(n)$ .

**Théorème III.5.2.** — *On suppose  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon(n)$ . Alors toute composante connexe de la partie  $\varepsilon$ -fine de  $M$  est isométrique au voisinage d'une géodésique courte ou au voisinage d'une pointe<sup>(1)</sup>, ce dernier étant homéomorphe au produit d'une variété euclidienne par  $]0, +\infty[$ .*

CUSP->POINTES???

*Démonstration.* — Pour  $\gamma \in \Gamma$ , on note  $T(\gamma) = T_\varepsilon(\gamma)$  l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{H}^n \mid d(x, \gamma x) < \varepsilon\}.$$

Alors, si  $\gamma$  est loxodromique,  $T(\gamma)$  est soit vide soit un voisinage ouvert de l'axe de  $\gamma$ . Si  $\gamma$  est parabolique,  $T(\gamma)$  est une horoboule centrée en le point fixe de  $\gamma$ .

Notons  $p$  la projection de  $\mathbb{H}^n$  sur  $M$ . Alors on a :

$$p^{-1}(M_{<\varepsilon}) = \cup_{\Gamma \setminus \{\text{Id}\}} T(\gamma).$$

Cet ensemble est  $\Gamma$ -invariant et, comme pour tout  $\gamma$ ,  $\gamma T(\gamma) = T(\gamma)$ , toute composante connexe  $T_0$  de cet ensemble est de la forme :

$$T_0 = \cup_{J \setminus \{\text{Id}\}} T(\gamma),$$

où  $J$  est le stabilisateur de  $T_0$ .

Supposons que, pour 2 éléments de  $J$ , l'intersection  $T(\gamma) \cap T(\gamma')$  est non vide. Il existe alors existe  $x \in \mathbb{H}^n$  tel que  $d(x, \gamma x)$  et  $d(x, \gamma' x) < \varepsilon \leq \varepsilon(n)$ . Le lemme de Margulis implique que le groupe engendré par  $\gamma$  et  $\gamma'$  contient un sous-groupe  $H$  abélien distingué et d'indice fini.

Considérons un élément non trivial  $\alpha \in H$ . Comme  $\Gamma$  est sans torsion,  $\alpha$  est parabolique ou loxodromique. Comme le groupe  $\langle \gamma, \gamma' \rangle$  normalise  $H$ , il fixe l'axe de  $\alpha$  (si  $\alpha$  est loxodromique) ou son point fixe à l'infini. Comme de plus c'est un groupe discret,  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont du même type que  $\alpha$  avec même axe ou même point fixe à l'infini. Par connexité de  $T_0$ , tous les éléments de  $J$  ont le même type. On appelle ce type le type de  $T_0$ .

Considérons maintenant l'image de  $T_0$  dans  $M$ .

1. Si  $T_0$  est hyperbolique, alors  $J$  est engendré par un unique élément et  $T_0$  est un voisinage ouvert d'une géodésique de  $\mathbb{H}^n$ .  $M_0$  est donc

1. On dit souvent *cusps*.

le voisinage ouvert de la projection de cette géodésique dans  $M$  (qui est de longueur  $\leq \varepsilon$ ).

2. Si  $T_0$  est parabolique, soit  $p$  son point à l'infini. Si  $x \in \mathbb{T}_0$ , toute la demi-géodésique reliant  $x$  à  $p$  est dans  $T_0$ . Donc  $T_0 \simeq \mathbb{R}^{n-1} \times ]0, +\infty[$  et  $J$  agit sur la composante  $\mathbb{R}^{n-1}$  par isométries euclidiennes. Donc  $M_0 \simeq (J \backslash \mathbb{R}^{n-1}) \times ]0, +\infty[$ .

□

FIGURE 1. La décomposition fine-épaisse

Un corollaire intéressant est le suivant :

**Corollaire III.5.3.** — *Il existe un minimum  $> 0$  à l'ensemble des volumes des variétés hyperboliques compactes de dimension  $n$ .*

Ça soulève le problème intéressant de trouver toutes les variétés hyperboliques de volume minimal.

### III.6. Limites de représentations fidèles et discrètes

Une autre application du lemme de Margulis concerne les limites de représentations fidèles et discrètes. Nous l'utiliserons par la suite. On considère  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ . On ne veut pas le prendre trop simple :

**Définition III.6.1.** —  $\Gamma$  est dit *élémentaire* (ou virtuellement abélien) s'il contient un sous-groupe abélien d'indice fini.

On suppose dorénavant que  $\Gamma$  est non-élémentaire. On note l'espace des représentations

$$\text{Rep}(\Gamma) = \{\text{morphisms } \rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^n)\}.$$

On munit cet espace de la topologie compacte-ouverte : deux représentations sont proches si elles sont proches sur un ensemble fini grand (par exemple une famille génératrice).

**Théorème III.6.2 (Wielenberg, 1977).** — *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret non-élémentaire de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ . Alors toute limite de représentations fidèles et discrètes est encore fidèle et discrète.*

*Démonstration.* — On considère une suite  $(\rho_i)$  de représentations fidèles et discrètes qui converge vers une représentation  $\rho$ .

Montrons par l'absurde que  $\rho$  est fidèle. Sinon, soit  $\gamma \neq \text{id}$  tel que  $\rho(\gamma) = \text{id}$ . On a bien sûr que pour tout  $\gamma' \in \Gamma$ ,  $\rho([\gamma, \gamma']) = \text{id}$ . Le lemme de Margulis implique que pour  $i$  suffisamment grand,  $\rho_i(\gamma)$  et  $\rho_i([\gamma, \gamma'])$  engendrent un groupe élémentaire. Notamment ces deux éléments ont le même ensemble de points fixes. Mais en faisant le même raisonnement sur  $\gamma'\gamma(\gamma')^{-1}$  et  $[\gamma, \gamma']$ , on déduit que  $\rho_i(\gamma')$  fixe cet ensemble de point fixe. Donc  $\rho_i(\gamma)$  et  $\rho_i(\gamma')$  ont les mêmes ensembles de points fixes. Le choix de  $\gamma'$  est ici arbitraire : en le faisant sur toute une partie génératrice de  $\Gamma$ , on obtient que  $\rho_i(\Gamma)$  est élémentaire. C'est la contradiction recherchée.

Montrons maintenant que  $\rho$  est discrète. Soit  $x_0$  un point de  $\mathbb{H}^n$ . On fixe une famille génératrice  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ . On fixe un compact  $K \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  qui contient tous les  $\rho_i(\gamma_j)$ . Fixons aussi un voisinage  $U$  de  $\text{Id}$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  vérifiant :

$$\forall g \in U, d(gx_0, x_0) \leq \varepsilon(n)$$

$$\text{et } \forall g \in U, h \in K, d([g, h]x_0, x_0) \leq \varepsilon(n).$$

Si  $\rho$  n'est pas discrète, il existe  $\gamma$  non trivial dans  $\Gamma$  tel que pour  $i$  suffisamment grand,  $\rho_i(\gamma) \in U$ . Le lemme de Margulis implique alors que pour tout  $j$ , le groupe engendré par  $\rho_i(\gamma)$  et  $\rho_i(\gamma_j)$  est élémentaire. Comme plus haut, ça implique que  $\rho_i(\Gamma)$  est élémentaire, ce qui est à nouveau une contradiction.  $\square$



# Variété des représentations d'un groupe de surface

Nous nous concentrons maintenant sur les groupes de surfaces. Nous étudions l'espace des représentations dans  $SL(2, \mathbb{C})$  puis  $SL(2, \mathbb{R})$ . Nous montrons que c'est (presque partout) une variété, décrivons les espaces tangents. Puis nous étudions l'action par conjugaison de  $SL(2)$  sur cette variété.

Dans tout ce chapitre,  $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g)$  est le groupe fondamental de la surface de genre  $g \geq 2$ . On fixe une famille génératrice standard, c'est-à-dire une famille  $(\gamma_i)_{i=1, \dots, 2g}$  telle que<sup>(1)</sup>

$$\Gamma = \left\langle (\gamma_i) \mid \prod_{i=1}^g [\gamma_i, \gamma_{i+g}] = 1 \right\rangle.$$

## IV.1. Espaces de représentations

Commençons par définir l'espace des représentations et des représentations irréductibles :

**Définition IV.1.1.** — On note  $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(g) = \text{Hom}(\Gamma, SL(2, \mathbb{C}))$ .

1. Dans tout ce chapitre nous utiliserons la notation  $\prod_{k=1}^l g_k$  avec  $g_k$  des matrices. Le produit n'est bien sûr pas commutatif, il faut interpréter cette notation comme  $g_1 g_2 \dots g_k$ .

Une représentation  $\rho \in \text{Rep}_{\mathbb{C}}(g)$  est dite *irréductible* si les seuls sous-espaces de  $\mathbb{C}^2$  invariants par  $\rho(\Gamma)$  sont  $\{0\}$  et  $\mathbb{C}^2$ . On note  $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g) \subset \text{Rep}_{\mathbb{C}}(g)$  l'espace des représentations irréductibles.

Un morphisme  $\rho$  de  $\Gamma$  dans  $SL(2, \mathbb{C})$  est défini par les images  $A_i = \rho(\gamma_i)$  des  $\gamma_i$ . La seule condition sur une famille  $A_i$  pour être de cette forme est la condition polynomiale en les coefficients  $\prod_{i=1}^g [A_i, A_{i+g}] = 1$ . Ainsi,  $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(g)$  est la sous-variété algébrique affine de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})^{2g}$  :

$$\left\{ (A_1, \dots, A_{2g}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})^{2g} \mid \prod_{i=1}^g [A_i, A_{i+g}] = 1 \right\}.$$

Les représentations qui nous intéresseront en premier lieu sont celles qu'on a déjà rencontrées au chapitre précédent : les représentations fidèles et discrètes. On commence par vérifier qu'elles sont irréductibles :

**Lemme IV.1.2.** — *Une représentation fidèle et discrète de  $\Gamma$  est irréductible.*

*Démonstration.* — Soit  $\rho$  discrète. Si elle fixe une droite de  $\mathbb{C}^2$ , alors, à conjugaison près,  $\rho(\Gamma)$  est inclus dans le groupe des matrices triangulaires supérieures. La discrétude implique alors qu'un sous-groupe d'indice fini de  $\rho(\Gamma)$  est abélien (la projection de  $\rho(\Gamma)$  sur le groupe diagonal doit être finie). Elle n'est donc pas fidèle.  $\square$

Ce lemme montre en particulier que  $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)$  est non-vidé (on sait construire des représentations fidèles et discrètes, par exemple grâce au théorème du polygone). Montrons que c'est un ouvert :

**Lemme IV.1.3.** —  *$\text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)$  est ouvert.*

*Démonstration.* — Considérons l'ensemble :

$$F = \{(\rho, D) \in \text{Rep}_{\mathbb{C}}(g) \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \mid \rho(\Gamma)D \subset D\}.$$

Par construction, c'est un fermé. Or  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  est compact, donc sa projection dans  $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(g)$  est encore fermée. Cette projection est exactement le complémentaire des représentations irréductibles.  $\square$

### IV.2. Variété des représentations irréductibles

Nous montrons dans cette section que  $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)$  est une variété. Avant ça, rappelons que l'espace tangent à  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  en un point  $\sigma$  est isomorphe à l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \text{tr}(M) = 0\}.$$

Une carte locale autour de  $\sigma$  est donnée par l'application

$$\begin{cases} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) & \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C}) \\ \xi & \mapsto \exp(\xi)\sigma \end{cases}$$

Le résultat annoncé est la proposition suivante :

**Proposition IV.2.1.** — *L'espace  $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)$  est une sous-variété complexe de dimension  $6g - 3$  dans  $\text{SL}(2, \mathbb{C})^{2g}$ .*

La preuve de cette proposition occupe le reste de la section. Considérons la fonction

$$f : \begin{cases} \text{SL}(2, \mathbb{C})^{2g} & \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C}) \\ (\sigma_1, \dots, \sigma_{2g}) & \mapsto \prod_{i=1}^g [\sigma_i, \sigma_{i+g}] \end{cases}$$

L'ensemble  $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(g)$  a pour équation  $f = \text{Id}$ . Pour prouver la proposition, on montre que la différentielle de  $f$  en une représentation irréductible est surjective. La première étape est de calculer cette différentielle :

**Lemme IV.2.2.** — *La différentielle de  $f$  en un point  $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{2g}) \in \text{SL}(2, \mathbb{C})^{2g}$  dans la direction  $\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{2g}) \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{2g}$  est donnée par la formule  $d_{\underline{\sigma}}f(\underline{\xi}) =$*

$$\sum_{i=1}^g \left( \prod_{j=1}^{i-1} [\sigma_j, \sigma_{j+g}] \right) \cdot \left( (1 - \sigma_i \sigma_{i+g} \sigma_i^{-1}) \cdot \xi_i + (\sigma_i - [\sigma_i, \sigma_{i+g}]) \cdot \xi_{i+g} \right).$$

Attention, dans la formule précédente, l'action de  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  sur  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  est l'action adjointe  $\sigma \cdot \xi = \text{Ad}(\sigma)(\xi) = \sigma \xi \sigma^{-1}$ .

*Démonstration.* — Ce lemme se prouve par un calcul attentif. On a décrit la carte  $\xi_i \mapsto e^{\xi_i} \sigma_i$  au voisinage de  $\sigma_i$ . Calculons dans cette carte :

$$[e^{\xi_i} \sigma_i, e^{\xi_{i+g}} \sigma_{i+g}] = e^{\xi_i} \sigma_i e^{\xi_{i+g}} \sigma_{i+g} \sigma_i^{-1} e^{-\xi_i} \sigma_i^{-1} e^{-\xi_{i+g}}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\xi_i} (\sigma_i e^{\xi_{i+g}} \sigma_i^{-1}) (\sigma_i \sigma_{i+g} \sigma_i^{-1} e^{-\xi_i} \sigma_i \sigma_{i+g}^{-1} \sigma_i^{-1}) [\sigma_i, \sigma_{i+g}] e^{-\xi_{i+g}} \\
&= e^{\xi_i} e^{\sigma_i \cdot \xi_{i+g}} e^{-(\sigma_i \sigma_{i+g} \sigma_i^{-1}) \cdot \xi_i} e^{-[\sigma_i, \sigma_{i+g}] \cdot \xi_{i+g}} [\sigma_i, \sigma_{i+g}].
\end{aligned}$$

Donc, la différentielle en  $(\sigma_i, \sigma_{i+g})$  de  $[\sigma_i, \sigma_{i+g}]$  dans la direction  $(\xi_i, \xi_{i+g})$  est

$$\left( (1 - \sigma_i \sigma_{i+g} \sigma_i^{-1}) \cdot \xi_i + (\sigma_i - [\sigma_i, \sigma_{i+g}]) \cdot \xi_{i+g} \right).$$

Pour différentier le produit  $\prod [\sigma_i, \sigma_{i+g}]$ , on utilise que la différentielle par rapport à  $\sigma$  du produit  $\sigma \sigma'$  est  $\xi$ , mais que celle de  $\sigma' \sigma$  est  $\sigma' \cdot \xi$ . Ainsi, on différencie le produit terme à terme. On obtient l'expression de  $d_{\underline{\sigma}} f(\underline{\xi})$ :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^g d_{(\sigma_i, \sigma_{i+g})} \left( \left( \prod_{j=1}^{i-1} [\sigma_j, \sigma_{j+g}] \right) [\sigma_i, \sigma_{i+g}] \left( \prod_{j=i+1}^g [\sigma_j, \sigma_{j+g}] \right) \right) (\xi_i, \xi_{i+g}) \\
&= \sum_{i=1}^g \left( \prod_{j=1}^{i-1} [\sigma_j, \sigma_{j+g}] \right) \cdot \left( d_{(\sigma_i, \sigma_{i+g})} [\sigma_i, \sigma_{i+g}] (\xi_i, \xi_{i+g}) \right).
\end{aligned}$$

□

On veut donc prouver la surjectivité de  $d_{\underline{\sigma}} f$  si  $\underline{\sigma} \in \text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)$ . Le lemme suivant nous sera utile :

**Lemme IV.2.3.** — Soit  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  deux éléments de  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  qui ne commutent pas. Alors l'application :

$$\begin{cases} \text{sl}(2, \mathbb{C}) \times \text{sl}(2, \mathbb{C}) & \rightarrow & \text{sl}(2, \mathbb{C}) \\ (\xi_1, \xi_2) & \mapsto & (1 - \sigma_1) \cdot \xi_1 + (1 - \sigma_2) \cdot \xi_2 \end{cases}$$

est surjective.

