

**Variétés des caractères et structures
hyperboliques en dimension 3**

A. Guilloux

Ce cours est une introduction conjointe à deux sujets très fortement liés : d'une part les structures géométriques sur les variétés - particulièrement les structures hyperboliques en dimension 3 ; d'autre part les espaces de représentation d'un groupe de type fini dans un groupe de Lie - particulièrement $SL(2, \mathbf{C})$ - qui mènent aux variétés de caractères.

L'approche est principalement celle décrite par Thurston dans ces fameuses notes sur la géométrie des variétés de dimension 3 (voir aussi [Thu97]. Les principales sources d'inspiration pour ce cours sont, outre les notes de Thurston, des notes d'un cours sur les structures géométriques sur les surfaces donné il y a quelques années avec N. Bergeron, le livre *Lectures on hyperbolic geometry* de Benedetti-Petronio [BP92].

Table des matières

partie 1. Variétés hyperboliques	1
Chapitre 1. Géométrie hyperbolique	3
1. Différents modèles	3
2. Horosphères et bananes	7
3. Groupe d'isométrie	8
Chapitre 2. (G, X) -variétés	13
1. Définition	13
2. Exemples	13
3. Développante et holonomie	14
4. Principe d'Ehresmann-Thurston	16
5. Complétude	17
Chapitre 3. Variétés hyperboliques complètes	19
1. Cas compact	19
2. Structures euclidiennes et théorème de Bieberbach	20
3. Le lemme de Margulis	23
4. Décomposition fine-épaisse des variétés hyperboliques	25
partie 2. Variétés des caractères et ses variantes	27
Chapitre 4. Variété des représentations, variété des caractères	29
1. La variété des représentations	29
2. Caractères	31
3. Variété des caractères	33
4. Variété des caractères décorés	35
Chapitre 5. Variétés hyperboliques triangulées	37
1. Triangulation idéale	37
2. Recollements de tétraèdres hyperboliques idéaux	38
3. Représentation d'holonomie	40
4. Triangulations décorées et variété des déformations	41
partie 3. Chirurgies de Dehn hyperboliques	47
Chapitre 6. Chirurgies de Dehn et complétion métrique	49
1. Chirurgie de Dehn, définition topologique	49
2. Invariants de Dehn	50
Bibliographie	53

Première partie

Variétés hyperboliques

On commence ici par décrire la *géométrie hyperbolique* avant de mettre en place la notion de variété hyperbolique, dans le cadre des *structures géométriques* ou (G, X) -structures.

Géométrie hyperbolique

Nous décrivons ici les différents modèles de la géométrie hyperbolique réelle, et la classification de leurs isométries¹.

1. Différents modèles

Le modèle de base est celui de l'hyperboloïde, où le groupe $O^+(n, 1)$ apparaît naturellement. On considère la forme quadratique

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2,$$

et la nappe supérieure de l'hyperboloïde (voir figure 1)

$$X = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \text{ tels que } q(x) = -1 \text{ et } x_{n+1} > 0\}.$$

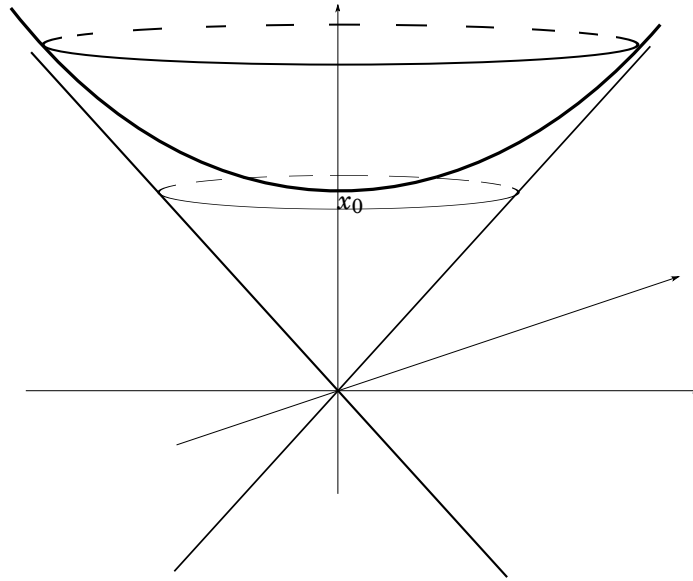


FIGURE 1. La nappe supérieure de l'hyperboloïde

On appelle *bord de X*, noté ∂X la sphère :

$$\partial X = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \text{ tels que } q(x) = -1 \text{ et } x_{n+1} = 1\}.$$

Chaque vecteur de ∂X définit une demi-droite asymptote à l'hyperboloïde.

Le groupe $G = O^+(n, 1)$ est défini comme le sous-groupe (d'indice 2) de $O(n, 1)$ qui préserve X . Il agit transitivement sur X , et le stabilisateur du point $x_0 = (0, \dots, 0, 1)$ est naturellement isomorphe à $O(n)$. Cette action s'étend

1. Cette partie est essentiellement reprise des notes du cours dispensé avec N. Bergeron.

en une action sur ∂X : un point ξ de ∂X est envoyé par un élément g de G sur le vecteur de ∂X colinéaire à $g \cdot \xi$.

On munit de plus X d'une métrique G -invariante. Soit b la forme bilinéaire associée à q . L'espace tangent $T_x X$ en un point x à X s'identifie à l'orthogonal de x pour b . On voit alors que la restriction de b à $T_x X$ est un produit scalaire. Cette métrique munit X d'une distance d : la distance hyperbolique.

DÉFINITION 1. *On appelle sous-espace de X une intersection non vide $X \cap F$ où F est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^{n+1} .*

Cela permet de définir la notion de droite (l'intersection non vide d_P de X avec un plan vectoriel P), d'hyperplan (l'intersection non vide L_y de X avec un hyperplan $H_y = y^\perp$)... Une droite d_P - donc une géodésique de X - est définie par les deux points "à l'infini" : l'intersection $P \cap \partial X$ est réduite à exactement deux points si $P \cap X$ est non vide.

On peut déjà décrire la géométrie de X :

PROPOSITION 1. (1) *Les droites de X sont les géodésiques de la métrique.*

(2) *Une droite d_P et un hyperplan L_y sont orthogonaux si et seulement si $y \in P$.*

(3) *Si $x, x' \in X$ et si L_y est un hyperplan, on a les formules :*

$$-b(x, x') = \cosh(d(x, x')) \text{ et } |b(x, y)| = \sinh(d(x, L_y)).$$

(4) *Si x et x' sont deux points distincts de X , l'ensemble des points de X équidistants de x et x' est un hyperplan de X , appelé hyperplan médiateur.*

(5) *G agit transitivement sur l'espace des géodésiques, et même sur l'espace des couples $p \in \gamma \subset X$, où p est un point et γ une géodésique.*

DÉMONSTRATION. (1) Soit c la géodésique issue de x à vitesse $v \in T_x X \setminus \{0\}$. Par unicité, elle est invariante par tout élément $g \in G$ préservant x et v . Donc, c doit être incluse dans le plan P engendré par x et v . La réciproque est évidente : tout couple de point de X définit un unique plan, qui doit donc être géodésique.

(2) Considérons g la symétrie orthogonale par rapport à L_y . C'est l'élément de $O(n, 1)$ qui envoie y sur $-y$ et qui est l'identité sur y^\perp . La droite d_P (non-incluse dans L_y) est orthogonale à L_y si et seulement si $g(d_P) = d_P$. Donc g doit préserver le plan P qui n'est pas inclus dans y^\perp . Ça implique que $y \in P$.

(3) $x_t = (0, \dots, 0, \sinh(t), \cosh(t))$ est une paramétrisation à vitesse 1 de la géodésique issue de x_0 dans la direction $v = (0, \dots, 0, 1, 0)$. Donc on a bien, $b(x_0, x_t) = -\cosh(d(x_0, x_t))$. Pour conclure sur la formule générale, on utilise que G agit transitivement sur les couples de points à même distance (exercice!).

(4) C'est une conséquence du deuxième point.

(5) Le troisième point montre que G agit transitivement sur au moins une géodésique γ_0 : celle issue de x_0 dans la direction $v = (0, \dots, 0, 1, 0)$.

Il suffit donc de voir que toute géodésique γ peut être envoyée sur $gamma_0$. Pour ça, soit ξ, ζ les deux points à l'infini de γ et $(0, \dots, 0, 1, -1)$ et $(0, \dots, 0, 1, 1)$ Ceux de γ_0 . Il existe (exercice!) une matrice de G qui envoie ξ et ζ sur respectivement $(0, \dots, 0, -1, 1)$ et $\frac{b(\xi, \zeta)}{2}(0, \dots, 0, 1, 1)$: cette isométrie envoie bien γ sur γ_0 .

□

Une autre remarque importante est que la notion du bord de X est intrinsèque. Pour la définir intrinsèquement, on définit la notion de *rayon géodésique* : c'est une demi-géodésique, issue d'un point de X . Autrement dit, c'est l'intersection de X avec un demi-plan P , demi-plan qui rencontre X selon un intervalle $[0, +\infty[$. Tout rayon géodésique possède donc un unique point à l'infini (intersection du demi-plan et de ∂X).

PROPOSITION 2. *Pour deux rayons géodésiques r et r' , l'ensemble des distances entre d'un point de r à r' est borné si et seulement si ils ont le même point à l'infini.*

DÉMONSTRATION. Si r et r' pointent vers deux points à l'infini distincts ξ et χ , on prouve facilement que $\inf_{y \in r'} b(x, y)$ tend vers l'infini quand x part à l'infini.

En revanche, si $\xi = \chi$, comme $b(\xi, \xi) = 0$, on observe que cet inf reste borné.

□

Donc, on peut définir de manière intrinsèque le bord à l'infini comme l'ensemble des rayons géodésiques modulo la relation d'équivalence définie par $r \sim r'$ si et seulement si l'ensemble des distances d'un point de r à r' est borné (on laisse au lecteur le soin de vérifier que c'est bien une relation d'équivalence!).

Mentionnons les autres modèles disponibles.

1.1. Le modèle projectif B . Il s'agit de la projectivisation du précédent : on considère

$$\begin{cases} X & \rightarrow B = \{(v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^n \mid v_1^2 + \dots + v_n^2 < 1\} \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) & \mapsto \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right). \end{cases}$$

Les géodésiques sont les droites (voir figure 2).

Dans ce modèle, le bord ∂B est la frontière topologique de B dans \mathbf{R}^n .

1.2. L'hémisphère nord S^+ . Il est obtenu à partir de B par projection verticale (voir figure 3).

Dans ce modèle, le bord ∂S^+ est la frontière topologique de S^+ dans S^n .

1.3. Le disque \mathbb{D}^n . Il est obtenu à partir de S^+ par projection stéréographique depuis le pôle sud (voir figure 4). Les géodésiques sont les arcs de cercles orthogonaux au bord².

Dans ce modèle la métrique riemannienne hyperbolique est conforme à la métrique euclidienne (les angles s'y mesurent comme les angles euclidiens).

². qui se coupent en au plus 1 point!

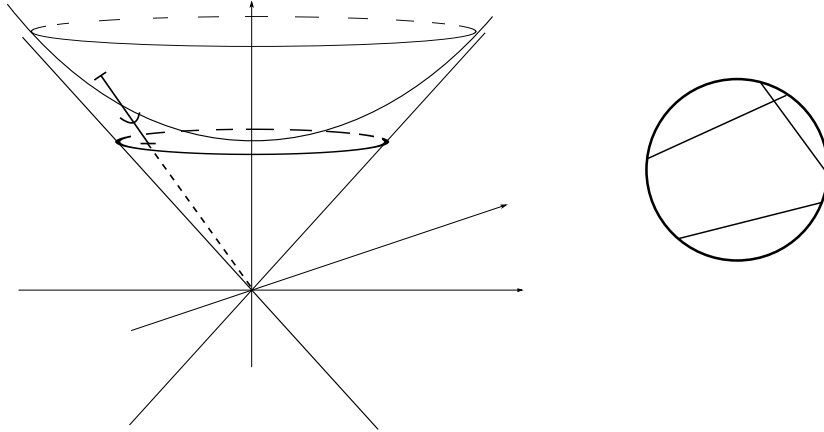


FIGURE 2. Le modèle projectif

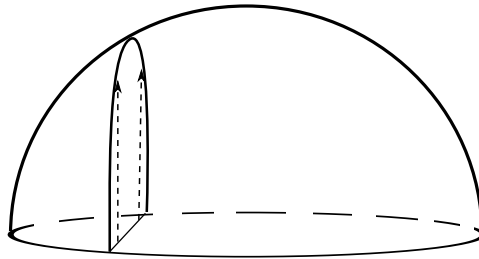


FIGURE 3. L'hémisphère

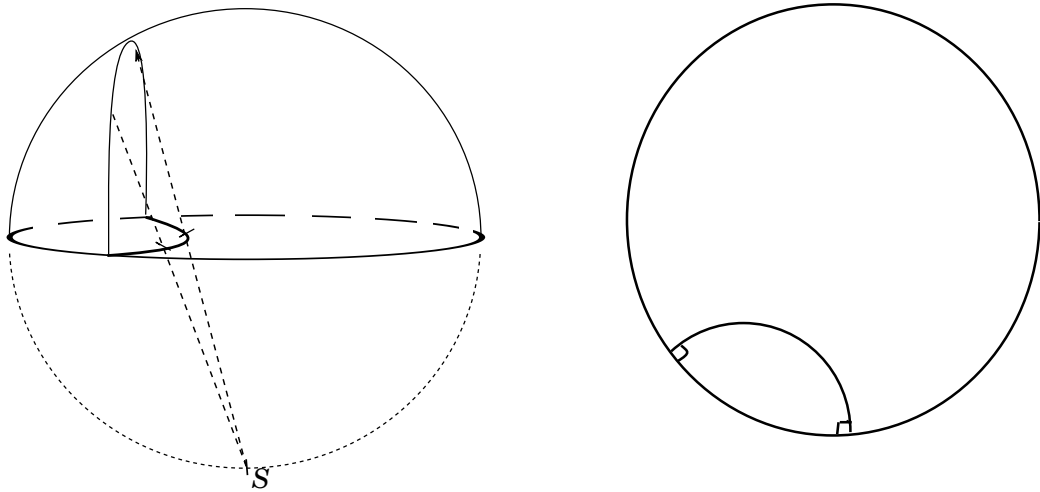


FIGURE 4. Le disque

En effet, la formule suivante pour la métrique (exercice) montre qu'elle est en chaque point proportionnelle à la métrique euclidienne :

$$\frac{2\sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}}{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}.$$

De plus, le bord est la sphère \mathbf{S}^{n-1} bord topologique du disque dans \mathbf{R}^n .

1.4. Le demi-espace. Il s'obtient à nouveau à partir de \mathbf{S}^+ , cette fois par une inversion à partir d'un point quelconque de l'équateur (cf figure 5). L'image de cette inversion est un demi-espace $\mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_{>0}$. Les géodésiques

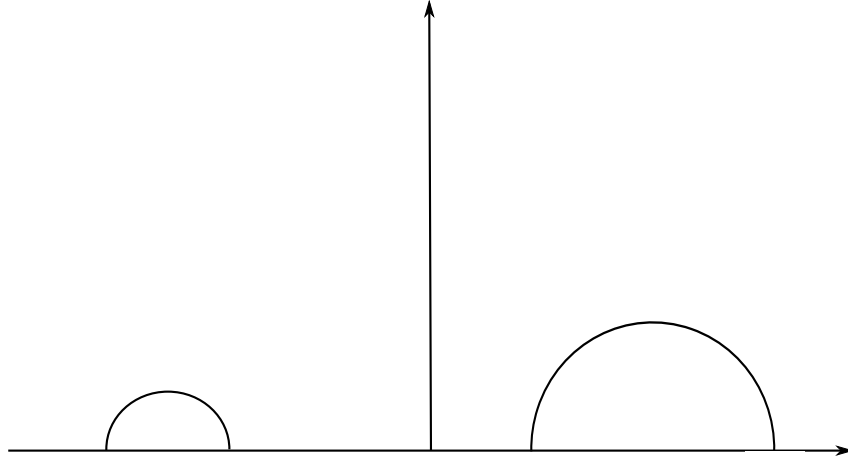


FIGURE 5. Le demi-espace

sont les demi-droites verticales ou les arcs de cercles orthogonaux au plan horizontal. La métrique riemannienne est à nouveau conforme à la métrique euclidienne, elle s'écrit :

$$\frac{\sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}}{x_n}.$$

Dans ce modèle, le bord du demi-espace est $\mathbf{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$.

En conclusion, on note \mathbf{H}^n l'espace hyperbolique de dimension n , et ∂H^n son bord, représenté au choix par un quelconque de ces modèles.

2. Horosphères et bananes

Nous définissons deux familles de voisinages particuliers dans \mathbf{H}^n : les horosphères et les bananes. Ils nous seront utiles plus tard dans le cours.

2.1. Horosphères. Fixons un point $\xi \in \partial H^n$. On appelle *horosphère* centrée en ξ toute hypersurface maximale partout orthogonale aux géodésiques dont un point à l'infini est ξ .