*Démonstration.* — Si  $\sigma \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  n'est pas  $\pm \text{Id}$ , alors  $f_{\sigma} : \xi \mapsto (1 - \sigma) \cdot \xi$  est une application linéaire de rang 2. En effet  $\xi \in \ker(f_{\sigma})$  équivaut à  $\sigma \xi \sigma^{-1} = \xi$ . Les éléments de  $\ker(f_{\sigma})$  sont les éléments de trace nulle qui commutent à  $\sigma$ . Donc  $\xi$  est un polynôme en  $\sigma$  (qu'on peut choisir de degré au plus 1 par Cayley-Hamilton) de trace nulle. On obtient que  $\ker(f_{\sigma})$  est la droite engendrée par  $2\sigma - \text{tr}(\sigma)\text{Id}$ . En particulier  $f_{\sigma}$  est de rang 2. On vérifie en outre que l'image de  $f_{\sigma}$  est orthogonale à  $\ker(f_{\sigma})$  pour la forme bilinéaire symétrique  $(\xi, \xi') \mapsto \text{tr}(\xi \xi')$  (forme de Killing).

Finalement, comme  $\text{sl}(2, \mathbb{C})$  est de dimension 3, l'application du lemme est surjective sauf si  $\text{im}(f_{\sigma_1}) = \text{im}(f_{\sigma_2})$  ou de manière équivalente



si  $\ker(f_{\sigma_1}) = \ker(f_{\sigma_2})$ . Dans ce cas on a  $2\sigma_2 - \text{tr}(\sigma_2)\text{Id} \in \ker(f_{\sigma_1})$ . En particulier cet élément commute à  $\sigma_1$  et finalement  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  commutent. Le lemme est prouvé.  $\square$

Nous pouvons maintenant montrer la proposition IV.2.1 :

*Démonstration.* — Si  $\underline{\sigma} = (\rho(\gamma_i))$  avec  $\rho$  irréductible, alors il existe deux indices  $i \neq j$  tels que  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  ne commutent pas. Deux cas sont à distinguer :

1.  $j = i + g$ . On peut alors réécrire

$$(1 - \sigma_i \sigma_{i+g} \sigma_i^{-1}) \cdot \xi_i + (\sigma_i - [\sigma_i, \sigma_{i+g}]) \cdot \xi_{i+g}$$

sous la forme

$$\sigma_i \cdot \left( (1 - \sigma_{i+g}) \cdot (\sigma_i^{-1} \cdot \xi_i) + (1 - \sigma_{i+g} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+g}^{-1}) \cdot \xi_{i+g} \right).$$

Le lemme précédent montre la surjectivité en restriction à  $(\xi_i, \xi_{i+g})$ .

2. pour tout  $i$ ,  $\sigma_i$  et  $\sigma_{i+g}$  commutent et il existe  $i \neq j$  tels que  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  ne commutent pas. Alors dans la formule de la différentielle, tous les commutateurs disparaissent et on peut écrire :

$$d_{\underline{\sigma}} f(\underline{\xi}) = \sum_{i=1}^g (1 - \sigma_{i+g}) \cdot \xi_i + (\sigma_i - 1) \cdot \xi_{i+g}.$$

Le lemme précédent montre à nouveau la surjectivité, en restriction à  $(\xi_i, \xi_j)$ .  $\square$

### IV.3. Espace tangent

Considérons  $\rho$  une représentation irréductible, et notons  $\underline{\sigma} = (\rho(\gamma_i))$ . Choisissons  $\underline{\xi} = (\xi_i)_{i=1, \dots, 2g}$ . On voudrait construire une application  $c : \Gamma \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  telle que  $c(\gamma_i) = \xi_i$  et  $c(\gamma\gamma') = c(\gamma) + \rho(\gamma)c(\gamma')$ . La seule condition à vérifier est  $c(\prod [\sigma_i, \sigma_{i+g}]) = 0$ . En reprenant le calcul de la différentielle, on voit que cette application  $c$  existe si et seulement si  $d_{\underline{\sigma}} f(\underline{\xi}) = 0$ , autrement dit si et seulement si  $\underline{\xi}$  est tangent à  $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)$  en  $\rho$ . Cette remarque est à la base d'une description de l'espace tangent à comme un groupe de cocycles de  $\Gamma$  à coefficients dans un  $\Gamma$ -module.

Notons  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\rho}$  le  $\Gamma$ -module donné par l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  via  $\rho : \gamma \xi = \rho(\gamma) \cdot \xi$ .

**Définition IV.3.1.** — On appelle 1-cocycle une application  $c : \Gamma \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  vérifiant pour tout  $\gamma, \gamma'$ ,  $c(\gamma\gamma') = c(\gamma) + \gamma.c(\gamma')$ . L'espace des 1-cocycles est noté  $Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\rho)$ .

On appelle 1-cobord un 1-cocycle de la forme  $c_\xi(\gamma) = \xi - \gamma.\xi$ . L'espace des 1-cobords est noté  $B^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\rho)$ .

On note  $H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\rho) = Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\rho) / B^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\rho)$  le groupe de cohomologie.

La remarque du début de la section prouve la proposition :

**Proposition IV.3.2.** — Pour tout  $\rho \in \text{Rep}_\mathbb{C}^*(g)$ , l'application

$$\begin{cases} Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\rho) & \rightarrow & T_\rho \text{Rep}_\mathbb{C}^*(g) \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{2g} \\ c & \mapsto & (c(\gamma_i))_{i=1, \dots, 2g} \end{cases}$$

est un isomorphisme.

#### IV.4. Action par conjugaison

Le groupe  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  agit naturellement sur  $\text{Rep}_\mathbb{C}(g)$  par conjugaison et cette action préserve  $\text{Rep}_\mathbb{C}^*(g)$ .

**Lemme IV.4.1.** —  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  agit librement sur  $\text{Rep}_\mathbb{C}^*(g)$

*Démonstration.* — Soit  $\rho \in \text{Rep}_\mathbb{C}^*(g)$ . On veut montrer que le centralisateur de  $\rho$  dans  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$  est  $\{\pm \text{Id}\}$ . Or le centralisateur de  $\rho$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  est  $\text{End}_{\mathbb{C}[\Gamma]}(\mathbb{C}_\Gamma^2)$ , où  $\mathbb{C}_\Gamma^2$  est le  $\mathbb{C}[\Gamma]$ -module défini par  $\rho$ .  $\rho$  est irréductible donc ce module est simple et le lemme de Schur implique que  $\text{End}_{\mathbb{C}[\Gamma]}(\mathbb{C}_\Gamma^2)$  est composé des homothéties.  $\square$

Deux représentations conjuguées doivent être identifiées dans notre optique (de même qu'un morphisme d'holonomie d'une structure hyperbolique n'est défini qu'à conjugaison près). On définit donc

$$\mathcal{R}_\mathbb{C}^*(g) = \text{Rep}_\mathbb{C}^*(g) / \text{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Le principal résultat de ce chapitre est que cet ensemble est encore une variété :

**Théorème IV.4.2.** — Le quotient  $\mathcal{R}_\mathbb{C}^*(g)$  est une variété complexe de dimension  $6g - 6$ . Son espace tangent en  $[\rho]$  est canoniquement identifié à  $H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_\rho)$ .

*Démonstration.* — Fixons  $\rho \in \text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)$ . La différentielle de l'application

$$\begin{cases} \text{PSL}(2, \mathbb{C}) & \rightarrow & \text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g) \\ \sigma & \mapsto & \sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1} \end{cases}$$

est

$$\begin{cases} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) & \rightarrow & Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})_{\rho}) \\ \xi & \mapsto & c_{\xi} \end{cases}$$

Rappelons que  $c_{\xi}(\gamma) = \xi - \gamma \xi$ .

Il reste donc à vérifier que l'action de  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  sur  $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)$  est propre :

**Lemme IV.4.3.** — *Pour tout compact  $K \subset \text{Rep}_{\mathbb{C}}^*(g)$ , l'ensemble*

$$E_K := \{\sigma \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \mid \sigma K \sigma^{-1} \cap K \neq \emptyset\}$$

*est compact.*

*Démonstration.* — On fixe le compact  $K$  et une suite  $(\sigma_n)$  d'éléments de  $E_K$ . Par définition, il existe deux suites  $(\rho_n)$  et  $(\rho'_n)$  d'éléments de  $K$  telles que  $\sigma_n \rho_n = \rho'_n \sigma_n$ . Comme  $K$  est compact, on suppose que  $\rho_n \rightarrow \rho_{\infty}$  et  $\rho'_n \rightarrow \rho'_{\infty}$ .

Quitte à extraire, faisons converger la suite  $[\sigma_n]$  vers  $[\sigma_{\infty}]$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$  (qui est compact). Alors  $\sigma_{\infty}$  est non nul et vérifie  $\sigma_{\infty} \rho_{\infty} = \rho'_{\infty} \sigma_{\infty}$ . L'irréductibilité de  $\rho_{\infty}$  implique que  $\sigma_{\infty}$  est inversible. On peut donc le choisir dans  $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ . Or, comme on l'a vu plus haut et toujours grâce à l'irréductibilité, seules les homothéties commutent à  $\rho_{\infty}$  ou à  $\rho'_{\infty}$ . Donc tout  $\sigma$  tel que  $\sigma \rho_{\infty} = \rho'_{\infty} \sigma$  est proportionnel à  $\sigma_{\infty}$ . Cela implique que  $\sigma_n \rightarrow \pm \sigma_{\infty}$  et montre que  $E_K$  est compact.  $\square$

Le calcul de dimension est direct et le théorème est donc prouvé.  $\square$

## IV.5. Représentations réelles

Nous nous intéresserons plus particulièrement aux représentations à valeurs dans  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ , par exemple pour les structures hyperboliques. On note  $\text{Rep}_{\mathbb{R}}(g)$  et  $\text{Rep}_{\mathbb{R}}^*(g)$  les espaces de représentations de  $\Gamma$  à valeurs dans  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ . Et de même, on note  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^*(g) = \text{Rep}_{\mathbb{R}}^*(g)/\text{SL}(2, \mathbb{R})$ . Le travail fait dans ce chapitre en complexe se restreint bien aux réels :

**Corollaire IV.5.1.** — *L'espace  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^*(g)$  est une variété réelle de dimension  $6g - 6$ .*

*Démonstration.* — Les points de  $\text{Rep}_{\mathbb{R}}^*(g)$  sont des points lisses de la variété algébrique  $\text{Rep}_{\mathbb{C}}(g)$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Ce sont donc des points lisses de  $\text{Rep}_{\mathbb{R}}(g)$ .

La liberté locale et la propriété de l'action de  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  se déduisent du cas complexe.  $\square$

# Retour sur le théorème d'uniformisation

Nous faisons dans ce chapitre le lien entre les résultats décrits plus haut et l'uniformisation des surfaces de Riemann compactes. On fixe comme d'habitude un entier  $g \geq 2$ ,  $\Sigma_g$  est la surface compacte de genre  $g$  et  $\Gamma_g$  est son groupe fondamental.

## V.1. L'espace de Teichmüller

Cet objet a flotté en arrière-plan de ce cours sans jamais avoir été défini proprement. Or nous avons maintenant besoin de le faire, pour énoncer le théorème d'uniformisation.

Nous voulons dire que toute surface de Riemann est uniformisable. Or on sait (théorème de Gauss-Lichtenstein) que la donnée d'une structure de surface de Riemann est équivalente à celle d'une classe conforme de métrique sur  $\Sigma_g$  : cette classe conforme est définie par le fait que, localement, si on note  $z = x + iy$  une coordonnée complexe, les métriques sont proportionnelles à  $dx^2 + dy^2$ . On note donc  $\text{Mét}(\Sigma_g)$  l'espace des métriques riemanniennes sur  $\Sigma_g$ , et on munit cet espace de la convergence uniforme. On met une relation d'équivalence sur cet espace pour capturer seulement la structure de surface de Riemann sous-jacente : deux métriques  $m$  et  $m'$  sont équivalentes, noté  $m \sim m'$  s'il existe un difféomorphisme  $\varphi$  de  $\Sigma_g$ , isotope à l'identité, tel que  $m$  soit conforme à  $\varphi^*m'$ . On définit l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}_g$  comme le quotient de  $\text{Mét}(\Sigma_g)$  par

cette relation :

$$\mathcal{T}_g = \text{Mét}(\Sigma_g) / \sim .$$

## V.2. L'espace de Fricke-Klein

Rappelons que l'espace  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{f.d.}(g)$  des classes de conjugaison de représentations fidèles et discrètes de  $\pi_1(\Sigma_g)$  est un sous-ensemble de la variété réelle  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^*(g)$ , de dimension  $6g - 6$ . Le principe d'Ehresmann-Thurston d'une part (pour l'ouverture) et le théorème de Wielenberg d'autre part impliquent :

**Proposition V.2.1.** — *L'ensemble  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{f.d.}(g)$  est ouvert et fermé dans  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^*(g)$ .*

Pour toute la suite de ce chapitre, on fixe une composante connexe  $\mathcal{X}$  de  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{f.d.}(g)$ . Un point de  $\mathcal{X}$  donne une représentation fidèle et discrète de  $\Gamma_g$ , et donc une structure hyperbolique sur  $\Sigma_g$ . Ça semble indiquer qu'on a une application  $\Phi$  de  $\mathcal{X}$  dans l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}_g$ . Construisons proprement cette application.

Fixons  $X \subset \text{Rep}_{\mathbb{R}}^{f.d.}(g)$  une composante connexe au dessus de  $\mathcal{X}$ . Le groupe  $\Gamma_g$  opère sur le produit  $X \times \mathbb{H}$  par :

$$\gamma \cdot (\rho, z) = (\rho, \rho(\gamma)(z)).$$

Le quotient  $E = \Gamma \backslash X \times \mathbb{H}$  est donc un fibré au dessus de  $X$ . On note  $\pi : E \rightarrow X$  la projection. La fibre au dessus d'un point  $\rho \in X$  s'identifie à  $S_{\rho} = \Gamma \backslash \mathbb{H}$  : c'est une métrique hyperbolique  $m_{\rho}$  sur la surface  $\Sigma_g$ .

On fixe un point base  $\rho_0$  dans  $X$  et on choisit  $S = S_{\rho_0}$  comme surface de référence. Soit  $\rho \in X$ , avec un chemin  $(c(t) = \rho_t)_{t \in [0,1]}$  de  $\rho_0$  à  $\rho$ . Le fibré  $c^*E$  est trivialisable, on fixe donc une trivialisatation

$$F : [0, 1] \times S \rightarrow c^*E.$$

Alors  $f_t = F(t, \cdot)$  est un difféomorphisme de  $S$  vers  $S_t = S_{\rho_t}$ . On peut bien sûr supposer  $f_0 = \text{Id}$ . On admet le lemme suivant qui énonce que le choix du chemin et de la trivialisatation n'est pas important :

**Lemme V.2.2.** — *La classe d'isotopie de la métrique  $f_1^* m_{\rho} \in \text{Met}_S$  est indépendante du choix du chemin  $c$  de  $\rho_0$  à  $\rho$  ainsi que de la trivialisatation de  $c^*E$ .*

Montrons maintenant que la métrique (à isotopie près) ne dépend que de la classe de conjugaison de  $\rho$  :

**Lemme V.2.3.** — Soient  $\sigma$  et  $\rho \in X$  conjuguées. Alors les métriques  $f_1^*(m_\rho)$  et  $g_1^*(m_\sigma)$  sur  $S$  construites comme ci-dessus sont isotopes.

*Démonstration.* — Soit  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  telle que  $\rho = A\sigma A^{-1}$  et  $(A_t)_{t \in [0,1]}$  un chemin dans  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  reliant l'identité  $I$  à  $A$ .

Pour tout  $t$ , on a donc un difféomorphisme  $h_t : S_\sigma \rightarrow S_{A_t\sigma A_t^{-1}}$ .  $h_0$  est bien sûr l'identité et  $h_1^*m_\rho = m_\sigma$ .

D'après le lemme précédent, on peut choisir n'importe quel chemin de  $\rho_0$  à  $\rho$ . Prenons le chemin qui va à  $\sigma$  suivi du chemin  $A_t\sigma A_t^{-1}$ . Alors  $f_1^*m_\rho = (h_1 \circ g_1)^*m_\sigma = g_1^*m_\sigma$ .  $\square$

L'application  $\Phi$  est alors définie comme l'application qui à une classe de conjugaison  $[\rho] \in \mathcal{X}$  associe la classe d'isotopie de la métrique  $f_1^*m_\rho$  sur  $S$ . Cette dernière classe est bien un élément de  $\mathcal{T}_g$ . Le premier point de vue sur l'uniformisation est le

**Théorème V.2.4.** — L'application  $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{T}_g$  est un homéomorphisme.

### V.3. L'ensemble des surfaces uniformisables est ouvert

On verra par la suite une preuve plus « élémentaire » de ce résultat en passant par les  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure. On donne ici une autre preuve — en un sens plus naturelle — mais elle demande d'admettre que  $\mathcal{T}_g$  est une variété de dimension  $6g - 6$ . Dans ces conditions, elle est même assez facile grâce au théorème d'invariance du domaine de Brouwer.

**Proposition V.3.1.** — L'application  $\Phi$  est injective et ouverte.

*Démonstration.* — Grâce au théorème de Brouwer, comme  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{T}_g$  sont de même dimension (réelle)  $6g - 6$ , l'injectivité implique l'ouverture.

Le plus dur pour l'injectivité est de comprendre ce que l'on veut faire ! Soit donc  $\rho$  et  $\sigma$  dans  $X$  telles que  $\Phi([\rho]) = \Phi([\sigma])$ . Rappelons qu'on a défini des métriques  $f_1^*m_\rho$  et  $g_1^*m_\sigma$  sur une surface de référence  $S$  par trivialisations. L'égalité  $\Phi([\rho]) = \Phi([\sigma])$  veut dire, vu la définition de  $\Phi$  et de  $\mathcal{T}_g$ , qu'il existe un difféomorphisme  $\varphi$  de la surface de référence  $S$  tel que les métriques  $\varphi^*(f_1^*m_\rho)$  et  $g_1^*m_\sigma$  sont conformes.

Mais alors  $f_1 \circ \varphi \circ g_1^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  est un difféomorphisme conforme qui conjugue les actions de  $\rho$  et  $\sigma$ . C'est donc un élément de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $[\rho] = [\sigma]$ .  $\square$

Pour prouver le théorème VII.2.4 il reste donc à prouver que l'application  $\Phi$  est fermée. Cela occupe le reste de ce chapitre.

#### V.4. Caractères et invariants fondamentaux

On se place ici dans un cadre un peu plus général. On fixe un entier  $N \geq 2$ , un groupe de type fini  $\Gamma$  et une représentation  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$ .

**Définition V.4.1.** — La caractère de  $\rho$  est la fonction

$$\chi_\rho : \begin{cases} \Gamma & \rightarrow \mathbb{C} \\ \gamma & \mapsto \mathrm{tr}(\rho(\gamma)) \end{cases}$$

Évidemment deux représentations conjuguées ont le même caractère. De manière peut-être plus surprenante, la réciproque est très largement vraie. Poincaré l'a affirmé sans preuve au XIX<sup>ème</sup> siècle, mais il faudra attendre Selberg en 1960 pour le montrer. Avant de donner cette preuve, traduisons cette réciproque en terme de géométrie hyperbolique : si  $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g)$  et  $\rho$  à valeurs dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  correspondent à une structure hyperbolique, alors le caractère de  $\rho$  permet de trouver les valeurs propres de chaque élément  $\rho(\gamma)$  et donc les longueurs des géodésiques fermées. La donnée de la longueur de chaque géodésique s'appelle le *spectre marqué des longueurs*. Le résultat de Selberg permet d'affirmer que le spectre marqué des longueurs détermine la surface hyperbolique. Mentionnons que grâce à un résultat d'Otal [Ota1990] c'est encore vrai en courbure variable  $< 0$ . C'est faux cependant si on ne marque pas le spectre, c'est-à-dire qu'on ne donne que l'ensemble des longueurs de géodésiques sans spécifier à quelle géodésique elles se réfèrent.

**Proposition V.4.2 (Selberg, 1960).** — Soient  $\rho$  et  $\rho'$  deux représentations de  $\Gamma$  dans  $\mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$ . On suppose qu'elles sont irréductibles et que  $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ .

Alors  $\rho$  et  $\rho'$  sont conjuguées dans  $\mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$ .



*Démonstration.* — Considérons  $R$  le sous-espace de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  engendré par  $\rho'(\Gamma)$ . Alors  $R$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  et, comme  $\rho'$  est irréductible,  $\mathbb{C}^N$  est un  $R$ -module simple. Le lemme de Burnside [Lan2002, XVII, cor. 3.4] implique que  $R = \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ .

On fixe donc  $\gamma_1, \dots, \gamma_{N^2}$  dans  $\Gamma$  tels que la famille des  $\rho'(\gamma_i)$  est une base de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ .

Considérons l'application  $\Psi$  de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  dans  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  donnée par

$$\Psi\left(\sum \lambda_k \rho'(\gamma_k)\right) = \sum \lambda_k \rho(\gamma_k).$$

On va montrer que c'est un automorphisme d'algèbre. Un résultat général impliquera qu'il est donné par une conjugaison ce qui prouvera la proposition.

Il est clair que  $\Psi$  est un morphisme d'algèbre, il suffit de montrer qu'il est injectif. Soit donc  $X = \sum \lambda_k \rho'(\gamma_k) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  et supposons que  $\Psi(X) = 0$ . Pour tout autre élément  $Y = \sum \mu_k \rho'(\gamma_k) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ , l'égalité des caractères implique :

$$\begin{aligned} \text{tr}(XY) &= \text{tr}\left(\sum_{k,l} \lambda_k \mu_l \rho'(\gamma_k \gamma_l)\right) \\ &= \text{tr}\left(\sum_{k,l} \lambda_k \mu_l \rho(\gamma_k \gamma_l)\right) \\ &= \text{tr}(\Psi(X)\Psi(Y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or la trace est une forme bilinéaire non dégénérée, donc on a  $X = 0$  :  $\Psi$  est bien un automorphisme d'algèbre. Si  $\gamma$  est un élément quelconque de  $\Gamma$ , on peut écrire

$$\rho'(\gamma) = \sum \lambda_k \rho'(\gamma_k) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$$

et l'argument ci-dessus appliqué à  $X = \rho'(\gamma) - \sum \lambda_k \rho'(\gamma_k)$ , montre que

$$\rho(\gamma) = \sum \lambda_k \rho(\gamma_k).$$

L'automorphisme  $\Psi$  conjugue donc les représentations  $\rho$  et  $\rho'$  et la proposition découle du lemme général suivant :

**Lemme V.4.3.** — *Tout automorphisme d'algèbre  $\Psi$  de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  est intérieur.*

*Démonstration.* — On note  $E_{ij}$  les matrices élémentaires et  $p_i = \Psi(E_{ii})$ . Les  $p_i$  vérifient :  $p_i^2 = p_i$ ,  $p_i p_j = 0$  si  $i \neq j$  et  $\sum p_i = \text{Id}$ . Donc les  $p_i$

sont des projecteurs sur  $n$  droites indépendantes et quitte à conjuguer, on peut supposer  $p_i = E_{ii}$ .

Donc on a  $E_{kk}\Psi(E_{ij}) = 0$  si  $k \neq i$  et  $\Psi(E_{ij})E_{kk} = 0$  si  $k \neq j$ . Donc il existe  $a_{ij} \in \mathbb{C}^*$  tel que  $\Psi(E_{ij}) = a_{ij}E_{ij}$ . Les  $a_{ij}$  vérifient les relations  $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ ; on en déduit que  $a_{ij} = \frac{b_i}{b_j}$ . Dans ce cas,  $\Psi$  est la conjugaison par la matrice  $(\delta_i^j b_i)$ .  $\square$

L'automorphisme  $\Psi$  qu'on a construit est donc une conjugaison par une matrice  $A$  qu'on peut choisir dans  $SL(N, \mathbb{C})$ . Ça implique  $\rho = A\rho'A^{-1}$ .  $\square$

Faisons un peu plus, suivant ici encore une affirmation de Poincaré : dans le cas de  $SL(2, \mathbb{C})$ , non seulement le caractère suffit pour déterminer la représentation (à conjugaison près), mais même la donnée des traces d'un nombre fini d'éléments de  $\Gamma$ . On appellera ces traces les *invariants fondamentaux*. Dorénavant, on suppose

$$N = 2 \text{ et } \Gamma = \pi_1(\Sigma_g).$$

Pour tout élément  $\gamma \in \Gamma$ , on définit

$$\tau_\gamma : \begin{cases} \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(g) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ [\rho] & \mapsto & \chi_\rho(\gamma) = \text{tr}(\rho(\gamma)) \end{cases}$$

**Proposition V.4.4.** — *L'anneau  $T_0$  engendré par les  $(\tau_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  est de type fini.*

*Démonstration.* — Le point crucial est l'égalité suivante, valable dans  $SL(2, \mathbb{C})$  :

$$\text{tr}(A)\text{tr}(B) = \text{tr}(AB) + \text{tr}(AB^{-1}).$$

En effet, le théorème de Cayley-Hamilton peut s'écrire  $\text{tr}(A)I = A + A^{-1}$ . Il suffit de multiplier cette égalité pour  $A$  et  $B$ , puis de prendre la trace (dans  $SL(2, \mathbb{C})$ ,  $\text{tr}(A^{-1}) = \text{tr}(A)$ ).

Soient  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  une famille génératrice de  $\Gamma$ . Montrons que l'anneau engendré par tous les  $\tau_\gamma$  est égal à l'anneau  $T$  engendré seulement par les  $\tau_\gamma$  pour

$$\gamma = \gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_k}, \text{ avec } k \leq n \text{ et } i_1, \dots, i_k \text{ distincts.}$$

Soit donc un élément  $\delta = \gamma_{i_1}^{m_1} \dots \gamma_{i_r}^{m_r}$  de  $\Gamma$  (avec bien sûr  $m_j \neq 0$ ).

**Premier cas :** Montrons que si les  $i_j$  sont distincts, alors  $\tau_\delta \in T$  :

On le fait par récurrence sur l'entier  $q = \sum_{j=1}^r \max(m_j - 1, -m_j)$ . Si  $q = 0$ , alors par définition  $\tau_\delta \in T$ . Si  $q \geq 1$ , on peut conjuguer  $\delta$  de sorte

que  $m_r \neq 1$ .

Si  $m_r < 0$ , on écrit, grâce à l'équation sur les traces :

$$\tau_\delta = \tau_{\delta\gamma_{i_r}} \tau_{\gamma_{i_r}^{-1}} - \tau_{\delta\gamma_{i_r}^2}.$$

Or l'hypothèse de récurrence implique que  $\tau_{\delta\gamma_{i_r}}$  et  $\tau_{\delta\gamma_{i_r}^2}$  sont dans  $T$  et  $\tau_{\gamma_{i_r}^{-1}} = \tau_{\gamma_{i_r}}$  est dans  $T$ . Donc  $\tau_\delta$  est dans  $T$ .

Si  $m_r > 1$ , on fait le même raisonnement en multipliant par  $\gamma_{i_r}^{-1}$  au lieu de  $\gamma_{i_r}$ .

**Cas général** On travaille maintenant par récurrence sur  $r$ . D'après le cas particulier déjà traité on a  $r \geq 2$  et (quitte à conjuguer) il existe  $1 \leq j < r$  tel que  $i_j = i_r$ . Posons

$$\alpha = \gamma_{i_1}^{m_1} \dots \gamma_{i_j}^{m_j} \text{ et } \alpha = \gamma_{i_{j+1}}^{m_{j+1}} \dots \gamma_{i_r}^{m_r}.$$

On conclut la preuve de la proposition grâce à la relation (encore donnée par la relation sur les traces) :

$$\tau_\delta = \tau_{\alpha\beta} = \tau_\alpha \tau_\beta - \tau_{\alpha\beta^{-1}}.$$

□

On fixe donc une fois pour toutes une famille finie  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  d'éléments de  $\Gamma$  tel que  $\tau_{\alpha_1}, \dots, \tau_{\alpha_n}$  engendrent l'anneau  $T_0$ . On définit la fonction

$$t : \begin{cases} \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}) & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ [\rho] & \rightarrow & t(\rho) = (\tau_{\alpha_1}(\rho), \dots, \tau_{\alpha_n}(\rho)) \end{cases}$$

Les composantes du vecteur  $t(\rho)$  sont appelés *invariants fondamentaux* du groupe  $\rho(\Gamma)$ .

Un point crucial dans la fermeture est la propriété de l'application  $t$  :

**Proposition V.4.5.** — *L'application  $t|_1$ , restriction de  $t$  à la composante connexe  $\mathcal{X}$  de  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{f,d}(\mathfrak{g})$ , est injective et propre.*



# Structures projectives complexes et équations différentielles

## VI.1. Dictionnaire

On établit ici l'équivalence entre la notion de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure sur une surface et certaines équations différentielles.

### VI.1.1. De la structure à une équation

On fixe une surface de Riemann  $S$  munie d'une  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure compatible, c'est-à-dire pour laquelle les cartes sont holomorphes.

On appelle *ouvert de coordonnées* de  $S$  un couple  $(U, z)$  où  $U$  est un ouvert connexe de  $S$  et  $z : V \subset \mathbb{C} \rightarrow U$  une coordonnée locale (un bi-holomorphisme local). Pour spécifier la coordonnée utilisée sur l'ouvert  $U$ , on le note parfois  $U_z$ . Remarquons que nous n'avons pas demandé à  $z$  d'être injective. Par exemple, si le revêtement universel  $\tilde{S}$  est un ouvert de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , alors la projection de revêtement est une coordonnée locale. Rappelons la dérivée schwarzienne déjà introduite au premier chapitre :

**Définition VI.1.1.** — Si  $f : U_z \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  est méromorphe, on définit sa dérivée schwarzienne par rapport à  $z$ , notée  $S(f)$  ou  $\{f, z\}$  par la formule (les dérivées sont par rapport à  $z$ ) :

$$\{f, z\} = \left( \frac{f''}{f'} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{f'''}{f'} \right)^2.$$

Les propriétés suivantes découlent directement de la définition :

**Lemme VI.1.2.** — — Si  $h \circ z : V \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  est une homographie, alors  $\{h, z\} = 0$ .