On appelle *horoboule* l'unique composante connexe de \mathbf{H}^n privé d'une horosphère qui touche ∂H^n en le centre de l'horosphère.

Dans le modèle du demi-espace, si $\xi = \infty$, ce sont les plans horizontaux $x_n = cste$. Pour tout autre point à l'infini ξ , ce sont des sphères tangentes au bord en ξ .

2.2. Bananes. Soit γ une géodésique de H^n . On appelle *voisinage banane* de γ tout ensemble défini comme les points de H^n à distance $< \varepsilon$ de γ , pour un $\varepsilon > 0$.

Dans le modèle du demi-espace, si un des points à l'infini de γ est ∞ , ce voisinage est un cône autour de γ . Sinon, il ressemble à... une banane.

3. Groupe d'isométrie

3.1. Groupe d'isométrie en petite dimension et isomorphismes exceptionnels.

3.1.1. *En dimension 2 (voir TD).* Quand $n = 2$, l'équivalence des modèles de l'hyperboloïde, du demi-plan (sur lequel agit $\text{PGL}(2, \mathbf{R})$ par homographie) et du disque (sur lequel agit $\text{PU}(1, 1)$ par homographie) se traduit par les isomorphismes entre groupes de Lie :

$$SO^+(2, 1) \simeq \text{PSL}(2, \mathbf{R}) \simeq \text{PU}(1, 1).$$

3.1.2. *En dimension 3.* Pour $n = 3$, on a $SO^+(3, 1) \simeq \text{PGL}(2, \mathbf{C})$. Une façon de le voir est de dire que le groupe d'isomorphismes directs de la boule \mathbf{D}^3 est inclus dans le groupe des isomorphismes conformes directs, et donc agit de manière conforme sur $\mathbf{S}^2 = \partial D^3$. Or le groupe d'isomorphismes conformes directs de S^2 est $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$. Enfin, tout isomorphisme conforme de \mathbf{S}^2 s'étend en un isomorphisme de la structure hyperbolique sur \mathbf{H}^3 : l'action par homographie d'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur \mathbf{S}^2 s'étend en une isométrie de tout \mathbf{H}^3 . On peut le voir de manière pédestre avec le modèle du demi-espace : une transformation affine $z \mapsto az + b$, avec $a = |a|\mu$, de $\mathbf{CP} \simeq S^2$ s'étend en l'isométrie :

$$(z, t) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}_*^+ \mapsto |a|(\mu z + \frac{b}{|a|}, t);$$

la transformation $z \mapsto -\frac{1}{\bar{z}}$ s'étend en $z, t \mapsto -\frac{1}{|z|^2 + t^2}(\bar{z}, t)$ (exercice : vérifier que c'est bien une isométrie en utilisant la formule pour la métrique).

Comme ces transformations engendrent $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$, on constate bien que le groupe d'isométries directes de \mathbf{H}^3 est isomorphe à $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$.

3.2. Classification des isométries. On peut exploiter l'algèbre linéaire pour classifier les isométries hyperboliques. En effet, $O(n, 1)$ étant un groupe algébrique sur \mathbf{R} , la décomposition de Jordan nous permet d'écrire tout élément de $O(n, 1)$ de manière unique comme un produit commutatif $g_s g_u = g_u g_s$ où g_s est *semi-simple*, i.e. diagonalisable sur \mathbf{C} , et g_u est *unipotent*, i.e. il existe un entier k tel $(g_u - \text{id})^k = 0$. De plus l'ensemble des éléments unipotents de $O(n, 1)$ est inclus dans $O^+(n, 1)$ ³, donc en partant de $g \in O^+(n, 1)$, l'élément g_s est encore dans $O^+(n, 1)$.

Pour rester sur \mathbf{R} , on décompose chaque valeur propre de g_s sous la forme $re^{i\theta}$: $g_s = g_h g_e = g_e g_h$ où g_h est dite *hyperbolique* (semi-simple à valeurs propres dans $\mathbf{R}_{>0}$) et g_e *elliptique* (semi-simple à valeurs propres de module 1).

Tous les éléments g_u, g_h, g_e sont déterminés par g et si $g \in O^+(n, 1)$ ils sont tous dans $O^+(n, 1)$. Forts de cette décomposition algébrique, nous pouvons la traduire en termes géométriques (voir figure 6) :

3. En effet, il est connexe.

PROPOSITION 3. *Un élément g non trivial de $O^+(n, 1)$ est de l'une des trois formes suivantes :*

- (1) *g est loxodromique, c'est-à-dire $g = g_h g_e$ avec $g_h \neq \text{Id}$. Il réalise un vissage le long d'une droite de X et a deux points fixes dans ∂X , l'un attracteur et l'autre répulseur. Dans ce cas, on a $\inf_{x \in X} d(x, g(x)) > 0$.*
- (2) *g est parabolique, c'est-à-dire $g = g_e g_u$ avec $g_u \neq \text{Id}$. On a un point fixe dans ∂X mais pas dans X et $\inf_{x \in X} d(x, g(x)) = 0$*
- (3) *g est elliptique, c'est-à-dire $g = g_e$. Il y a au moins un point fixe dans X .*

Nous donnons la preuve générale de ce fait important, et donnerons une autre vision propre aux dimensions 2 et 3 par la suite. En attendant, on peut déjà illustrer ce résultat par la figure 6

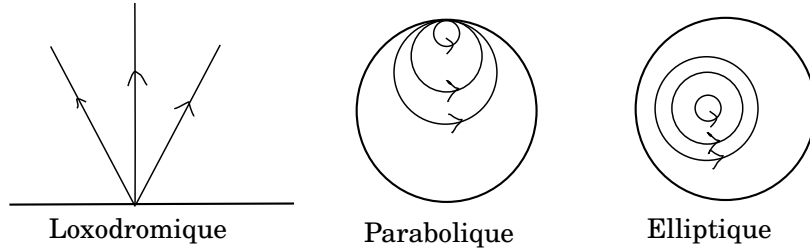


FIGURE 6. Les différents types d'isométries hyperboliques

3.2.1. *Preuve générale.* Commençons par deux lemmes :

LEMME 1. *g_e est conjugué dans G à un élément de $O(n)$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que g_e fixe un point. Or g_e est inclus dans un sous-groupe compact commutatif de G (toutes ses valeurs propres sont de module 1). Votre théorème de point fixe préféré appliqué à l'action de ce groupe sur le modèle de la boule implique que g_e y a un point fixe : choisissons un point x dans le disque et considérons l'enveloppe convexe de son orbite sous g_e (enveloppe convexe au sens de la géométrie affine sur la boule). C'est un compact.

Alors les sommes de Césaro $\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} g_e^k x$ convergent vers un point de la boule, fixe sous g_e . \square

LEMME 2. *$g_h \neq \text{Id}$ a une unique valeur propre > 1 , de multiplicité 1.*

DÉMONSTRATION. Si λ et μ sont deux valeurs propres avec $\lambda\mu \neq 1$, alors V_λ et V_μ sont orthogonaux pour q . Ça implique notamment que si $\lambda > 1$, V_λ est isotrope. Or q est de signature $(n, 1)$, donc la dimension maximale d'un espace isotrope est 1. L'existence de deux valeurs propres > 1 $\lambda \neq \mu$ implique à son tour que le plan $V_\lambda + V_\mu$ est isotrope, ce qui est absurde. \square

L'élément g_e induit une décomposition orthogonale (pour q) de \mathbf{R}_{n+1} en $W \oplus W^1 \oplus W^{-1}$ où W^ε est l'espace propre pour la valeur propre ε . Sur W , g_e se décompose par blocs 2×2 de matrices de rotation. Comme g_u et g_h commutent à g_e , ils préservent cette décomposition et g_u agit trivialement sur W . De plus, la restriction de g_h à chaque plan sur lequel g_e agit par une rotation

d'angle $\neq 0$ ou π doit être une homothétie. Le second lemme implique que g_h restreinte à W est l'identité.

Il reste à montrer que sur $W^+ \oplus W^-$, on ne peut avoir à la fois g_h et g_u différent de l'identité.

Si $g_h \neq \text{Id}$, alors d'après le deuxième lemme, g_h est conjugué à

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \cosh(t) & \sinh(t) \\ & & & \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Par commutation, g_u doit donc avoir la même décomposition, c'est-à-dire appartenir au produit $O(n-1) \times O^+(1,1)$. Comme il est de plus unipotent, on obtient bien $g_u = 1$. De plus, pour que g_u soit dans $O^+(n,1)$, il faut que W^- soit inclus dans le sous-espace fixe pour g_h . Dans ce cas, on obtient bien la description annoncée : après conjugaison, g est la translation de longueur t le long de la géodésique $(0, \dots, 0, \sinh(t), \cosh(t))$ plus une rotation dans son hyperplan orthogonal.

Il reste le cas $g_h = \text{Id}$, mais pas g_u . Il nous faut comprendre les éléments unipotents de $O^+(n,1)$. Notons $g_u = e^A$, A dans l'algèbre de Lie de G . Cette dernière condition se traduit par $b(v, Aw) = -b(Av, w)$ pour tout couple (v, w) . En particulier, pour tout entier p , $\text{im}(A^p)$ et $\ker(A^p)$ sont orthogonaux. Autrement dit leur intersection est isotrope, donc de dimension ≤ 1 . D'autre part A se décompose par blocs de Jordan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Pour un tel bloc de taille r , si $r > 3$, la dimension de $\text{im}(A^2) \cap \ker(A^2)$ est 2. Donc la taille de chaque bloc est 2 ou 3. Enfin, il ne peut y avoir qu'un seul bloc non nul sinon la dimension de $\text{im}(A) \cap \ker(A)$ est > 1 . Montrons par l'absurde que le bloc non nul ne peut avoir une taille 2 : $\text{im}(A)$ est orthogonal à $\ker(A)$. De plus, si $v \notin \ker(A)$, alors $b(Av, v) = -b(v, Av)$, donc $b(Av, v) = 0$. Or Av est non nul, donc si $\text{im}(A)$ est de dimension 1, v est orthogonal à $\text{im}(A)$. Donc l'orthogonal de $\text{im}(A)$ serait tout \mathbf{R}^{n+1} , ce qui est absurde.

Finalement, on montre que g_u est conjuguée dans G à la matrice :

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

qui fixe le point $(0, \dots, 0, 1, 0, 1)$ de ∂X (Exercice).

3.2.2. *En dimension 2 et 3.* On a vu qu'en dimension 2 et 3, le groupe d'isométries directes s'identifie à $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$ et $\text{PSL}(2, \mathbf{C})$.

Nous pouvons donc réinterpréter le théorème de classification :

PROPOSITION 4. *Soit $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ non trivial. Alors on a les trois possibilités suivantes :*

- si $|\mathrm{Tr}(g)| > 2$, alors g est loxodromique,
- si $|\mathrm{Tr}(g)| = 2$, alors g est parabolique,
- si $|\mathrm{Tr}(g)| < 2$, alors g est elliptique,

DÉMONSTRATION. Toute la discussion repose sur les vecteurs propres réelles de g . Dans le premier cas, g a deux droites propres réelles, associées à des valeurs propres réelles $\lambda > 1$ et $\frac{1}{\lambda}$, qui correspondent à deux points fixes dans $\partial H^2 \simeq \mathbf{RP}^1$. Qui à conjuguer g , on peut mettre ces points fixes en ∞ et 0, et obtenir le premier dessin dans la figure 6.

Dans le deuxième cas, il y a une valeur propre double ± 1 . Si $g \neq \pm \mathrm{Id}$, ça implique que g admet un unique point fixe. Si on met ce point fixe à l'infini, alors g est conjugué, dans $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$, à $\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc agit sur le demi-plan par $z \mapsto z \pm 1$.

Dans le troisième cas, g a deux droites propres complexes (non réelles) conjuguées, donc a un unique point fixe dans \mathbf{H}^2 . \square

Le cas de la dimension 3 se traite de manière similaire :

PROPOSITION 5. *Soit $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ non trivial. Alors on a les trois possibilités suivantes :*

- si $|\mathrm{Tr}(g)| > 2$, ou $\mathrm{Tr}(g) \notin \mathbf{R}$, alors g est loxodromique,
- si $\mathrm{Tr}(g) = \pm 2$, alors g est parabolique,
- si $|\mathrm{Tr}(g)| < 2$ et $\mathrm{Tr}(g) \in \mathbf{R}$, alors g est elliptique,

DÉMONSTRATION. D'abord g a un point fixe dans $\mathbf{CP}^1 \simeq \partial H^2$ (toute homographie a un point fixe). Quitte à conjuguer, on peut supposer que c'est ∞ , et donc g agit comme une transformation affine de $\mathbf{CP}^1 : z \mapsto az + b$, où $a = \lambda^2$ avec λ valeur propre de g et $\mathrm{Tr}(g) = \lambda + \frac{1}{\lambda}$. Notons $a = |\mu|$ avec $|\mu| = 1$. On a écrit plus haut la transformation du demi-espace qui correspond à g : on peut plus précisément l'écrire $z, t \mapsto |a|(\mu z + \frac{b}{|a|}, t)$. Cette transformation a un autre point fixe dans \mathbf{CP}^1 sauf si $a = 1$, $b \neq 0$. On trouve donc le cas 2.

Supposons donc que $a \neq 1$. On peut supposer que le deuxième point fixe est 0, quitte à conjuguer. Autrement dit, $b = 0$. La transformation $z, t \mapsto |a|(\mu z, t)$ a un point fixe à l'intérieur si et seulement si $|a| = 1$ (et donc $\mu \neq 1$). Dans ce cas, toute la géodésique $(0, \infty)$ est fixe. De plus, λ est de module 1 et $\mathrm{Tr}(g) = \lambda + \frac{1}{\lambda} = 2\mathrm{Re}(\lambda)$ est réelle et dans $] -2, 2[$. C'est le troisième cas.

Dans les autres cas, g a exactement 2 points fixes dans \mathbf{CP}^1 , aucun à l'intérieur, et est conjuguée à $(z, t) \mapsto a(z, t)$. \square

(G, X) -variétés

On voudra définir la notion de *variété hyperbolique* : que signifie qu'une variété porte une structure hyperbolique ?

Pour ça, on commence par un (apparent) détour par la notion plus générale de *structure géométrique* ou (G, X) -structure. Le lecteur désirant approfondir cette notion est renvoyé aux notes du cours déjà mentionné, dont nous reprenons ici des parties.

1. Définition

Toutes les variétés et applications considérées ici sont lisses (C^∞). Dans cette section X sera toujours, sauf mention du contraire, une variété connexe. On note G un sous-groupe du groupe des difféomorphismes de X . On ne veut pas considérer des groupes trop importants pour faire de la géométrie plutôt que de la topologie : on demande à G d'agir *analytiquement*.

DÉFINITION 2. *Un sous-groupe $G \subset \text{Diff}(X)$ agit analytiquement sur X si pour tout couple d'éléments g_1, g_2 de G , et tout ouvert non vide U de X , si les difféomorphismes g_1 et g_2 coïncident sur U , alors $g_1 = g_2$.*

Dorénavant, on supposera toujours que l'action de G sur X est *transitive* et *analytique*. Étant donné un tel couple (G, X) , on peut définir la notion de (G, X) -structure sur une variété V : c'est la donnée d'un atlas de carte sur V à valeur dans X , dont les changements de cartes sont donnés par des éléments de G (voir figure 1) :

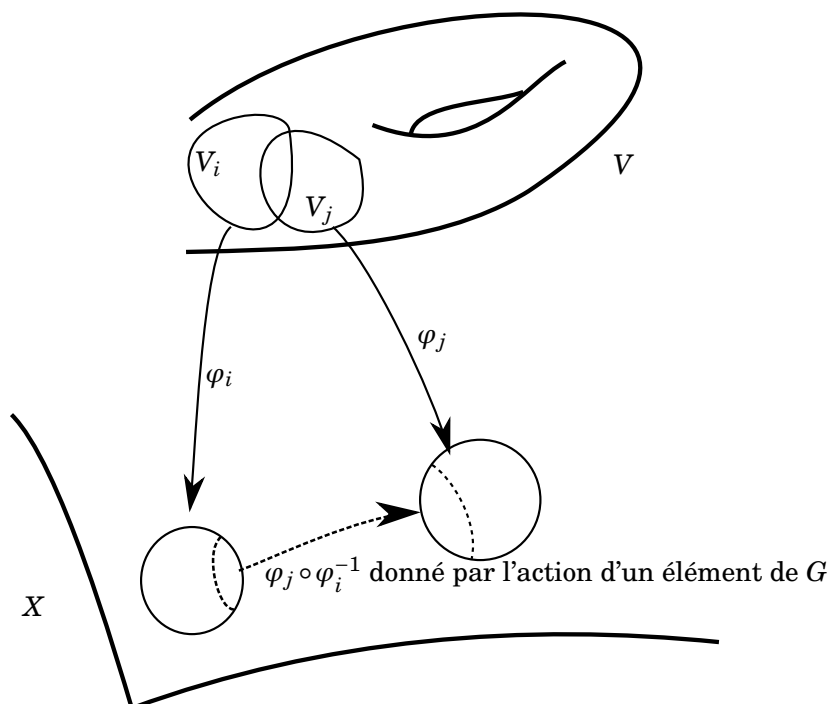
DÉFINITION 3. *Une (G, X) -structure sur une variété V est un atlas de cartes $\varphi_i : V_i \rightarrow X$ tel que :*

- Les V_i forment un recouvrement ouvert de X
- Les φ_i sont des difféomorphismes sur leur image.
- Tout changement de cartes $f_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$, de $\varphi_i(V_i \cap V_j)$ dans $\varphi_j(V_i \cap V_j)$ est localement la restriction de l'action d'un élément de G .