– Si  $z$  et  $z'$  sont deux coordonnées sur  $U$ , on a la relation de cocycle :

$$\{f, z'\}dz'^2 = \{f, z\}dz^2 + \{z, z'\}dz'^2.$$

– En particulier  $\{z, z'\}dz'^2 = -\{z', z\}dz^2$ .

Notons  $\tilde{S}_u$  le revêtement universel de  $S$  muni d'une coordonnée globale  $u$ , telle que l'action du  $\pi_1$  est donné par des homographies de la coordonnée (par exemple en ayant fixé une  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure de référence). On a vu à la fin du premier chapitre que si  $D : \tilde{S}_u \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  est une développante d'une  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure, alors  $\{D, u\}du^2$  est une différentielle quadratique sur  $\tilde{S}$  invariante par l'action de  $\Gamma = \pi_1(S)$ . Elle descend donc en une différentielle quadratique  $\omega$  sur  $S$ . La proposition suivante est le premier pas vers notre dictionnaire :

**Proposition VI.1.3.** — Sur tout ouvert de coordonnées  $(U, z)$ ,  $D$  est le quotient de deux solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$E : \frac{d^2 f}{dz^2} + \{D, z\}f = 0.$$

*Démonstration.* — On vérifie aisément que localement  $\frac{D}{\sqrt{\frac{dD}{dz}}}$  et  $\frac{1}{\sqrt{\frac{dD}{dz}}}$  sont des solutions. □

**Remarque VI.1.4.** — Il faut bien vérifier que cette équation différentielle est bien définie sur  $U$  (rappelons que la coordonnée  $z$  n'est pas forcément injective). Mais, par les propriétés de  $D$  et de l'holonomie associée  $\rho$ , si  $\gamma \in \pi_1(U)$ , on le voit comme un élément de  $\pi_1(S)$ , et alors  $D \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ D$ , et les propriétés de la dérivée schwarzienne impliquent que

$$\left(\frac{d^2 f}{dz^2} + \{D, z\}f\right)(\gamma(z)) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 f}{dz^2} + \{D, z\}f = 0$$

Une structure projective sur  $S$  permet de définir cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 particulière. On verra que la donnée d'une équation différentielle sur  $S$  linéaire d'ordre 2 permet de définir une  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure et que, modulo les bonnes relations d'équivalences, ces deux notions sont équivalentes. Avant ça, voyons quelques exemples.

VI.1.1.i. *Structures projectives en genre 1.* — On fixe une courbe elliptique  $\mathcal{C} = \mathbb{C}/\Lambda$  et on note  $u : \tilde{\mathcal{C}} = \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C} = \mathbb{C}/\Lambda$  la coordonnée d'uniformisation, c'est à dire la projection de revêtement. Cette coordonnée induit la  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure standard, de développante  $\tilde{\mathcal{C}}_u \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  donnée par l'identité. L'équation différentielle associée est triviale  $E_0 : \frac{d^2 f}{du^2} = 0$ .

On connaît les structures affines, données par les développantes  $D_c : u \rightarrow e^{cu}$ . L'équation différentielle associée est

$$E_c : \frac{d^2 f}{du^2} + c^2 f = 0.$$

On obtient la même équation pour  $c$  et  $-c$ . C'est normal, car les développantes  $D_c$  et  $D_{-c}$  sont conjuguées par  $z \rightarrow \frac{1}{z}$ . On verra au prochain paragraphe que ce sont les seules équations possibles, ce qui montre que toutes les structures sur le tore sont affines.

Si maintenant on se donne une courbe elliptique  $\mathcal{C}$  sous forme algébrique de Weierstrass :  $\mathcal{C} = \{y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\}$ , il est intéressant d'écrire l'équation dans la coordonnée  $x$ . Soit donc  $U_x$  l'ouvert de  $\mathcal{C}$  sur lequel  $x$  est une coordonnée locale. On sait, en utilisant la fonction  $\wp$  que  $x = \wp(u)$  et  $y = \wp'(u)$ . Dans la coordonnée  $x$ , l'équation associée à la structure standard est d'après la proposition :

$$E : \frac{d^2 f}{dx^2} + \{u, x\}f = 0.$$

Or  $\{u, x\}dx^2 = -\{x, u\}du^2 = -\{\wp(u), u\}du^2$ . Comme de plus on a

$$y^2 = (\wp'(u))^2 = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3,$$

on peut calculer  $\wp''(u)$  et  $\wp'''(u)$  en fonction de  $x = \wp(u)$  et  $y = \wp'(u)$ . De plus  $\frac{dx}{y} = \frac{d(\wp(u))}{\wp'(u)} = du$ . On peut donc calculer la dérivée schwarzienne  $\{\wp(u), u\}du^2$  en fonction de  $x$  et  $y$  (donc de  $x$ ), et on obtient :

$$E : \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{12(x - x^2) + g_2}{(4x^3 - g_2x - g_3)^2} f = 0.$$

## VI.1.2. Équations sur un ouvert de coordonnées

On fixe dans ce paragraphe un ouvert de coordonnée  $(U, z)$ . On notera  $\tilde{U}$  le revêtement universel de  $U$  et  $\Pi$  la projection de revêtement.

**Définition VI.1.5.** — Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur  $U$  est une équation de la forme

$$E : \frac{d^2 f}{dz^2} + h \frac{df}{dz} + \ell f = 0,$$

où  $h$  et  $\ell$  sont deux fonctions holomorphes sur  $U$ .

On dit que cette équation est réduite si  $h = 0$ .

**Remarque VI.1.6.** — Dans tout ce cours, nous n'envisagerons que des équations différentielles linéaires d'ordre 2. On se permet dorénavant de ne dire que « équations différentielles » pour alléger la rédaction.

On a besoin de la notion de solution de cette équation. Tout l'intérêt de ces équations différentielles va être qu'elles vont donner lieu à de la monodromie (i.e. une action du  $\pi_1(U)$ ). Le prix à payer est que les solutions ne seront définies qu'au revêtement universel  $\tilde{U}$ . Notons que  $z$  définit encore une coordonnée locale sur  $\tilde{U}$ .

**Définition VI.1.7.** — Une solution de  $E$  est une application  $f : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{CP}^1$  telle que, partout localement dans la coordonnée  $z$ , on a :

$$\frac{d^2 f}{dz^2}(z) + (h \circ \Pi)(z) \frac{df}{dz}(z) + (\ell \circ \Pi)(z) f(z) = 0.$$

Nous allons maintenant faire un pas supplémentaire vers l'équivalence entre  $\mathbb{CP}^1$ -structure et équations différentielles sur  $S$  : nous montrons comment une équation différentielle sur  $U$  définit une unique  $\mathbb{CP}^1$ -structure sur  $U$ . On fixe donc une telle équation  $E$ . Une développante de cette structure est non pas une solution de  $E$ , mais un quotient de deux solutions indépendantes. Soit donc

$$W(E) = \{w = \frac{f_1}{f_2} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{CP}^1 \mid (f_1, f_2) \text{ 2 sol. indépendantes de } E\}.$$

**Remarque VI.1.8.** — Tout couple de solutions indépendantes de  $E$  est aussi une base de l'espace des solutions. Donc si  $w$  et  $w'$  sont dans  $W(E)$ , il existe  $M \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$  telle que  $w' = M.w$  (l'action est par homographie). Autrement dit, pour tout  $w \in W(E)$ , on a  $W(E) = \text{PGL}(2, \mathbb{C}).w$ .

On peut maintenant définir la monodromie d'une équation. En effet, si  $\gamma \in \pi_1(U)$ , et  $f$  est solution de  $E$ , alors  $f \circ \gamma$  est encore solution. Autrement dit,  $\gamma$  définit un automorphisme linéaire de l'espace des solutions de  $E$ . Choisissons  $w = \frac{f_1}{f_2}$  de manière à avoir une base de l'espace des solutions. Dans cette base, notons  $r(\gamma)$  la projection dans  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$  de l'action de  $\gamma$ . On a alors  $w \circ \gamma = r(\gamma).w$ . Et  $r : \Gamma \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{C})$  est un morphisme, appelé *morphisme de monodromie de  $E$*  associé à  $w$  et noté  $\text{Mon}_E(w)$ . Si on avait choisi comme point base  $w' = g.w$ , alors on aurait construit le morphisme  $\text{Mon}_E(w')(\gamma) = g \text{Mon}_E(w)(\gamma) g^{-1}$ .



Le couple  $(w, \text{Mon}_E(w))$  est de la même nature que le couple développante/holonomie d'une  $(G, X)$ -structure : la monodromie n'est a priori définie qu'à conjugaison près, mais est bien définie une fois choisie  $w$ . Montrons que ce sont bien les mêmes objets :

**Proposition VI.1.9.** — *Si  $w \in W(E)$ , le couple  $(w, \text{Mon}_w(E))$  est le couple développante/holonomie d'une  $\mathbb{CP}^1$ -structure. De plus cette structure ne dépend que de  $E$ , pas du choix de  $w$ .*

*Démonstration.* — Les relations entre les couples  $(w, \text{Mon}_E(w))$  et  $(w', \text{Mon}_E(w'))$  montrent que si  $(w, \text{Mon}_E(w))$  définit une  $\mathbb{CP}^1$ -structure, alors  $(w', \text{Mon}_E(w'))$  définit la même.

Il reste uniquement à montrer que  $w$  est un biholomorphisme local, soit que sa dérivée  $w'$  ne s'annule jamais. Plaçons nous en un point  $z$ . Quitte à remplacer  $w$  par  $\frac{1}{w}$ , on peut supposer que  $f_2(z) \neq 0$  (par indépendance,  $f_1$  et  $f_2$  ne s'annulent pas simultanément). Alors on a

$$w' = \frac{f_1'f_2 - f_1f_2'}{f_2^2} \neq 0.$$

□

Tirons en immédiatement le fait que toutes les structures sur le tore sont affines :

**Corollaire VI.1.10.** — *Toutes les structures projectives sur le tore sont affines.*

*Démonstration.* — Considérons une telle structure, et  $D$  une développante. Alors l'équation différentielle associée dans la coordonnée  $u$  est :

$$E : \frac{d^2f}{du^2} + \{D, u\}f = 0.$$

Donc  $\{D, u\}$  est une fonction elliptique holomorphe sur  $\mathbb{C}$  : c'est une constante. Il existe  $c$  telle que  $E = E_c : \frac{d^2f}{du^2} + c^2f = 0$ . D'après la proposition précédente, la structure est la structure affine définie par la développante  $u \rightarrow e^{cu}$ . □

Dans le cadre de ce cours, seule la  $\mathbb{CP}^1$ -structure nous importe. Cela donne une relation d'équivalence sur l'espace des équations différentielles sur  $U$  :

**Définition VI.1.11.** — *Deux équations différentielles sur  $U$  sont équivalentes si elles définissent la même  $\mathbb{CP}^1$ -structure.*

Cette relation n'est pas difficile à comprendre concrètement :

**Proposition VI.1.12.** — Soient deux équations  $E$  et  $E'$ . On a équivalence des trois propriétés :

1.  $E$  et  $E'$  sont équivalentes,
2.  $W(E) = W(E')$
3. il existe une fonction holomorphe sans zéro  $k : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}^*$  telle que  
( $f$  est solution de  $E$ )  $\Leftrightarrow$  ( $f' = kf$  est solution de  $E'$ )

*Démonstration.* — Les implications (3)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (1) sont claires. Montrons (1)  $\Rightarrow$  (3) : soit  $w = \frac{f_1}{f_2}$  et  $w' = \frac{f'_1}{f'_2}$  un choix de développantes pour  $E$  et  $E'$ . Comme les structures sont les mêmes, on peut choisir  $w = w'$ .

Mais alors  $\frac{f_1}{f'_1} = \frac{f_2}{f'_2} = k$  est une fonction méromorphe sur  $\tilde{U}$ . Elle n'a pas de zéro, sinon  $f_1$  et  $f_2$  ont un zéro commun (rappelons que les fonctions  $f_i$  sont holomorphes). De même elle n'a pas de pôle. Comme  $f_1$  et  $f_2$  engendrent les solutions de  $E$  et  $f'_1$  et  $f'_2$  engendrent les solutions de  $E'$ , on obtient bien la propriété (3).  $\square$

Un petit calcul montre que dans chaque classe d'équivalence, il y a une unique équation réduite :

**Proposition VI.1.13.** — Si  $E$  est une équation différentielle sur  $U$ , il existe une unique équation réduite équivalente à  $E$ .

*Démonstration.* — On cherche les fonctions  $k$  de la proposition précédente telle que  $E'$  soit réduite. On obtient la condition :

$$\frac{dk}{dz} = -\frac{1}{2}hk,$$

donc, à une constante multiplicative près (qui ne change pas  $E'$ ), il y a une unique fonction qui convient. Dans ce cas, l'équation réduite s'écrit :

$$E' : \frac{d^2 f}{dz^2} + \left( \ell - \frac{1}{2} \frac{dh}{dz} - \frac{1}{4} h^2 \right) f = 0.$$

$\square$

La conclusion de ce paragraphe est que sur un ouvert de coordonnée, il y a équivalence entre les notions d'équation réduite et de  $\mathbb{C}P^1$ -structure. Nous allons maintenant voir comment généraliser ça à toute la surface  $S$ .

### VI.1.3. Équation différentielle sur une surface

Ce concept ne pose pas véritablement problème : une équation différentielle sur une surface  $S$  est une collection finie d'équations différentielles sur un recouvrement par des ouverts de coordonnées, de manière à ce que sur les intersections, les équations différentielles soient compatibles. En pratique, on privilégiera un ouvert de coordonnées particulier (par exemple sur une courbe algébrique définie par  $P(x, y) = 0$ , l'ouvert où  $x$  est une coordonnée locale).

**Définition VI.1.14.** — Une équation différentielle sur un ouvert de coordonnée  $(U_0, z_0)$  est dite *globalisable* si il existe un recouvrement de  $S$  par des ouverts de coordonnées  $(U_i, z_i)$  et des équations différentielles  $E_i$  sur  $U_i$  tel que sur  $U_i \cap U_j$ ,  $E_i$  et  $E_j$  sont équivalentes.

Elle est dite *normale* si elle est réduite (sur  $(U_0, z_0)$ ) et globalisable.

Le théorème suivant est alors presque une tautologie : les notions de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure sur  $S$  et d'équation normale sur  $(U_0, z_0)$  sont équivalentes.

**Théorème VI.1.15.** — *L'ensemble des  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structures compatibles sur une surface de Riemann  $S$  est en bijection avec l'ensemble des équations normales sur un ouvert de coordonnée  $(U, z)$  fixé.*

*Démonstration.* — La preuve est surtout le résumé du cours. On fixe  $(U, z)$  un ouvert de coordonnée. Si on a une  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure, on choisit une développante  $D$  et l'équation  $E : \frac{d^2f}{dz^2} + \{D, z\}f = 0$  est l'unique équation normale telle que  $D \in W(E)$ .

Réciproquement si on a une équation normale  $E$ , on choisit des équations  $E_i$  sur un recouvrement par des ouverts de coordonnées  $(U_i, z_i)$ . On a donc des  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structures sur chaque  $U_i$ . Le fait que les équations sont équivalentes sur chaque intersection implique que les  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structures sont les mêmes : les changements de cartes sont des homographies. Donc on a bien une  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure sur  $S$ , dont toute développante appartient à  $W(E)$ .  $\square$

Le point de vue de ce cours va maintenant être de comprendre l'espace des  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structures sous la forme de l'espace des équations normales sur un ouvert de coordonnées. C'est intimement lié à la vision fibrée développée dans le premier chapitre, mais nous ne développerons pas ce lien.

## VI.2. L'espace des $\mathbb{C}P^1$ -structures sur une courbe de genre $g$

Le but de cette section est principalement de prouver le théorème suivant :

**Théorème VI.2.1.** — *Soit  $S$  une surface de Riemann compacte de genre  $g \geq 2$ . Elle admet une  $\mathbb{C}P^1$ -structure compatible. De plus, l'ensemble des  $\mathbb{C}P^1$ -structures est un espace affine sur les différentielles quadratiques sur  $S$ , de dimension (complexe)  $3g - 3$ .*

On le verra d'abord sous une forme plutôt abstraite via une vision cohomologique des équations globalisables, puis l'utilisation de la dualité de Serre et du théorème de Riemann-Roch. Dans un deuxième temps, nous indiquerons comment retrouver le même résultat si on suppose que  $S$  est une courbe algébrique définie par  $P(x, y) = 0$ . Rappelons que le théorème de Riemann-Roch permet de montrer que toute surface de Riemann compacte est algébrique.

### VI.2.1. Équations globalisables et différentielles quadratiques

On fixe une surface compacte  $S$  et un recouvrement par des ouverts de coordonnée  $(U_i, z_i)_{0 \leq i \leq k}$ .

**Proposition VI.2.2.** — *L'équation réduite  $E_0 : \frac{d^2 f}{dz_0^2} + h_0 f = 0$  est globalisable si et seulement si il existe des fonctions  $h_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe telles que pour tout  $i, j$  sur  $U_i \cap U_j$ , on a :*

$$h_i dz_i^2 = h_j dz_j^2 + \{z_j, z_i\} dz_i^2.$$

Autrement dit, les  $h_i$  se comportent comme des dérivées schwarziennes d'une même fonction, par rapport aux  $z_i$ .

*Démonstration.* — Si l'équation est globalisable, elle est alors associée à une  $\mathbb{C}P^1$ -structure sur la surface. Soit  $D$  une développante de cette structure. Alors, pour tout  $i$ , on définit  $h_i = \{D, z_i\}$ . On est ramené à la relation de cocycle de la dérivée schwarzienne.

Réciproquement, si on possède la collection des  $h_i$ , il suffit de montrer que les équations  $E_i : \frac{d^2 f}{dz_i^2} + h_i f = 0$  et  $E_j : \frac{d^2 f}{dz_j^2} + h_j f = 0$  sont équivalentes sur  $U_i \cap U_j$ . Pour ça, soit  $w \in W(E_i)$ . On a  $h_i = \{w, z_i\}$ . La relation de cocycle implique encore que  $h_j = \{w, z_j\}$  sur  $U_i \cap U_j$ . Donc,  $w \in W(E_j)$ .  $\square$

En utilisant un vocabulaire plus sophistiqué, l'existence d'une équation globalisable revient à dire que la collection  $\{z_i, z_j\}dz_j^2$  est un cobord. On vérifie facilement que c'est un cocycle (à valeurs dans les différentielles quadratiques  $\Omega(2\mathcal{K})$ ) : c'est la fameuse relation de cocycle

$$\{z_k, z_j\}dz_j^2 + \{z_j, z_i\}dz_i^2 + \{z_i, z_k\}dz_k^2 = 0.$$

L'existence d'une équation globalisable est alors donnée par la dualité de Serre :

$$H^1(S, \Omega(2\mathcal{K})) \simeq H^0(S, \Omega(-\mathcal{K})).$$

Or le deuxième terme est nul :  $\deg(-\mathcal{K}) = 2 - 2g < 0$ . Donc le cocycle  $\{z_i, z_j\}dz_j^2$  est un cobord. De plus, les différentes  $\mathbb{C}P^1$ -structures sont données par des cocycles  $h_i dz_i^2$  cohomologues. On voit apparaître ainsi l'espace affine sous les différentielles quadratiques : si on possède un tel cocycle, tout autre est donné par translation par un élément de  $H^0(S, \Omega(2\mathcal{K}))$ , c'est à dire une différentielle quadratique holomorphe sur  $S$ . La dimension de cet espace est donnée par le théorème de Riemann-Roch :

$$\dim H^0(S, \Omega(2\mathcal{K})) = \dim H^0(S, \Omega(-\mathcal{K})) + 4g - 4 - g + 1 = 3g - 3.$$

Nous avons délibérément survolé cette dernière partie et laissons le lecteur utiliser un cours de Surfaces de Riemann pour le comprendre en détail. Nous proposons maintenant une autre approche, plus concrète : utiliser le fait que les surfaces de Riemann compactes sont des courbes algébriques et construire les équations globalisables à la main. Le lecteur peut voir dans ces deux présentations différentes une illustration du théorème de Riemann-Roch et de la dualité de Serre.

### VI.2.2. Cas des courbes algébriques

On suppose maintenant que  $S$  est la surface de Riemann associée à une courbe algébrique  $X$  définie par  $P(x, y) = 0$ . C'est toujours le cas pour une surface de Riemann compacte et on peut même supposer que  $X$  est *nodale* (i.e. ses singularités sont des points doubles ordinaires), *transverse à l'infini* (au voisinage de l'infini,  $\frac{1}{x}$  est une carte) et que la projection sur la première coordonnée  $x : X \rightarrow \mathbb{C}P^1$  ne présente que des ramifications doubles. On fera toujours ces hypothèses simplificatrices. On note  $R$  l'ensemble des points de ramifications de  $x$  et  $S_\infty$  les points à l'infini. La surface  $S$  est alors couverte par trois ouverts de coordonnée :

- $(U_x, x)$ , où  $U_x = S \setminus (R \cup S_\infty)$  est l'ouvert sur lequel  $x$  est une coordonnée locale,
- $(U_y, y)$ , où  $U_y$  est un voisinage ouvert de  $R$  sur lequel  $y$  est une coordonnée locale,
- $(U_\infty, \frac{1}{x})$ , où  $U_\infty$  est un voisinage ouvert de  $S_\infty$  sur lequel  $\frac{1}{x}$  est une coordonnée locale.

De plus on choisit  $U_y$  et  $U_\infty$  disjoints.

On veut maintenant construire une équation globalisable, c'est à dire une fonction  $h_x$  sur  $U_x$  telle qu'il existe  $h_\infty$  et  $h_y$  vérifiant l'équation de la proposition VI.2.2.

L'équation sur  $h_\infty$  s'écrit  $h_x dx^2 = h_\infty d(\frac{1}{x})^2$ . Autrement dit,  $h_x dx^2$  doit se prolonger en une différentielle quadratique à l'infini.

L'équation sur  $h_y$  s'écrit  $h_x dx^2 = h_y dy^2 + \frac{1}{2}\{y, x\}dx^2$ . Autrement dit,  $h_x dx^2$  se prolonge en une différentielle quadratique méromorphe dont les pôles sont ceux de  $\{y, x\}dx^2$ . Or en un point de  $R$ , à un changement de variables près,  $y = x^2$ . Donc on a :

$$\begin{aligned} \{y, x\}dx^2 &= -\{x, y\}dy^2 \\ &= -\{\sqrt{y}, y\}dy^2 \\ &= \frac{3}{8y^2}dy^2 \end{aligned}$$

Donc on cherche une différentielle quadratique méromorphe qui a des pôles d'ordre 2 et une partie polaire prescrite en chaque point de  $R$ . La dimension de cet espace est à nouveau donnée par le théorème de Riemann-Roch. L'espace des différentielles quadratiques de pôles d'ordre au plus 2 en les points de  $R$  est de dimension (avec les notations classiques) :

$$\begin{aligned} l(2\mathcal{K} + 2R) &= l(\mathcal{K} - (2\mathcal{K} + 2R)) + \deg(2\mathcal{K} + 2R) + 1 - g \\ &= 0 + 2\deg(R) + 2(2g - 2) + 1 - g \\ &= 3g - 3 + 2\deg(R). \end{aligned}$$

Or les parties polaires sont prescrites en tous les points de  $R$ . Ça donne 2 conditions linéaires en chaque point de  $R$  :  $2\deg(R)$  conditions indépendantes. La dimension des équations globalisables est donc bien  $3g - 3$ .

A nouveau, on peut vérifier ça très concrètement en coordonnées. Notons  $\mathcal{P}_p$  l'espace des polynômes  $Q \in \mathbb{C}[x, y]$  de degré total inférieur à

$4\deg(P) - 8$ ,  $Q$  a un zéro d'ordre 4 en chaque point double de  $X$  et en chaque point de ramification de  $x$ ,  $\frac{Q}{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^4} - \{x, y\}$  est holomorphe.

**Proposition VI.2.3.** — *Les différentielles quadratiques vérifiant les conditions ci-dessus sont celles de la forme :*

$$\frac{Q}{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^4} dx^2,$$

où  $Q \in \mathcal{P}_P / \langle P \rangle$ .

*Démonstration.* — Nous laissons le lecteur le vérifier en détail. Mentionnons que la condition de degré implique l'holomorphie en les points à l'infini, l'annulation à l'ordre 4 implique l'holomorphie en les points doubles. Enfin la condition en les points de ramifications prescrit la bonne partie polaire.  $\square$

### VI.2.3. Monodromie

On a vu qu'une équation différentielle sur un ouvert de coordonnées  $(U, z)$  définit, à conjugaison près, un morphisme de monodromie de  $\pi_1(U)$ . Supposons, comme c'est le cas pour les courbes algébriques, que  $U$  est la surface privée d'un nombre fini de point. Alors  $\pi_1(U)$  se surjecte sur  $\pi_1(S)$ . De plus, si l'équation est globalisable, alors les lacets entourant un point de  $S \setminus U$  ont une monodromie triviale (il suffit de la calculer dans une carte autour de ce point).

Ainsi si une équation  $E$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{E}_S$  des équations globalisables, elle définit une représentation  $\text{Mon}(E)$  de  $\pi_1(S)$ , à conjugaison près. Autrement dit, si on note  $g$  le genre de  $S$ , on a une application bien définie :

$$\text{Mon}_S : \begin{cases} \mathcal{E}_S & \rightarrow \mathcal{R}(g) \\ E & \mapsto [\text{Mon}_S(E)] \end{cases}$$

Mentionnons que  $\text{Mon}_S(E)$  est par construction la classe de conjugaison de la représentation d'holonomie de la  $\mathbb{C}P^1$ -structure associée.

**Proposition VI.2.4.** — *L'application  $\text{Mon}_S$  est holomorphe.*

*Démonstration.* — C'est la dépendance holomorphe des solutions d'une équation différentielle par rapport aux coefficients.  $\square$

### VI.2.4. Uniformisation

Nous pouvons relier ces notions au problème de l'uniformisation :

**Définition VI.2.5.** — On dit qu'une équation est uniformisante si la  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure associée est une structure hyperbolique.

**Proposition VI.2.6.** — *Il y a au plus une équation uniformisante sur une surface de Riemann.*

*Démonstration.* — Deux structures hyperboliques sont conjuguées par un élément de  $\text{Aut}(\mathbb{H})$ , donc sont identiques en tant que  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structures.  $\square$

## VI.3. Equations différentielles sur une famille de courbes

L'idée de montrer le théorème d'uniformisation par la méthode de continuité appliquée aux équations différentielles est de montrer que l'ensemble des courbes possédant une équation uniformisante est ouvert et fermé dans « l'espace des courbes », qu'on espère connexe ! Nous définissons ici les objets avant de montrer l'ouverture à la section suivante.

### VI.3.1. La variété des courbes nodales

On fixe  $d, g$  deux entiers tels que  $2g < \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ , et on considère la variété de Severi :

$$\mathcal{S}_{g,d} = \{P \in \mathbb{C}_d[x, y] \mid X : P(x, y, z) = 0 \text{ est nodale de genre } g\}.$$

C'est un sous-ensemble de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ . On a :

**Théorème VI.3.1 (Severi).** —  $\mathcal{S}_{g,d}$  est lisse connexe, de dimension  $3d + g - 1 - \frac{d(d+3)}{2} - \delta$ , où  $\delta$  est le nombre de points doubles et vaut  $\frac{(d-1)(d-2)}{2} - g$ .

Toute surface de Riemann compacte de genre  $g$  est la surface de Riemann associée à un élément (et même plusieurs) de  $\mathcal{S}_{g,d}$ . Dans  $\mathcal{S}_{g,d}$ , l'espace des courbes qui sont de plus transverses à l'infini et à ramification (de  $x$ ) doubles est le complémentaire d'une union de sous-variétés de codimension  $> 0$ , donc reste connexe. Nous négligerons ce dernier problème dans la suite du chapitre.



### VI.3.2. Le fibré des équations différentielles

On construit ici un point de vue global : un objet (fibré au dessus de  $\mathcal{S}_{g,d}$ ) qui contient toutes les équations globalisables sur toutes les courbes nodales. On réinterprétera le théorème d'uniformisation en ces termes.

Soit  $P \in \mathcal{S}_{g,d}$ . On dispose alors de l'espace  $\mathcal{E}_P$  des équations différentielles globalisables sur la surface de Riemann  $\hat{X}_P$  associée. Ça forme un fibré en espaces affines au-dessus de  $\mathcal{S}_{g,d}$ . La proposition VI.2.3 donne une description simple des fibres sous la forme  $\mathcal{P}_P/\langle P \rangle$ . Si on regarde la définition de  $\mathcal{P}_P$ , on voit que cet espace affine est défini par des équations linéaire à coefficients holomorphes en les coefficients de  $P$  ; on en déduit :

**Proposition VI.3.2.** — *Le fibré  $\mathcal{E}_{g,d}$  en  $\mathcal{E}_P$  au dessus de  $\mathcal{S}_{g,d}$  est holomorphe.*

*Démonstration.* — Soit  $P \in \mathcal{S}_{g,d}$ . On fixe un supplémentaire  $F$  à  $\langle P \rangle = \mathbb{C}[x,y]P$  dans  $\mathbb{C}[x,y]$ . Alors pour tout  $P'$  suffisamment proche,  $F$  est encore supplémentaire à  $\langle P' \rangle$ . Sur ce voisinage,  $\mathcal{E}_{P'}$  est isomorphe à un sous-espace affine dont les équations dépendent holomorphiquement des coefficients de  $P'$ .  $\square$

### VI.3.3. Application de monodromie (bis)

On a vu qu'à chaque équation différentielle sur une courbe, i.e. à chaque point de  $\mathcal{E}_{g,d}$ , correspond une application de monodromie, soit un élément de  $\mathcal{R}(g)$ . On a aussi vu que cette application dépend holomorphiquement d'un point dans la fibre d'une courbe fixée. On montre ici la dépendance holomorphe par rapport à tout  $\mathcal{E}_{g,d}$ . Le problème pour ce faire est que maintenant le groupe fondamental change : comment identifier les groupe fondamentaux de deux surfaces de Riemann de genre  $g$  ? C'est possible localement.

Soit  $P \in \mathcal{S}_{g,d}$ . On note  $U_x(P)$  l'image du lieu lisse de  $x : X_P \rightarrow \mathbb{CP}^1$ . C'est tout  $\mathbb{CP}^1$  privé d'un nombre fini de point. De plus, tout élément de  $\pi_1(\hat{X}_P)$  est représenté par un lacet (lisse) dans  $U_x(P)$ . Notons  $c_1, \dots, c_{2g}$  un tel choix de lacets pour un ensemble générateur standard de  $\pi_1(\hat{X}_P)$ .