On appelle (G, X) -variété une variété munie d'une (G, X) -structure. L'intérêt de ces structures est que les constructions géométriques locales faites sur X descendent sur V . On peut penser par exemple à des métriques invariantes par le groupe G .

2. Exemples

L'exemple principal qu'on a en tête est la géométrie hyperbolique : $X = \mathbf{H}^n$, et G est son groupe d'isométries. Cependant d'autres exemples existent ! On en donne une petite liste ci-dessous. Notons que nous aurons besoin dans notre étude des variétés hyperboliques de considérer aussi le cas de la géométrie affine.

FIGURE 1. Les cartes d'une (G, X) -structure

On rajoute dans le tableau suivant le groupe d'isotropie de la structure, c'est-à-dire (la classe de conjugaison) du stabilisateur d'un point¹. Nous reviendrons bientôt sur la construction de l'espace hyperbolique \mathbf{H}^n .

Structure	Espace X	Groupe G	Groupe d'isotropie
Euclidienne	\mathbf{R}^n	$O(n) \times \mathbf{R}^n$	$O(n)$
Sphérique	\mathbf{S}^n	$O(n+1)$	$O(n)$
Hyperbolique	\mathbf{H}^n	$O^+(n, 1)$	$O(n)$
Affine (réelle)	\mathbf{R}^n	$GL(n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n$	$GL(n, \mathbf{R})$
Projective complexe	\mathbf{CP}^1	$PGL(2, \mathbf{C})$	$T^+ = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$
Conforme	$\mathbf{S}^n = \partial\mathbf{H}^{n+1}$	$O^+(n+1, 1)$	$(O(n) \times O^+(1, 1)) \times \mathbf{R}^n$
Projective réelle	\mathbb{RP}^n	$PGL(n+1, \mathbf{R})$	$PGL(n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n$

Cette liste n'est pas exhaustive, on peut par exemple mentionner les structures hyperboliques complexes, Cauchy-Riemann, affines complexes, de translation...

A titre d'exercice, on peut vérifier que le tore \mathbf{T}^2 peut être muni d'une structure euclidienne, mais aussi projective complexe.

3. Développante et holonomie

Une façon de comprendre une (G, X) -structure sur une variété V connexe est de construire l'*application développante*. C'est le but de cette section. On se repose pour cela sur l'hypothèse d'analyticité de l'action de G sur X : en

1. Rappelons que l'action de G est supposée transitive; donc tous les stabilisateurs sont conjugués.

partant d'une carte, on peut en faire le prolongement analytique² grâce aux changements de cartes, pour finir par construire une application du revêtement universel \tilde{V} de V vers X . Cette application est par construction un difféomorphisme local, mais son comportement global peut-être très compliqué. Ayant construit cette application développante, l'action du groupe fondamental de V sur son revêtement universel se traduit par l'action d'éléments du groupe G : on obtient naturellement la *représentation d'holonomie* de la (G, X) -structure, c'est-à-dire un morphisme $\pi_1(V) \rightarrow G$. Ce morphisme fait le lien entre géométrie et représentations du groupe fondamental.

3.1. Construction de l'application développante. Nous commençons par définir la notion naturelle de morphisme de (G, X) -structure, ou (G, X) -morphisme :

DÉFINITION 4. *Soit V et V' deux (G, X) -variétés. Un (G, X) -morphisme $f : V \rightarrow V'$ est un difféomorphisme local qui est donné localement dans les cartes par l'action d'un élément de G .*

Soit V une (G, X) -variété connexe. Son revêtement universel est naturellement muni d'une (G, X) -structure en composant les cartes par l'application de revêtement. On montre maintenant qu'il existe un (G, X) -morphisme D du revêtement universel \tilde{V} dans X , qui est essentiellement unique : on l'appelle application développante.

PROPOSITION 6. *Il existe un (G, X) -morphisme D de \tilde{V} dans X . De plus, tout autre (G, X) -morphisme de \tilde{V} dans X est de la forme $g \circ D$, pour un élément $g \in G$.*

DÉMONSTRATION. Fixons un point $v_0 \in \tilde{V}$. On choisit une carte de la (G, X) -structure $\varphi_0 : V_0 \rightarrow X$ autour de v_0 . L'application D recherchée coïncidera avec φ_0 sur V_0 et on cherche à la prolonger. On montrera plus précisément : il existe un unique (G, X) -morphisme D de \tilde{V} dans X qui coïncide avec φ_0 sur un voisinage de v_0 . Pour simplifier nous supposons qu'il existe une suite de cartes $(\varphi_i : V_i \rightarrow X)_{i \in I}$ de la (G, X) -structure telle que l'union des V_i recouvre \tilde{V} et V_i rencontre toujours V_{i+1} .

On commence par isoler le lemme suivant, qui met en évidence l'utilité de l'hypothèse d'analyticité :

LEMME 3. *Soit W une (G, X) -variété connexe. Deux (G, X) -morphisms φ, φ' à valeurs dans X qui coïncident sur un ouvert non vide coïncident sur tout W .*

DÉMONSTRATION. On considère l'ensemble des $w \in W$ pour lesquels φ et φ' coïncident sur un voisinage de w . C'est un ensemble non-vidé, ouvert par construction. Il reste à voir qu'il est fermé. Pour ça, soit w un point dans l'adhérence. Lisons φ et φ' dans une carte autour de w . Ils sont chacun donnés par un élément g et g' de G , par définition de (G, X) -morphisme. De plus, g et g' coïncident sur un ouvert inclus dans la carte, par hypothèse sur w . L'analyticité de l'action de G garantit que $g = g'$, c'est-à-dire que φ et φ' coïncident au voisinage de w . \square

2. de façon parfaitement similaire au prolongement analytique des fonctions holomorphes.

On prolonge alors φ_0 de la manière suivante : considérons la suite de cartes $(\varphi_i : V_i \rightarrow X)_{i \in I}$ de la (G, X) -structure telle que l'union des V_i recouvre \tilde{V} et V_i rencontre toujours V_{i+1} . Par définition de (G, X) -structure, il existe pour tout $i \neq 0$ un élément g_i tel que $\varphi_{i-1} = g_i \circ \varphi_i$. Pour tout $v \in V_i$, on pose

$$D(v) = g_1 \circ \dots \circ g_i(\varphi_i(v)).$$

Cette application est bien définie : si $v \in V_i \cap V_{i'}$, alors par construction on a

$$g_{i+1} \circ \dots \circ g_{i'}(\varphi_{i'}(v)) = \varphi_i(v).$$

C'est bien sûr un (G, X) -morphisme. L'unicité du prolongement est enfin donnée par le lemme.

Le lemme permet aussi de montrer la deuxième partie de la proposition. Si D et D' sont deux (G, X) -morphisms, il existe un élément $g \in G$ tel qu'au voisinage de v_0 , on a $D' = g \circ D$. Ainsi, d'après le lemme, $D' = g \circ D$ sur \tilde{V} tout entier. \square

3.2. Morphisme d'holonomie. On fixe toujours une (G, X) -variété connexe et on choisit un point base $v \in V$. Notons $\Gamma = \pi_1(V, v)$. Ce groupe agit sur le revêtement universel \tilde{V} . On fixe une application développante D de la (G, X) -structure. La proposition suivante définit le *morphisme d'holonomie* associé :

PROPOSITION 7. *Il existe un unique morphisme $h : \Gamma \rightarrow G$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a*

$$D \circ \gamma = h(\gamma) \circ D.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $D \circ \gamma$ est un (G, X) -morphisme de \tilde{V} vers X . D'après la proposition précédente, il existe un élément de G , qu'on note $h(\gamma)$ tel que $D \circ \gamma = h(\gamma) \circ D$. On vérifie facilement que h est bien un morphisme de groupes. \square

Pour les notions d'application développante et de morphisme d'holonomie, on fait des choix. Remarquons que si on change l'application développante D en $g \circ D$, alors on conjugue le morphisme d'holonomie : $h(\gamma)$ devient $g \circ h(\gamma) \circ g^{-1}$.

4. Principe d'Ehresmann-Thurston

Un problème qui nous intéressera au plus haut point est celui de déformer les structures géométriques. Pour étudier cela précisément, il est utile d'introduire l'approche fibrée. Cependant, comme nous n'aurons pas directement besoin des résultats présentés ici, nous renvoyons le lecteur aux notes déjà mentionnées. Le résultat principal qu'on peut obtenir dans cette direction est le principe d'Ehresmann-Thurston : si une représentation $\Gamma \rightarrow G$ est l'holonomie d'une (G, X) -structure, il en est de même pour toute représentation suffisamment proche. Commençons par définir l'espace des représentations et sa topologie, qui feront partie des objets centraux de ce cours.

Soit V une (G, X) -variété, Γ son groupe fondamental. On définit l'espace des représentations

$$\mathcal{R}(\Gamma, G) = \{\text{morphisms } h : \Gamma \rightarrow G\},$$

muni de la topologie de la convergence simple. On peut en définir une base d'ouverts : Γ est de type fini, notons Σ une partie génératrice finie. Soit U un

voisinage ouvert de $e \in G$. Deux représentations h_1 et h_2 dans $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ sont dites U -proches si pour tout $\gamma \in \Sigma$, on a $h_1(\gamma) \in h_2(\gamma) \cdot U$.

Plus que cette notion de proximité, nous utiliserons le notion de déformation d'une représentation en une autre :

DÉFINITION 5. Soit $h_0 \in \mathcal{R}(\Gamma, G)$ et U un voisinage ouvert de $e \in G$. Une déformation U -proche de h_0 est une représentation $h_1 \in \mathcal{R}(\Gamma, G)$ tel qu'il existe un chemin de déformation joignant h_0 à h_1 et restant toujours U -proche de h_0 .

On peut alors énoncer le *principe d'Ehresmann-Thurston* qui permet effectivement de déformer des (G, X) -structures. Il est valable dans le cas des variétés *compactes*.

THÉORÈME 1. Soit $h_0 \in \mathcal{R}(\Gamma, G)$ un morphisme d'holonomie d'une (G, X) -structure sur une variété compacte V . Il existe alors un voisinage U de $e \in G$ tel que toute déformation h_1 U -proche de h_0 soit un morphisme d'holonomie d'une (G, X) -structure.

On peut même énoncer que l'application qui à une (G, X) -structure associe son holonomie (dans l'espace des représentations modulo conjugaison) est un homéomorphisme local. On renvoie le lecteur à [Gol88] pour une présentation de ce point de vue et [BG04, Section 2] pour une ouverture sur le cas non-compact.

5. Complétude

5.1. Complétude et quotient. Nous concluons cette présentation abstraite des (G, X) -structures en nous penchant sur la notion cruciale de *complétude* d'une (G, X) -structure. En effet, un exemple naturel de (G, X) -structure est un quotient $\Gamma \backslash X$, où Γ est un réseau sans torsion de G . Dans ce cas, la développante est un revêtement de X . Mais il n'y a aucune raison que ce soit le cas en général, et on peut voir de nombreux exemples dans le cadre des \mathbf{CP}^1 -structures. Nous en verrons plus tard dans le cadre de structures hyperboliques non-complètes sur des variétés non-compactes. Ces « jolies » structures où la développante est un revêtement méritent une définition !

DÉFINITION 6. Une (G, X) -structure est dite *complète* si son application développante est un revêtement de X .

Dans le cas où X est simplement connexe (ce qui est le cas dans tous les exemples que nous traitons), on peut alors énoncer :

PROPOSITION 8. On suppose X simplement connexe. Les (G, X) -structures complètes sont exactement les quotients $\Gamma \backslash X$ où Γ est un sous groupe discret sans torsion de G .

DÉMONSTRATION. Soit V une (G, X) -variété.

Comme X est simplement connexe, l'application développante devient un difféomorphisme. Ça implique que le morphisme d'holonomie est injectif et discret. Si on identifie le groupe fondamental $\pi_1(V)$ avec son image Γ dans G , on obtient donc que V est bien le quotient $\Gamma \backslash X$. Et réciproquement si Γ est un sous groupe discret sans torsion de G , $V = \Gamma \backslash X$ est une (G, X) -variété complète. \square

5.2. Cas métrique. La notion de complétude peut être délicate à manipuler, y compris quand V est compacte. Cependant, si X est muni d'une métrique G -invariante, alors on peut décrire un peu plus précisément la situation. Remarquons d'abord que dans ce cas, n'importe quelle (G, X) -variété V hérite d'une métrique (dans chaque carte, on a la métrique de X , et les changements de cartes sont des isométries).

Un cadre très naturel dans lequel X est muni d'une métrique G -invariante complète est celui des quotients $X = G/K$ où K est un sous-groupe compact. C'est le cas notamment... des espaces hyperboliques $X = SO^+(n, 1)/SO(n)$. Nous nous concentrons maintenant sur ces exemples qui sont en grande partie à l'origine de la théorie que nous venons d'exposer.

Le cas des variétés compactes est clair :

PROPOSITION 9. *Si X est muni d'une métrique riemannienne G -invariante, et que V est une variété compacte, alors toute (G, X) -structure sur V est complète.*

DÉMONSTRATION. Notons que sous les hypothèses de la proposition, V est naturellement équipé d'une métrique riemannienne issue de celle de X .

De plus, comme V est compacte, il existe ε telle que la développante restreinte à toute boule de rayon ε est un difféomorphisme isométrique. Autrement dit, autour de tout point dans l'image de la développante, une boule de rayon ε est encore dans l'image.

Ainsi, l'image de la développante est un ε -voisinage d'elle-même : c'est donc X tout entier. Donc la développante est un isomorphisme local propre : c'est un revêtement. \square

Pour les variétés non-compactes, la proposition suivante fait le lien avec la complétude métrique (i.e. la convergence des suites de Cauchy) :

PROPOSITION 10. *Si X est muni d'une métrique riemannienne G -invariante complète, et que V est une (G, X) -variété, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- la (G, X) -structure sur V est complète,
- V , comme variété riemannienne, est métriquement complète,
- On peut recouvrir V par une famille croissante $(V_t)_{t>0}$ de compacts tels que V_{t+a} contient un a -voisinage de V_t pour tout a positif.

DÉMONSTRATION. L'équivalence entre les deux derniers points est laissée au lecteur : la complétude métrique équivaut au fait que les boules fermées de V sont compactes dans V .

Montrons que le premier équivaut au second :

Si V est une (G, X) -variété complète, l'application développante descend en un revêtement $X \rightarrow V$. Comme X est complet, V l'est aussi (les boules fermées sont compactes).

Si V est métriquement complète, montrons qu'on peut relever les chemins pour l'application développante $D : \tilde{V} \rightarrow X$. Soit donc $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin dans X . Remarquons que \tilde{V} est aussi métriquement complet. Soit $T \subset [0, 1]$ un ouvert connexe maximal sur lequel on peut relever α . Comme D est un difféomorphisme local, T est ouvert. Comme \tilde{V} est complet, T est aussi fermé. Donc T est tout l'intervalle $[0, 1]$ et D a la propriété de relèvement des chemins : c'est un revêtement. \square

Variétés hyperboliques complètes

Nous étudions dans ce chapitre les variétés orientées V munies d'une structure hyperbolique complète.

Notons que \mathbf{H}^n est muni d'une forme volume invariante sous le groupe d'isométrie : dans le modèle du demi-espace, c'est la forme en coordonnées $\frac{1}{x_n} dx_1 \dots dx_n$. C'est une forme volume naturellement associée à la métrique riemannienne. Toute variété hyperbolique V récupère donc une forme volume ω . On définit le *volume* de V comme l'intégrale sur V de ω . Il peut-être fini ou infini.

Nous nous concentrons dans cette partie sur les variétés de volume fini.

Fixons une origine x_0 dans l'hyperboloïde X et un repère e_0 de $T_{x_0}X$. On a alors l'équivalence entre d'une part les sous-groupes discrets sans torsion de $O^+(n, 1)$ et d'autre part les variétés hyperboliques complètes munies d'un repère e . En partant du groupe discret sans torsion Λ , la variété est $\Lambda \backslash X$ et le repère est l'image de e_0 par la projection. Dans l'autre sens, à partir d'une variété munie d'un repère, on construit l'unique développante qui envoie e sur e_0 . Alors son holonomie a pour image un sous-groupe discret sans-torsion Λ .