**Proposition VI.3.3.** — *Il existe un ouvert  $U_P$  de  $\mathcal{S}_{g,d}$  tel que pour  $P'$  dans  $U_P$ , les lacets  $c_1, \dots, c_{2g}$  sont encore inclus dans  $U_x(P')$  et représentent des*

générateurs  $\gamma_1(P'), \dots, \gamma_{2g}(P')$  standards de  $\pi_1(P')$ . Cela induit un isomorphisme  $\pi_1(P') \simeq \pi_1(P)$ .

*Démonstration.* — Les points de  $\mathbb{C}P^1$  qui manquent à  $U_x(P')$  dépendent holomorphiquement de  $P'$ . Donc si on bouge suffisamment peu, il y a un homéomorphisme de  $U_x(P)$  dans  $U_x(P')$  qui fixe les lacets. Tout le reste s'en déduit.  $\square$

Sur  $U_P$ , on a donc une identification globale de  $\pi_1(\hat{X}_{P'})$  avec  $\pi_1(\hat{X}_P)$ . Vu l'ensemble générateur choisi, on a aussi une identification naturelle de  $\pi_1(\Sigma_g)$  et  $\pi_1(\hat{X}_P)$ . Notons  $\Phi_{U_P}^{P'}$  l'isomorphisme de  $\pi_1(\Sigma_g)$  vers  $\pi_1(\hat{X}_{P'})$  défini ainsi. Ça permet de définir une application de monodromie sur le fibré  $\mathcal{E}_{U_P}$  au dessus de  $U_P$  :

$$\text{Mon}_{U_P} : \begin{cases} \mathcal{E}_{U_P} & \rightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{C}}^*(g) \\ (P', E) & \mapsto \text{Mon}_{\hat{X}_{P'}}(E) \circ \Phi_{U_P}^{P'} \end{cases}$$

Nous nous sommes mis dans le bon cadre pour constater :

**Proposition VI.3.4.** — *L'application  $\text{Mon}_{U_P}$  est holomorphe sur  $U_P$ .*

*Démonstration.* — L'application  $\text{Mon}_{\hat{X}_{P'}}(E)$  se calcule en résolvant l'équation différentielle  $E$  en la coordonnée  $x$  le long des  $c_i$ . Or bouger holomorphiquement le point  $(P', E)$  implique que, lue dans la coordonnée  $x$ , l'équation bouge holomorphiquement. Le théorème de dépendance holomorphe des solutions d'une équation différentielle en les coefficients assure que la monodromie des  $c_i$  évolue holomorphiquement.  $\square$

## VI.4. Équations uniformisantes

Une équation uniformisante a sa monodromie réelle (i.e. dans  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^*(g)$ ). Nous allons voir que au voisinage d'une équation uniformisante, la réciproque est vraie. C'est bien sûr faux en général. Mais ce résultat local permettra d'utiliser un argument de transversalité pour démontrer :

**Théorème VI.4.1.** — *La projection dans  $\mathcal{S}_{g,d}$  des équations uniformisantes est ouvert.*

Autrement dit, l'ensemble des surfaces de Riemann qui sont uniformisables est ouvert. Pour ça, soit  $P$  un point de  $\mathcal{S}_{g,d}$  uniformisé (i.e. dont la surface associée est uniformisée),  $E_P$  l'équation uniformisante

sur  $\hat{X}_P$ . Soit  $U = U_P$  l'ouvert de  $\mathcal{S}_{g,d}$  d'holonomie de l'application  $\text{Mon} = \text{Mon}_{U_P}$ . On cherche au voisinage de  $(P, E_P)$  des équations uniformisantes. Commençons par regarder celles à monodromie réelle, en notant

$$\mathcal{E}_U^{\mathbb{R}} = \text{Mon}^{-1}(\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^*(g)).$$

On admet dans un premier temps le lemme suivant :

**Lemme VI.4.2.** —  $\mathcal{E}_U^{\mathbb{R}}$  est transverse à la fibre en  $(P, E_P)$

Or un calcul rapide de dimension donne :

$$\text{codim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_U^{\mathbb{R}}) = \text{codim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^*(g) \subset \mathcal{R}_{\mathbb{C}}^*(g)) = 6g - 6 = \text{codim}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}_{g,d} \subset \mathcal{E}_{g,d}).$$

Donc, dans un voisinage de  $P$ , il existe une unique équation (notée  $E_{P'}$ ) proche de  $E_P$  et à monodromie réelle.

Le théorème ci-dessus est alors conséquence de :

**Proposition VI.4.3.** — Pour  $P'$  proche de  $P$ ,  $E_{P'}$  est uniformisante.

*Démonstration.* — On fixe  $(D, \rho)$  et  $(D', \rho')$  des couples développante/holonomie proches et telle que  $D$  soit à valeur dans  $\mathbb{H}$ ,  $\rho$  et  $\rho'$  à valeurs dans  $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ . Soit  $K$  un compact du revêtement universel de  $\hat{X}_{P'}$  contenant un domaine fondamental  $F$  en son intérieur.

Alors  $D'(K)$  est encore inclus dans  $\mathbb{H}$  ( $D'$  est proche d'une application à valeurs dans  $\mathbb{H}$ ) et comme  $\rho'$  est réelle,  $D'$  est à valeurs dans  $\mathbb{H}$ . Mais  $D'(K)$  est un voisinage compact de  $F$ , donc contient un  $\varepsilon$ -voisinage de  $F$ . L'image de  $D'$  est donc son propre  $\varepsilon$ -voisinage dans  $\mathbb{H}$  : c'est  $\mathbb{H}$ -tout entier. Donc la structure est hyperbolique complète.  $\square$

#### VI.4.1. Preuve de la transversalité

La preuve du lemme VI.4.2 est plus délicate. Nous l'expliquons maintenant. Rappelons que  $E_P : \frac{d^2 f}{dx^2} + hf = 0$  est une équation uniformisante en  $P$ . Notons  $S = \hat{X}_P$ , et fixons une développante  $D : \tilde{S} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}$  associée à l'holonomie  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ .

Supposons que la transversalité n'est pas vérifiée, c'est-à-dire qu'il existe une différentielle quadratique  $q(x)dx^2$  telle que la famille des monodromies des équations

$$E_{\varepsilon} : \frac{d^2 f}{dx^2} + (h + \varepsilon q)f = 0$$

est tangente en zéro à  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^*(g)$ . On fixe à nouveau des développantes  $D_\varepsilon$  et holonomies  $\rho_\varepsilon$  telles que la famille  $\rho_\varepsilon$  est tangente à  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et que  $D_\varepsilon(i) = i$ . Nous procédons en quatre étapes.

*VI.4.1.i. Passage en coordonnée hyperbolique.* — Notons  $z \in \mathbb{H}$  la coordonnée hyperbolique. On a

$$(h + \varepsilon q)dx^2 = \{D_\varepsilon; x\}dx^2 = \{D_\varepsilon, z\}dz^2 + \{z, x\}dx^2 = \{D_\varepsilon, z\}dz^2 + hdx^2.$$

Donc on obtient  $\{D_\varepsilon, z\}dz^2 = \varepsilon qdx^2$ . On veut montrer que  $q = 0$ , soit  $\{D_\varepsilon, z\} = o(\varepsilon)$ .

*VI.4.1.ii. Action sur l'aire hyperbolique.* — Pour  $\varepsilon$  petit et sur un compact  $K$  de  $\mathbb{H}$ ,  $D_\varepsilon(K)$  est encore dans  $\mathbb{H}$ . Regardons son action sur l'aire hyperbolique. C'est donné par le jacobien hyperbolique

$$\mathrm{Jac}_{\mathbb{H}}(D_\varepsilon)(z) = |D'_\varepsilon(z)| \frac{\mathrm{im}(z)}{\mathrm{Im}(D_\varepsilon(z))}.$$

Notons  $2\varphi_\varepsilon = \log(\mathrm{Jac}_{\mathbb{H}}(D_\varepsilon))$ .  $\rho_\varepsilon$  est tangente à  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$  donc son action préserve jusqu'à l'ordre 2 l'aire hyperbolique  $\frac{|dz^2|}{\mathrm{im}(z)^2}$ . Autrement dit  $\mathrm{Jac}_{\mathbb{H}}(D_\varepsilon(\gamma z)) = \mathrm{Jac}_{\mathbb{H}}(D_\varepsilon(z))(1 + O(\varepsilon^2))$ . Ça mène à l'équation

$$\varphi_\varepsilon(\gamma z) = \varphi_\varepsilon z + O(\varepsilon^2).$$

Notons maintenant  $\Psi = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}\varphi_\varepsilon$ . C'est une fonction définie sur  $\mathbb{H}$  et  $\pi_1(S)$ -invariante. On va montrer que c'est la fonction nulle.

*VI.4.1.iii. Laplacien hyperbolique.* — Notons  $z = x + iy$  et le laplacien hyperbolique  $\Delta_{\mathbb{H}} = y^2\Delta$ . On a le lemme suivant :

**Lemme VI.4.4.** — *Soit  $D$  un biholomorphisme local entre deux ouverts de  $\mathbb{H}$  et  $2\varphi = \log(\mathrm{Jac}(D))$ . Alors on a :*

$$\Delta_{\mathbb{H}}\varphi = e^{2\varphi} - 1.$$

*Démonstration.* — C'est principalement un calcul. Notons  $v = \mathrm{im}(D)$ . On a

$$\varphi = \log(|D'|) + \log(y) - \log(v).$$

Le premier terme est harmonique (c'est la partie réelle de l'application holomorphe  $\log(D')$ ). Son laplacien standard s'annule. Celui du deuxième terme est  $-\frac{1}{y^2}$ . Calculons celui du dernier terme (rappelons que  $v$  est harmonique) :

$$\Delta(\log(v)) = \frac{1}{v}\Delta(v) - \frac{1}{v^2}\left(\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2\right) = -\frac{|D'|}{v^2}.$$

En remultipliant par  $y^2$ , on obtient :

$$\Delta_{\mathbb{H}}(\varphi) = \frac{y^2 |D'\varphi|^2}{v^2} - 1.$$

□

En dérivant par rapport à  $\varepsilon$ , on a

**Corollaire VI.4.5.** —

$$\Delta_{\mathbb{H}}(\Psi) = \Psi.$$

Or  $\Psi$  est définie sur une surface compacte. En un maximum,  $\Delta_{\mathbb{H}}(\Psi) \leq 0$ , donc  $\Psi \leq 0$  en un maximum. De même,  $\Psi \geq 0$  en un maximum. Ainsi, on a bien  $\Psi = 0$ .

VI.4.1.iv. *Dérivée schwarziennne.* — Ainsi,  $D_\varepsilon$  préserve l'aire hyperbolique, et donc  $\frac{|dz|}{\text{im}(z)}$ , à l'ordre 2 sur tout compact.

On en déduit que  $D'_\varepsilon(i) = 1 + O(\varepsilon^2)$ . Autrement dit, sur un disque de taille  $\varepsilon$  autour de  $i$ ,  $D_\varepsilon(z) = z + O(\varepsilon^2)$ . La formule de Cauchy donne que  $\{D_\varepsilon, z\}(i) = O(\varepsilon^2)$ . Pour montrer la même chose en un point différent de  $i$ , on fait le même raisonnement quitte à conjuguer par un élément de  $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$  pour ramener le problème en  $i$ .

On a bien conclu à la transversalité en montrant  $\{D_\varepsilon, z\} = O(\varepsilon^2)$ .



# Uniformisation des surfaces

Nous faisons dans ce dernier chapitre le point sur les différents résultats et points de vue que nous avons développés sur l'uniformisation des surfaces compactes. On fixe comme d'habitude un entier  $g \geq 2$ ,  $\Sigma_g$  est la surface compacte de genre  $g$  et  $\Gamma_g$  est son groupe fondamental.

## VII.1. L'espace de Teichmüller

Cet objet a flotté en arrière-plan de ce cours sans jamais avoir été défini proprement. Or nous avons maintenant besoin de le faire, pour énoncer le théorème d'uniformisation.

Nous voulons dire que toute surface de Riemann est uniformisable. Or on sait (théorème de Gauss-Lichtenstein) que la donnée d'une structure de surface de Riemann est équivalente à celle d'une classe conforme de métrique sur  $\Sigma_g$  : cette classe conforme est définie par le fait que, localement, si on note  $z = x + iy$  une coordonnée complexe, les métriques sont proportionnelles à  $dx^2 + dy^2$ . On note donc  $\text{Mét}(\Sigma_g)$  l'espace des métriques riemanniennes sur  $\Sigma_g$ , et on munit cet espace de la convergence uniforme. On met une relation d'équivalence sur cet espace pour capturer seulement la structure de surface de Riemann sous-jacente : deux métriques  $m$  et  $m'$  sont équivalentes, noté  $m \sim m'$  s'il existe un difféomorphisme  $\varphi$  de  $\Sigma_g$ , isotope à l'identité, tel que  $m$  soit conforme à  $\varphi^*m'$ . On définit l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}_g$  comme le quotient de  $\text{Mét}(\Sigma_g)$  par cette relation :

$$\mathcal{T}_g = \text{Mét}(\Sigma_g) / \sim .$$

## VII.2. Deux points de vue différents

### VII.2.1. Par les représentations de groupes

Rappelons que l'espace  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{f.d.}(g)$  des classes de conjugaison de représentations fidèles et discrètes de  $\pi_1(\Sigma_g)$  est un sous-ensemble de la variété réelle  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^*(g)$ , de dimension  $6g - 6$ . Le principe d'Ehresmann-Thurston d'une part (pour l'ouverture) et le théorème de Wielenberg d'autre part impliquent :

**Proposition VII.2.1.** — *L'ensemble  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{f.d.}(g)$  est ouvert et fermé dans  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^*(g)$ .*

Pour toute la suite de ce chapitre, on fixe une composante connexe  $\mathcal{X}$  de  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{f.d.}(g)$ . Un point de  $\mathcal{X}$  donne une représentation fidèle et discrète de  $\Gamma_g$ , et donc une structure hyperbolique sur  $\Sigma_g$ . Ça semble indiquer qu'on a une application  $\Phi$  de  $\mathcal{X}$  dans l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}_g$ . Construisons proprement cette application.

Fixons  $X \subset \text{Rep}_{\mathbb{R}}^{f.d.}(g)$  une composante connexe au dessus de  $\mathcal{X}$ . Le groupe  $\Gamma_g$  opère sur le produit  $X \times \mathbb{H}$  par :

$$\gamma \cdot (\rho, z) = (\rho, \rho(\gamma)(z)).$$

Le quotient  $E = \Gamma \backslash X \times \mathbb{H}$  est donc un fibré au dessus de  $X$ . On note  $\pi : E \rightarrow X$  la projection. La fibre au dessus d'un point  $\rho \in X$  s'identifie à  $S_{\rho} = \Gamma \backslash \mathbb{H}$  : c'est une métrique hyperbolique  $m_{\rho}$  sur la surface  $\Sigma_g$ .

On fixe un point base  $\rho_0$  dans  $X$  et on choisit  $S = S_{\rho_0}$  comme surface de référence. Soit  $\rho \in X$ , avec un chemin  $(c(t) = \rho_t)_{t \in [0,1]}$  de  $\rho_0$  à  $\rho$ . Le fibré  $c^*E$  est trivialisable, on fixe donc une trivialisations

$$F : [0, 1] \times S \rightarrow c^*E.$$

Alors  $f_t = F(t, \cdot)$  est un difféomorphisme de  $S$  vers  $S_t = S_{\rho_t}$ . On peut bien sûr supposer  $f_0 = \text{Id}$ . On admet le lemme suivant qui énonce que le choix du chemin et de la trivialisations n'est pas important :

**Lemme VII.2.2.** — *La classe d'isotopie de la métrique  $f_1^* m_{\rho} \in \text{Met}_S$  est indépendante du choix du chemin  $c$  de  $\rho_0$  à  $\rho$  ainsi que de la trivialisations de  $c^*E$ .*

Montrons maintenant que la métrique (à isotopie près) ne dépend que de la classe de conjugaison de  $\rho$  :



**Lemme VII.2.3.** — Soient  $\sigma$  et  $\rho \in X$  conjuguées. Alors les métriques  $f_1^*(m_\rho)$  et  $g_1^*(m_\sigma)$  sur  $S$  construites comme ci-dessus sont isotopes.

*Démonstration.* — Soit  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  telle que  $\rho = A\sigma A^{-1}$  et  $(A_t)_{t \in [0,1]}$  un chemin dans  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  reliant l'identité  $I$  à  $A$ .

Pour tout  $t$ , on a donc un difféomorphisme  $h_t : S_\sigma \rightarrow S_{A_t\sigma A_t^{-1}}$ .  $h_0$  est bien sûr l'identité et  $h_1^*m_\rho = m_\sigma$ .

D'après le lemme précédent, on peut choisir n'importe quel chemin de  $\rho_0$  à  $\rho$ . Prenons le chemin qui va à  $\sigma$  suivi du chemin  $A_t\sigma A_t^{-1}$ . Alors  $f_1^*m_\rho = (h_1 \circ g_1)^*m_\sigma = g_1^*m_\sigma$ .  $\square$

L'application  $\Phi$  est alors définie comme l'application qui à une classe de conjugaison  $[\rho] \in \mathcal{X}$  associe la classe d'isotopie de la métrique  $f_1^*m_\rho$  sur  $S$ . Cette dernière classe est bien un élément de  $\mathcal{T}_g$ . Le premier point de vue sur l'uniformisation est le

**Théorème VII.2.4.** — L'application  $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{T}_g$  est un homéomorphisme.

### VII.2.2. Par les $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structures

Cette fois, on ne part pas du groupe, mais plutôt des courbes algébriques, et on cherche le groupes qui les uniformise. On rappelle qu'on a défini au chapitre précédent la variété de Severi  $\mathcal{S}_{g,d}$  et on a considéré le fibré  $\mathcal{E}_{g,d}$  des équations globalisables.

En termes de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structures, (un quotient de)  $\mathcal{E}_{g,d}$  est l'ensemble des  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  structures sur la surface lisse  $\Sigma_g$  (marquée), le point de  $\mathcal{S}_{g,d}$  correspondant étant la structure de surface de Riemann induite par la  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure. Ce qu'on a développé de la théorie d'Ehresmann permet d'y penser plutôt comme l'espace :

$$\text{MCP} = \{(\xi, s) \mid \xi \text{ connexion plate sur } \Sigma_g \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1, s \text{ section transverse à } \xi\}.$$

L'espace des sections comme l'espace des connexions sont naturellement munis de la topologie  $C^1$ , ce qui munit  $\text{MCP}(\Sigma_g)$  d'une topologie.

L'application (déjà mentionnée) qui à une  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structure associe la structure de surface de Riemann sous-jacente se traduit en la fibration

$$\begin{array}{c} \pi : \text{MCP}(\Sigma) \\ \downarrow \\ \mathcal{T}(\Sigma) \end{array}$$

L'application de monodromie des équations différentielles ou d'holonomie des  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structures induit l'application :

$$\text{hol} : \text{MCP}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(g).$$

Le principe d'Ehresmann-Thurston implique que cette application est un homéomorphisme local.

De plus, on a vu que pour tout  $S \in \mathcal{T}(\Sigma)$ ,  $\pi^{-1}(S)$  est un espace affine de dimension (complexe)  $3g - 3$  dirigé par l'espace des différentielles quadratiques holomorphes sur  $S$ . On note, comme dans le chapitre précédent,  $\text{Mon}_S$  la restriction de  $\text{hol}$  à  $\pi^{-1}(S)$ . Si  $[\rho]$  est dans l'image de  $\text{Mon}_S$ , avec  $\rho(\Gamma_g) \subset \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $S \simeq \rho(\Gamma_g) \backslash \mathbb{H}$ , alors  $[\rho]$  est dite la représentation uniformisante et  $S$  est dite uniformisable.

La dernière section du chapitre précédent montre que l'ensemble des  $S \in \mathcal{T}(\Sigma)$  uniformisables est ouvert. C'est équivalent au fait que l'application  $\Phi$  du premier point de vue est ouverte. On redonnera une preuve de ça. On montrera de plus qu'elle est fermée, ce qui montre que son image est tout le connexe  $\mathcal{T}(\Sigma)$ . Le second point de vue est plus constructif (on cherche l'équation ou la représentation à partir de la surface. On verra que ça permet parfois (rarement) de trouver explicitement l'équation uniformisante pour une courbe algébrique. Pour l'instant on se place plutôt dans le premier point de vue pour montrer le théorème VII.2.4.

### VII.3. L'ensemble des surfaces uniformisables est ouvert

Grâce au lemme de transversalité, on a pu le montrer sans (presque) rien admettre. On donne ici une autre preuve en se mettant dans le premier point de vue. En un certain sens elle est plus naturelle, mais elle demande d'admettre que  $\mathcal{T}_g$  est une variété de dimension  $6g - 6$ . Dans ces conditions, elle est même assez facile grâce au théorème de Brouwer.

**Proposition VII.3.1.** — *L'application  $\Phi$  est injective et ouverte.*

*Démonstration.* — Grâce au théorème de Brouwer, comme  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{T}_g$  sont de même dimension (réelle)  $6g - 6$ , l'injectivité implique l'ouverture.

Le plus dur pour l'injectivité est de comprendre ce que l'on veut faire ! Soit donc  $\rho$  et  $\sigma$  dans  $X$  telles que  $\Phi([\rho]) = \Phi([\sigma])$ . Rappelons qu'on a défini des métriques  $f_1^* m_\rho$  et  $g_1^* m_\sigma$  sur une surface de référence  $S$  par trivialisations. L'égalité  $\Phi([\rho]) = \Phi([\sigma])$  veut dire, vu la définition de  $\Phi$  et

de  $\mathcal{T}_g$ , qu'il existe un difféomorphisme  $\varphi$  de la surface de référence  $S$  tel que les métriques  $\varphi^*(f_1^*m_\rho)$  et  $g_1^*m_\sigma$  sont conformes.

Mais alors  $f_1 \circ \varphi \circ g_1^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  est un difféomorphisme conforme qui conjugue les actions de  $\rho$  et  $\sigma$ . C'est donc un élément de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $[\rho] = [\sigma]$ .  $\square$

Pour prouver le théorème VII.2.4 il reste donc à prouver que l'application  $\Phi$  est fermée. Autant pour l'ouverture le point de vue des équations différentielles et des  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -structures était intéressant, autant pour la fermeture il semble difficile de rédiger une preuve propre sans utiliser le point de vue des représentations de groupes et de la géométrie hyperbolique.

#### VII.4. Caractères et invariants fondamentaux

On se place ici dans un cadre un peu plus général. On fixe un entier  $N \geq 2$ , un groupe de type fini  $\Gamma$  et une représentation  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$ .

**Définition VII.4.1.** — La caractère de  $\rho$  est la fonction

$$\chi_\rho : \begin{cases} \Gamma & \rightarrow \mathbb{C} \\ \gamma & \mapsto \mathrm{tr}(\rho(\gamma)) \end{cases}$$

Évidemment deux représentations conjuguées ont le même caractère. De manière peut-être plus surprenante, la réciproque est très largement vraie. Poincaré l'a affirmé sans preuve au XIX<sup>ème</sup> siècle, mais il faudra attendre Selberg en 1960 pour le montrer. Avant de donner cette preuve, traduisons cette réciproque en terme de géométrie hyperbolique : si  $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g)$  et  $\rho$  à valeurs dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  correspondent à une structure hyperbolique, alors le caractère de  $\rho$  permet de trouver les valeurs propres de chaque élément  $\rho(\gamma)$  et donc les longueurs des géodésiques fermées. La donnée de la longueur de chaque géodésique s'appelle le *spectre marqué des longueurs*. Le résultat de Selberg permet d'affirmer que le spectre marqué des longueurs détermine la surface hyperbolique. Mentionnons que grâce à un résultat d'Otal [Ota1990] c'est encore vrai en courbure variable  $< 0$ . C'est faux cependant si on ne marque pas le spectre, c'est-à-dire qu'on ne donne que l'ensemble des longueurs de géodésiques sans spécifier à quelle géodésique elles se réfèrent.

**Proposition VII.4.2 (Selberg, 1960).** — Soient  $\rho$  et  $\rho'$  deux représentations de  $\Gamma$  dans  $\mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$ . On suppose qu'elles sont irréductibles et que  $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ .

Alors  $\rho$  et  $\rho'$  sont conjuguées dans  $\mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$ .

*Démonstration.* — Considérons  $R$  le sous-espace de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  engendré par  $\rho'(\Gamma)$ . Alors  $R$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  et, comme  $\rho'$  est irréductible,  $\mathbb{C}^N$  est un  $R$ -module simple. Le lemme de Burnside [Lan2002, XVII, cor. 3.4] implique que  $R = \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ .

On fixe donc  $\gamma_1, \dots, \gamma_{N^2}$  dans  $\Gamma$  tels que la famille des  $\rho'(\gamma_i)$  est une base de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ .

Considérons l'application  $\Psi$  de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  dans  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  donnée par

$$\Psi \left( \sum \lambda_k \rho'(\gamma_k) \right) = \sum \lambda_k \rho(\gamma_k).$$

On va montrer que c'est un automorphisme d'algèbre. Un résultat général impliquera qu'il est donné par une conjugaison ce qui prouvera la proposition.

Il est clair que  $\Psi$  est un morphisme d'algèbre, il suffit de montrer qu'il est injectif. Soit donc  $X = \sum \lambda_k \rho'(\gamma_k) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  et supposons que  $\Psi(X) = 0$ . Pour tout autre élément  $Y = \sum \mu_k \rho'(\gamma_k) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ , l'égalité des caractères implique :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(XY) &= \mathrm{tr} \left( \sum_{k,l} \lambda_k \mu_l \rho'(\gamma_k \gamma_l) \right) \\ &= \mathrm{tr} \left( \sum_{k,l} \lambda_k \mu_l \rho(\gamma_k \gamma_l) \right) \\ &= \mathrm{tr}(\Psi(X)\Psi(Y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or la trace est une forme bilinéaire non dégénérée, donc on a  $X = 0$  :  $\Psi$  est bien un automorphisme d'algèbre.

La proposition découle alors du lemme général suivant :

**Lemme VII.4.3.** — Tout automorphisme d'algèbre  $\Psi$  de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  est intérieur.

*Démonstration.* — On note  $E_{ij}$  les matrices élémentaires et  $p_i = \Psi(E_{ii})$ . Les  $p_i$  vérifient :  $p_i^2 = p_i$ ,  $p_i p_j = 0$  si  $i \neq j$  et  $\sum p_i = \mathrm{Id}$ . Donc les  $p_i$  sont des projecteurs sur  $n$  droites indépendantes et quitte à conjuguer, on peut supposer  $p_i = E_{ii}$ .

Donc on a  $E_{kk}\Psi(E_{ij}) = 0$  si  $k \neq i$  et  $\Psi(E_{ij})E_{kk} = 0$  si  $k \neq j$ . Donc il existe  $a_{ij} \in \mathbb{C}^*$  tel que  $\Psi(E_{ij}) = a_{ij}E_{ij}$ . Les  $a_{ij}$  vérifient les relations  $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ ; on en déduit que  $a_{ij} = \frac{b_i}{b_j}$ . Dans ce cas,  $\Psi$  est la conjugaison par la matrice  $(\delta_i^j b_i)$ .  $\square$

L'automorphisme  $\Psi$  qu'on a construit est donc une conjugaison par une matrice  $A$  qu'on peut choisir dans  $SL(N, \mathbb{C})$ . Ça implique  $\rho = A\rho'A^{-1}$ .  $\square$

Faisons un peu plus, suivant ici encore une affirmation de Poincaré : dans le cas de  $SL(2, \mathbb{C})$ , non seulement le caractère suffit pour déterminer la représentation (à conjugaison près), mais même la donnée des traces d'un nombre fini d'éléments de  $\Gamma$ . On appellera ces traces les *invariants fondamentaux*. Dorénavant, on suppose

$$N = 2 \text{ et } \Gamma = \pi_1(\Sigma_g).$$

Pour tout élément  $\gamma \in \Gamma$ , on définit

$$\tau_\gamma : \begin{cases} \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ [\rho] & \mapsto & \chi_\rho(\gamma) = \text{tr}(\rho(\gamma)) \end{cases}$$

**Proposition VII.4.4.** — L'anneau  $T_0$  engendré par les  $(\tau_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$  est de type fini.

*Démonstration.* — Le point crucial est l'égalité suivante, valable dans  $SL(2, \mathbb{C})$  :

$$\text{tr}(A)\text{tr}(B) = \text{tr}(AB) + \text{tr}(AB^{-1}).$$

En effet, le théorème de Cayley-Hamilton peut s'écrire  $\text{tr}(A)I = A + A^{-1}$ . Il suffit de multiplier cette égalité pour  $A$  et  $B$ , puis de prendre la trace (dans  $SL(2, \mathbb{C})$ ,  $\text{tr}(A^{-1}) = \text{tr}(A)$ ).

Soient  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  une famille génératrice de  $\Gamma$ . Montrons que l'anneau engendré par tous les  $\tau_\gamma$  est égal à l'anneau  $T$  engendré seulement par les  $\tau_\gamma$  pour

$$\gamma = \gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_k}, \text{ avec } k \leq n \text{ et } i_1, \dots, i_k \text{ distincts.}$$

Soit donc un élément  $\delta = \gamma_{i_1}^{m_1} \dots \gamma_{i_r}^{m_r}$  de  $\Gamma$  (avec bien sûr  $m_j \neq 0$ ).

**Premier cas :** Montrons que si les  $i_j$  sont distincts, alors  $\tau_\delta \in T$  :

On le fait par récurrence sur l'entier  $q = \sum_{j=1}^r \max(m_j - 1, -m_j)$ . Si  $q = 0$ , alors par définition  $\tau_\delta \in T$ . Si  $q \geq 1$ , on peut conjuguer  $\delta$  de sorte

que  $m_r \neq 1$ .

Si  $m_r < 0$ , on écrit, grâce à l'équation sur les traces :

$$\tau_\delta = \tau_{\delta\gamma_{i_r}} \tau_{\gamma_{i_r}^{-1}} - \tau_{\delta\gamma_{i_r}^2}.$$

Or l'hypothèse de récurrence implique que  $\tau_{\delta\gamma_{i_r}}$  et  $\tau_{\delta\gamma_{i_r}^2}$  sont dans  $T$  et  $\tau_{\gamma_{i_r}^{-1}} = \tau_{\gamma_{i_r}}$  est dans  $T$ . Donc  $\tau_\delta$  est dans  $T$ .

Si  $m_r > 1$ , on fait le même raisonnement en multipliant par  $\gamma_{i_r}^{-1}$  au lieu de  $\gamma_{i_r}$ .