1. Cas compact

Dans le cas des variétés compactes, on peut en dire un peu plus sur les éléments du sous-groupe discret :

PROPOSITION 11. *Soit $V \simeq \Gamma \backslash X$ une variété hyperbolique compacte. Alors on a :*

- (1) *Tous les éléments de Γ sont loxodromiques.*
- (2) *Chaque classe d'homotopie libre contient une unique géodésique fermée.*
- (3) *Les relevés à X de deux géodésiques distinctes ont des extrémités distinctes.*

DÉMONSTRATION. (1) Le caractère discret sans-torsion de Γ exclut immédiatement les éléments elliptiques. Si un élément γ était parabolique, on aurait $\inf_{x \in X} d(x, \gamma x) = 0$. Donc on aurait des courbes fermées non triviales (projection de la géodésique reliant un point x à γx) arbitrairement courtes. C'est impossible.

- (2) Une courbe fermée simple correspond à un élément $\gamma \in \Gamma$. Cet élément est loxodromique, donc a un axe (l'unique géodésique reliant les deux points fixes sur ∂X). La projection de cet axe est une géodésique fermée dans la classe du chemin de départ.

- (3) Deux géodésiques de X qui ont une extrémité commune se rapprochent indéfiniment, donc ne peuvent pas être distinctes dans V . \square

Nous voulons maintenant mieux comprendre le cas non-compact. Cependant, il nous faut faire un détour par les variétés euclidiennes, c'est-à-dire les $(O(n) \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ -structures.

2. Structures euclidiennes et théorème de Bieberbach

2.1. Géométrie euclidienne et sous-groupes discrets. Dans cette section, on s'intéresse aux structures euclidiennes, c'est-à-dire que $X = \mathbf{R}^n$ et $G = I(n) = O(n) \times \mathbf{R}^n \subset GL(n+1, \mathbf{R})$. En effet, on laisse le lecteur vérifier qu'un élément $\alpha = (A, a)$ de G peut-être identifié à la matrice $\begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note p la projection canonique de $I(n)$ dans $O(n)$.

DÉFINITION 7. *On appelle axe de l'élément α l'espace affine dirigé par $\ker(A - \text{Id})$ et tel que α agisse par vissage le long de cet axe (i.e. rotation dans son orthogonal et translation le long de ce sous-espace).*

Mentionnons que α est une translation si son axe est tout \mathbf{R}^n et une rotation si son axe est réduit à un point. Par exemple une rotation de centre b s'écrit

$$(A, b - Ab) = (\text{Id}, b)(A, 0)(\text{Id}, b)^{-1}.$$

Le théorème de Bieberbach permet de décrire les sous-groupes Δ discrets et cocompacts (i.e. $\Delta \backslash I(n)$ est compact) :

THÉORÈME 2 (Bieberbach, 1911). *Tout sous-groupe Δ discret cocompact de $I(n)$ contient un sous-groupe d'indice fini constitué de translations.*

Le théorème implique que $p(\Delta)$ est fini. D'autre part, ce sous-groupe d'indice fini de translations est un sous-groupe discret cocompact de \mathbf{R}^n . Il est donc abélien et un exercice classique montre que c'est le groupe engendré par n translations le long des vecteurs d'une base de \mathbf{R}^n .

COROLLAIRE 1. *Toute variété euclidienne compacte de dimension n admet un revêtement fini homéomorphe à un tore de dimension n .*

On va démontrer ce théorème dans les deux paragraphes suivants. Le point crucial est ce principe :

PRINCIPE 1. *Si deux isométries α et β de $I(n)$ engendrent un groupe discret et vérifient que $A = p(\alpha)$ et $B = p(\beta)$ sont suffisamment proche de l'identité, alors α et β commutent.*

On reverra un énoncé similaire à ce principe dans le cadre de la géométrie hyperbolique.

2.2. Commutateurs d'isométries euclidiennes. On note dans cette section $\|\cdot\|$ la norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ déduite de la norme euclidienne sur \mathbf{R}^n .

LEMME 4. *Soient A et B deux matrices de $O(n)$. Alors on a :*

$$\|[A, B] - \text{Id}\| \leq 2\|A - \text{Id}\| \cdot \|B - \text{Id}\|.$$

DÉMONSTRATION. On écrit $[A, B] - \text{Id} = ABA^{-1}B^{-1} - \text{Id} = (AB - BA)A^{-1}B^{-1} = ((A - \text{Id})(B - \text{Id}) - (B - \text{Id})(A - \text{Id}))A^{-1}B^{-1}$. En passant à la norme (rappelons que $\|A\| = \|B\| = 1$), on obtient bien l'inégalité annoncée. \square

En particulier, si $\|A - \text{Id}\|$ et $\|B - \text{Id}\| < \frac{1}{2}$, on a encore $\|[A, B] - \text{Id}\| < \frac{1}{2}$.

LEMME 5. Soient A et B deux matrices de $O(n)$ avec $\|B - \text{Id}\| < \frac{1}{2}$. Si A commute à $[A, B]$, alors A et B commutent.

DÉMONSTRATION. Comme A et $[A, B]$ commutent, alors A et BAB^{-1} commutent. On diagonalise ces deux dernières matrices par blocs 2-2 dans une base orthonormée : soient E_1, \dots, E_r les sous-espaces de diagonalisation de A et BAB^{-1} . Comme BE_1, \dots, BE_r sont aussi des sous-espaces stables pour BAB^{-1} , alors B permute les E_i .

Supposons $x \in E_i$ et $Bx \in E_j$ avec $i \neq j$. Alors $\|Bx - x\|^2 = \|Bx\|^2 + \|x\|^2 = 2\|x\|^2$. Donc $\|B - \text{Id}\|$ n'est pas $< \frac{1}{2}$. Donc B préserve chacun des sous-espaces propres de A , et A et B commutent. \square

Des deux précédents lemmes, ainsi que de la remarque entre les deux, on déduit le corollaire :

COROLLAIRE 2. Soient A et B deux matrices de $O(n)$ avec $\|A - \text{Id}\|$ et $\|B - \text{Id}\| < \frac{1}{2}$. Si la suite

$$([A, [A, \dots, [A, B] \dots]])_{k \geq 0}$$

stationne en Id , alors A et B commutent.

Étudions maintenant les commutateurs d'éléments de $I(n)$. Soient $\alpha = (A, a)$, $\beta = (B, b)$ deux éléments de $I(n)$ et $\gamma = (C, c)$ leur commutateur. On montre d'abord :

LEMME 6. $|c| \leq \|B - \text{Id}\||a| + \|A - \text{Id}\||b|$.

DÉMONSTRATION. On calcule directement

$$c = A(BA^{-1}B^{-1} - \text{Id})b - (ABA^{-1} - \text{Id})a.$$

Il suffit alors de prendre la norme. \square

En particulier, si $\|A - \text{Id}\|$ et $\|B - \text{Id}\| < \frac{1}{2}$, on a $|c| < (|a| + |b|)$. On déduit de tout cela le lemme suivant, qui n'est autre que la version précise du principe énoncé plus haut :

LEMME 7. Soient $\alpha = (A, a)$ et $\beta = (B, b)$ deux éléments de $I(n)$ avec $\|A - \text{Id}\|$ et $\|B - \text{Id}\| < \frac{1}{2}$. Si α et β engendrent un sous-groupe discret de $I(n)$ alors ils commutent.

DÉMONSTRATION. Soit γ_k la suite définie par $\gamma_0 = \beta$ et $\gamma_{k+1} = [\alpha, \gamma_k]$. Notons $\gamma_k = (C_k, c_k)$. Le lemme 4 implique que C_k tend vers Id . Ensuite le lemme 6 implique que c_k reste bornée. Par discrétude de $\langle \alpha, \beta \rangle$, la suite C_k stationne en Id . Le corollaire 2 implique que A et B commutent.

Donc $\gamma_1 = (\text{Id}, c)$, avec $c = (A - \text{Id})b + (\text{Id} - B)a$, puis $\gamma_k = (\text{Id}, (A - \text{Id})^k c)$. Comme on a $\|A - \text{Id}\| < \frac{1}{2}$, la suite c_k tend vers 0. Toujours par discrétude, pour k grand, $(A - \text{Id})^k c = 0$. Mais A est orthogonale, donc on obtient $Ac = c$ et c est orthogonal à $\text{im}(A - \text{Id})$. On montre de même que c est orthogonal à $\text{im}(B - \text{Id})$.

Enfin, la formule $c = (A - \text{Id})b + (\text{Id} - B)a$ implique que $c = 0$: a et b commutent. \square

Ce résultat est la partie difficile du théorème de Bieberbach, mais n'utilise pas crucialement la géométrie euclidienne. On en verra d'ailleurs une généralisation en géométrie hyperbolique. La différence est qu'en géométrie euclidienne on peut en déduire le théorème de Bieberbach, et donc une classification des variétés euclidiennes compactes ; alors qu'il est plus délicat de faire de même en géométrie hyperbolique.