**Cas général** On travaille maintenant par récurrence sur  $r$ . D'après le cas particulier déjà traité on a  $r \geq 2$  et (quitte à conjuguer) il existe  $1 \leq j < r$  tel que  $i_j = i_r$ . Posons

$$\alpha = \gamma_{i_1}^{m_1} \dots \gamma_{i_j}^{m_j} \text{ et } \beta = \gamma_{i_{j+1}}^{m_{j+1}} \dots \gamma_{i_r}^{m_r}.$$

On conclut la preuve de la proposition grâce à la relation (encore donnée par la relation sur les traces) :

$$\tau_\delta = \tau_{\alpha\beta} = \tau_\alpha \tau_\beta - \tau_{\alpha\beta^{-1}}.$$

□

On fixe donc une fois pour toutes une famille finie  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  d'éléments de  $\Gamma$  tel que  $\tau_{\alpha_1}, \dots, \tau_{\alpha_n}$  engendrent l'anneau  $T_0$ . On définit la fonction

$$t : \begin{cases} \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(g) & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ [\rho] & \rightarrow & t(\rho) = (\tau_{\alpha_1}(\rho), \dots, \tau_{\alpha_n}(\rho)) \end{cases}$$

Les composantes du vecteur  $t(\rho)$  sont appelés *invariants fondamentaux* du groupe  $\rho(\Gamma)$ .

Un point crucial dans la fermeture est la propriété de l'application  $t$  :

**Proposition VII.4.5.** — *L'application  $t|_{\mathcal{X}}$ , restriction de  $t$  à la composante connexe  $\mathcal{X}$  de  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{f,d}(g)$ , est injective et propre.*

*Démonstration.* — Comme les représentations fidèles et discrètes sont irréductibles, l'injectivité découle des résultats ci-dessus. Mentionnons cependant une subtilité : la restriction de  $t$  à tout  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}^{f,d}$  n'est pas injective. En effet, en termes de géométrie hyperbolique, si on a une surface, la surface obtenue en renversant simplement l'orientation a le même spectre marqué des longueurs (ça correspond à la conjugaison par  $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$  qui est dans  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ , mais pas  $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ ). On évite ce phénomène en se restreignant à  $\mathcal{X}$ .

Il nous faut montrer qu'elle est propre. Soit donc  $(\gamma_i)_{i=1,\dots,2g}$  une famille génératrice standard de  $\Gamma$  (notamment le produit d'intersection  $\#(\gamma_1, \gamma_g)$  vaut 1). Remarquons que, si  $\rho$  est fidèle et discrète, les axes de  $\rho(\gamma_1)$  et  $\rho(\gamma_g)$  se coupent.

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C}^n$  et considérons  $R = t^{-1}(K)$ . Soit  $[\rho]$  un élément de  $K$ , et on choisit l'unique représentant  $\rho$  tel que :

$$\rho(\gamma_1) = A = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1/u \end{pmatrix} \text{ et } \rho(\gamma_g) = B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ avec } b > 0 \text{ et } |b| = |c|.$$

On veut montrer que les coefficients des  $\rho(\gamma_i)$  sont uniformément bornés. C'est clair pour  $u$ . Travaillons donc dans un premier temps sur les coefficients de  $B$ .

L'intersection des axes de  $\rho(\gamma_1)$  et  $\rho(\gamma_g)$  se traduit par la relation  $bc > 0$ . On a

$$\text{tr}^2(B) - 4 = (a - d)^2 + 4bc.$$

On en déduit que  $a - d$  et  $bc$  (donc aussi  $|b| = |c|$ ) sont uniformément bornés sur  $t^{-1}(K)$ . Comme on a aussi

$$\text{tr}[A, B] - 2 = -bc(\text{tr}^2(A) - 4),$$

On en déduit dans un premier temps<sup>(1)</sup> que  $\text{tr}[A, B] < 2$ . Comme c'est aussi un élément loxodromique, on a  $\text{tr}[A, B] < -2$  et

$$bc(\text{tr}^2(A) - 4) > 4.$$

Comme  $bc$  et  $\text{tr}(A)$  sont bornés, il ne peuvent pas non plus se rapprocher de 0 : les inf sur  $R$  de  $bc$  et  $\text{tr}(A)^2 - 4$  sont  $> 0$ .

Montrons maintenant que pour tout élément  $\gamma \in \Gamma$ , les coefficients de  $C = \rho(\gamma) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  sont bornés sur  $R$ . En écrivant comme ci-dessus

$$\text{tr}[A, C] - 2 = -qr(\text{tr}^2(A) - 4),$$

on voit que  $qr$  est borné. De plus  $ps = 1 + qr$  et  $p + s = \text{tr}(C)$  sont bornés, donc  $p$  et  $s$  sont bornés. Les coefficients diagonaux de  $BC$  sont  $ap + br$  et  $cq + sd$ . Donc ces deux dernières grandeurs restent bornées. Comme tout le monde a déjà été borné sauf  $r$  et  $q$ , on en déduit qu'ils sont aussi bornés.

Au final, les coefficients de  $\rho(\gamma_i)$  sont bornés dans  $R = t^{-1}(K)$ ; comme la famille  $\gamma_i$  est génératrice,  $R$  est bien compact.  $\square$

1.  $bc > 0$  et  $|\text{tr}(A)| > 2$  car c'est un élément loxodromique.

### VII.5. Longueurs extrémales

La propriété de l'application  $t$  se traduit par la propriété de l'application  $\Phi$  qui est l'étape manquante dans la preuve du théorème VII.2.4 :

**Proposition VII.5.1.** — *L'application  $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{T}_g$  est propre.*

L'outil principal pour la preuve de cette proposition est d'évaluer la longueur d'une classe d'homotopie de courbe. Avant ça, rappelons qu'on a fixé un ensemble fini  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  de courbes telles que la classe de conjugaison d'une représentation  $\rho$  est déterminée par les longueurs de translation  $l_\rho(\alpha_k)$  de  $\rho(\alpha_k)$  : ce sont les invariants fondamentaux<sup>(2)</sup>.

Donc la proposition précédente découle du résultat suivant :

**Proposition VII.5.2.** — *On fixe la classe d'homotopie d'une courbe fermée simple  $\alpha$  sur  $S$  et  $K$  un compact de  $\mathcal{T}_g$ . Alors, l'ensemble des longueurs  $l_\rho(\alpha)$  pour  $\rho \in \Phi^{-1}(K)$  est majoré.*

Pour travailler avec les longueurs et l'espace de Teichmüller, nous introduisons la notion de *longueur extrême*.

**Définition VII.5.3 (Longueur extrême).** — Soient  $\alpha$  la classe d'homotopie d'une courbe fermée simple sur  $S$ ,  $ds^2$  une métrique riemannienne sur  $S$  et une fonction  $f$  continue et  $> 0$  sur  $S$ . On note  $A_s$  la mesure d'aire associée à  $ds$  et on définit les deux quantités :

$$L(\alpha, ds^2, f) = \inf_{c \in \alpha} \left( \int_c f ds \right) \quad \text{et} \quad A(ds^2, f) = \int_S f^2 dA_s.$$

La première est la longueur de  $c$  et le second l'aire de  $S$  pour la métrique  $f^2 ds^2$ .

La *longueur extrême* de  $\alpha$  pour  $ds^2$  est la grandeur :

$$E(\alpha, ds^2) = \sup_f \frac{(L(\alpha, ds^2, f))^2}{A(ds^2, f)}.$$

Par construction,  $E(\alpha, ds^2)$  ne dépend en fait que de la classe conforme  $[ds^2] \in \mathcal{T}_g$ . Montrons d'abord que cette grandeur est finie :

**Lemme VII.5.4.** — *Pour toute métrique  $ds^2$  et classe d'homotopie  $\alpha$  d'une courbe fermée simple, la longueur extrême  $E(\alpha, ds^2)$  est finie.*

2. Rappelons encore une fois que la trace détermine la longueur, et la longueur la trace au signe près.



*Démonstration.* — On choisit un représentant  $c$  de  $\alpha$  et un nombre réel  $r > 0$  assez petit tel que sur un anneau  $A_c$  autour de  $c$  de rayon  $r$ , on peut écrire  $ds^2$  en coordonnées normales ( $0 \leq t < l$  étant la coordonnée le long de  $c$  paramétré par longueur d'arc, et  $r$  la coordonnée dans la direction normale) :

$$ds^2 = dr^2 + g(t, r)dt^2.$$

On note  $c_u$  les parallèles à  $c$  dans l'anneau  $A_c$  :  $c_u$  est, dans les coordonnées normales, le lacet  $t \rightarrow (t, u)$ . On note pour toute fonction continue positive  $f$ ,  $l_f(c_u)$  la longueur de  $c_u$  pour la métrique  $f^2 ds^2$ . On peut faire le calcul suivant, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left( \int_0^r l_f(c_u) du \right)^2 &= \left( \int_0^r \left( \int_0^l f(t, u)g(t, u)dt \right)^2 du \right) \\ &\leq \left( \int_0^r \int_0^l f^2(t, u)g(t, u)dt du \right) \left( \int_0^r \int_0^l g(t, u)dt du \right) \end{aligned}$$

Le premier terme du dernier produit est  $\leq A(ds^2, f)$  et le deuxième terme est indépendant de  $f$ , notons le  $C$ . On en déduit que pour  $l_f(c_u)$  minimal, on a

$$r^2 l_f^2(c_u) \leq A(ds^2, f)C,$$

ce qui montre  $E(\alpha, ds^2) \leq \frac{C}{r^2}$ . □

Le lien entre la longueur extrémale et longueur hyperbolique est clair : si  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R})$  donne une structure hyperbolique sur  $S$  dans la classe conforme de  $ds^2$ , son aire est  $\pi(4g - 2)$  (application du théorème de Gauss-Bonnet). Par définition, ça donne la majoration :

$$l_\rho^2(\alpha) \leq E(\alpha, ds^2) \cdot \pi(4g - 2).$$

Pour montrer la proposition VII.5.2, il ne nous reste donc plus qu'à prouver que si  $[ds^2]$  reste dans le compact  $K$  de  $\mathcal{T}_g$ , alors  $E(\alpha, ds^2)$  est bornée. C'est donné par la semi-continuité de  $E(\alpha, \cdot)$  :

**Lemme VII.5.5.** — *L'application  $E(\alpha, \cdot)$  est semi-continue inférieurement : si  $ds_k^2$  est une suite de métrique riemannienne convergeant vers une métrique riemannienne  $ds^2$ , on a*

$$\overline{\lim}_k E(\alpha, ds_k^2) \leq E(\alpha, ds^2).$$

*Démonstration.* — Par homogénéité, dans la définition de  $E(\alpha, ds^2)$ , on peut se limiter aux fonctions  $f \leq 1$ . Donc, uniformément en  $f$ , les métriques  $f ds_k^2$  convergent vers  $f ds^2$ .

Soit  $L > L(\alpha, ds^2, 1)$  et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $C_\alpha$  l'ensemble des courbes  $c \in \alpha$  de longueur pour  $ds^2$  inférieure à  $L$ . Alors, il existe un entier  $K$  tel que pour  $k \geq K$ , pour toute courbe  $c \in C_\alpha$  et toute fonction  $0 < f \leq 1$ , on a

$$\frac{L^2(\alpha, ds_k^2, f)}{A(ds_k^2, f)} \leq \frac{\text{Long}^2(c, f^2 ds_k^2)}{A(ds_k^2, f)} \leq \frac{\text{Long}^2(c, f^2 ds^2)}{A(ds^2, f)} + \varepsilon.$$

Il ne reste plus qu'à prendre l'inf sur  $c$  puis le sup sur  $f$  pour conclure : si  $k \geq K$ , on a

$$E(\alpha, ds_k^2) \leq E(\alpha, ds) + \varepsilon.$$

□

# Bibliographie

- [Bea1983] A. F. BEARDON – *The geometry of discrete groups*, Grad. Texts in Math. 91, Springer, New York, 1983.
- [Bos1992] J.-B. BOST – « Introduction to compact Riemann surfaces, Jacobians, and Abelian varieties », *From number theory to physics (Les Houches, 1989)*, Springer, Berlin, 1992, p. 64–211.
- [DoDo1977] R. & A. DOUADY – *Algèbre et théories galoisiennes*, CEDIC, Paris, 1977. Nouvelle édition augmentée, Cassini, Paris, 2005.
- [FaKr1980] H. M. FARKAS, I. KRA – *Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics 71, Springer, New York, 1980.
- [Forst1977] O. FORSTER – *Riemannsche Flächen*, Springer, Berlin, 1977. Traduction anglaise : *Lectures on Riemann surfaces*, Grad. Texts in Math. 81, Springer, New York, 1981.
- [GrHa1978] P. GRIFFITHS & J. HARRIS – *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.
- [Gun1972] \_\_\_\_\_, *Lectures on Riemann surfaces, Jacobi varieties*, Math. Notes 12, Princeton Univ. Press, 1972.
- [HaMo1998] J. HARRIS & I. MORRISON – *Moduli of curves*, Grad. Texts in Math. 187, Springer, New York, 1998.
- [Hod1941] W. V. D. HODGE – *The Theory and Applications of Harmonic Integrals*, Cambridge Univ. Press, 1941.
- [Hub2006] \_\_\_\_\_, *Teichmüller theory, vol. 1*, Matrix Editions, Ithaca NY, 2006.
- [ImTa1992] Y. IMAYOSHI & M. TANIGUCHI – *An introduction to Teichmüller spaces*, Springer, Tokyo, 1992.

- [Jos2002] J. JOST – *Compact Riemann surfaces, An introduction to Contemporary mathematics, Second edition*, Springer, New York, 2002.
- [Kat1992] S. KATOK – *Fuchsian Groups*, The Univ. of Chicago Press, 1992.
- [Kle1882c] ———, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, Teubner, Leipzig, 1882. Traduction anglaise (édition révisée) : *On Riemann's theory of algebraic functions and their integrals*, Dover, Mineola (NY), 2003.
- [Lan2002] S. LANG, *Algebra, Revised Third Edition*, Grad. Texts in Math., New-York.
- [McKMo1997] H. MCKEAN & V. MOLL – *Elliptic curves. Function theory, geometry, arithmetic*, Cambridge Univ. Press, 1997.
- [Mum1983] ———, *Tata lectures on theta I*, Progr. in Mathematics 28, Birkhäuser, Bâle, 1983.
- [Mum1999] ———, *The red book of varieties and schemes*, seconde édition. Contient [Mum1975]. Lecture Notes in Mathematics, 1358. Springer, Berlin, 1999.
- [Mum1975] D. MUMFORD – *Curves and their Jacobians*, The Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [Ota1990] J.P. OTAL – « Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative », *Ann. Math.* 131, n. 1, 1990, pp 151–162.
- [Rey1989] É. REYSSAT – *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Progr. Math. 77, Birkhäuser, Boston, 1989.
- [Rud1987] W. RUDIN – *Real and complex analysis*, seconde édition, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [Sai2011] ———, *Uniformisation des Surfaces de Riemann*, ENS Éditions, 2011.
- [Ser1970] J.-P. SERRE – *Cours d'arithmétique*, Presses Univ. France, Paris, 1970.
- [Shi1971] ———, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Kanô Memorial Lectures, n° 1*, Publ. Math. Soc. Japan, n° 11. Iwanami Shoten, Tokyo, & Princeton Univ. Press, 1971.
- [Spr1957] G. SPRINGER – *Introduction to Riemann surfaces*, Addison-Wesley, Reading (Mass.), 1957.