2.3. Sous-groupes discrets d'isométries euclidiennes.

2.3.1. Preuve du théorème de Bieberbach.

LEMME 8. *Tous sous-groupe discret Δ de $\text{I}(n)$ contient un sous-groupe abélien distingué d'indice fini qui contient toutes les translations*

DÉMONSTRATION. On définit :

$$\Delta_1 = \{(A, a) \in \Delta \mid \|A - \text{Id}\| < \frac{1}{2}\}.$$

Il est clair que Δ_1 contient toutes les translations et est stable par conjugaison. De plus les lemmes 4 et 7 implique que c'est un sous-groupe abélien. Il reste à prouver qu'il est d'indice fini.

La compacité de $\text{O}(n)$ implique qu'il existe un nombre fini (disons M) d'éléments $C_i \in p(\Delta)$ tels que pour tout $A \in p(\Delta)$, il existe i tel que $\|A - C_i\| < \frac{1}{2}$. Pour chaque i on choisit un élément $\gamma_i = (C_i, c_i) \in \Delta$. Soit alors $\alpha = (A, a) \in \Delta$ et i tel que $\|AC_i^{-1} - \text{Id}\| = \|A - C_i\| < \frac{1}{2}$. Alors $\alpha\gamma_i^{-1}$ est un élément de Δ_1 . Le sous-groupe Δ_1 est donc d'indice inférieur à M . \square

Le théorème de Bieberbach est alors une conséquence directe du lemme suivant :

LEMME 9. *Tout sous-groupe Δ discret abélien et cocompact de $\text{I}(n)$ n'est composé que de translations.*

DÉMONSTRATION. Soit $\alpha \in \Delta$. Tout élément de Δ commute à α , donc doit préserver son axe. Cet axe E est donc un sous-espace invariant de \mathbf{R}^n . La cocompacité force ce sous-espace à être tout \mathbf{R}^n . En effet, sinon, il y a des points x arbitrairement loin de l'axe E de α . Or la distance de tous les points de Δx à E est la même : on trouve donc des orbites de Δ arbitrairement loin ce qui contredit la cocompacité.

L'axe de α est \mathbf{R}^n , donc c'est une translation. \square

Le théorème de Bieberbach se montre alors directement : soit Δ un sous-groupe discret cocompact de $\text{I}(n)$. Alors le groupe Δ_1 donné par le lemme 8 est d'indice fini et discret, abélien et cocompact. Il est donc composé de translations.

2.3.2. *Variétés euclidiennes.* Les variétés complètes localement modelées sur l'espace euclidien \mathbf{R}^n sont les variétés de la forme $\Delta \backslash \mathbf{R}^n$ où Δ est un sous-groupe discret sans torsion de $\text{I}(n)$.

Le théorème de Bieberbach implique que les variétés euclidiennes compactes sont finiment revêtues par un tore plat. On comprend donc très bien

leur topologie. On pourra montrer par exemple que les seules surfaces euclidiennes compactes sont le tore et la bouteille de Klein (exercice : classifier les non-compactes). On connaît aussi la classification en dimension 3 et 4.

On aimerait suivre la même stratégie dans le cadre des variétés hyperboliques, mais on ne sait pas le faire. Cependant, on peut s'inspirer des techniques précédentes pour comprendre en partie la topologie des variétés hyperboliques. Nous le présentons dans le reste de ce chapitre.

3. Le lemme de Margulis

On reprend les arguments d'algèbre linéaire développée ci-dessus, dans le cadre cette fois de $O^+(n, 1)$. On obtient un résultat analogue au lemme 7 pour $O^+(n, 1)$. C'est un cas particulier d'un résultat plus général dû à Zassenhaus que nous énoncerons ensuite.

Pour deux éléments A et B dans $GL(n+1, \mathbf{R})$, on note $\alpha = A - \text{Id}$ et $\beta = B - \text{Id}$. On a :

LEMME 10. *On suppose $\|\alpha\|$ et $\|\beta\| < 1$. Alors*

$$\|[A, B] - \text{Id}\| \leq \frac{2\|\alpha\| \cdot \|\beta\|}{(1 - \|\alpha\|)(1 - \|\beta\|)}.$$

DÉMONSTRATION. On écrit comme dans la preuve de 4 :

$$[A, B] - 1 = (\alpha\beta - \beta\alpha)A^{-1}B^{-1}.$$

Or, comme $\|\alpha\| < 1$ et $A^{-1} = (\text{Id} + \alpha)^{-1}$ (idem pour B), on a

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\alpha\|} \text{ et } \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\beta\|}.$$

□

En particulier, si $\|A - \text{Id}\|$ et $\|B - \text{Id}\| < 2 - \sqrt{3}$, alors on a encore $\|[A, B] - \text{Id}\| < 2 - \sqrt{3}$, et même $\|A - \text{Id}\|$ et $\|B - \text{Id}\|$. On déduit un analogue du lemme 7 pour $O^+(n, 1)$:

LEMME 11 (Zassenhaus, 1938). *Soient A et B dans $O^+(n, 1)$ tels que $\|A - \text{Id}\|$ et $\|B - \text{Id}\| < 2 - \sqrt{3}$. On suppose qu'ils engendrent un sous-groupe discret de $O^+(n, 1)$. Alors A et B commutent.*

DÉMONSTRATION. On note Γ le groupe engendré par A et B . L'hypothèse est que Γ est discret.

Soit donc C un élément de $\Gamma \setminus \{\text{Id}\}$ tel que $\|C - \text{Id}\|$ soit minimale (en particulier $\|C\| < 2 - \sqrt{3}$). D'après le lemme 10, $[A, C] = [B, C] = \text{Id}$. Discutons selon la nature de C :

- (1) C est loxodromique : alors tout le groupe Γ préserve l'axe de C et agit sur l'orthogonal. Autrement dit, à conjugaison près, $\Gamma \subset O(n-1) \times \mathbf{R}$ et la projection de Γ sur $O(n-1)$ n'augmente pas la norme. On est donc ramené au cas orthogonal (on notera que $2 - \sqrt{3} < \frac{1}{2}$).
- (2) C est elliptique : alors C fixe un sous-espace hyperbolique de dimension $1 \leq d < n$ et Γ préserve ce sous-espace. Donc, à conjugaison près, $\Gamma \subset O^+(d, 1) \times O(n-d)$. On conclut par récurrence et en utilisant le cas orthogonal.

- (3) C est parabolique. Alors Γ fixe le point à l'infini fixé par C . Donc, à conjugaison près, Γ est un sous-groupe du groupe des similitudes euclidiennes de dimension $n - 1$. Mais une similitude qui n'est ni une dilatation ni une contraction serait un élément loxodromique de $O^+(n, 1)$ et donc ne commuterait pas à C . Donc Γ est inclus dans $I(n - 1)$ et on peut utiliser le lemme 7. □

On en déduit le résultat suivant, connu sous le nom de lemme de Margulis ou de Kazhdan-Margulis.

THÉORÈME 3. *Pour tout $n \geq 2$, il existe $\varepsilon(n) > 0$ tel que pour tout groupe discret Γ de $O^+(n, 1) = \text{Isom}(\mathbf{H}^n)$ et tout $x \in \mathbf{H}^n$, le groupe $\Gamma_\varepsilon(x)$ engendré par les éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $d(\gamma x, x) \leq \varepsilon$ contient un sous groupe abélien distingué et d'indice fini.*

DÉMONSTRATION. La preuve est analogue à celle du lemme 8. On note $G = O^+(n, 1)$ et $G_x = \text{Stab}_G(x)$. Il nous sera utile de noter que G_x est compact. On utilisera aussi le lemme technique suivant :

LEMME 12. *Soit Γ un groupe, avec S un ensemble générateur, qui agit transitivement sur un ensemble E de cardinal $> m$. On note Γ_m les éléments de Γ qui s'écrivent comme des mots de longueur $\leq m$ en S .*

Alors, pour tout $e \in E$, le cardinal de $\Gamma_m.e$ est au moins $m + 1$.

DÉMONSTRATION. Notons $r(m)$ le cardinal de l'orbite $\Gamma_m.e$. Si $r(m) \leq m$, il existe $i < m$ tel que $r(i + 1) = r(i) \leq m$. Mais alors, pour tout $m \geq i$, on a $r(m) = r(i) \leq m$. Ça contredit la transitivité de l'action de Γ sur E (qui est de cardinal $> m$). □

Reprenons la preuve du théorème. Soit U le voisinage ouvert de Id

$$U = \{A \in O^+(n, 1) \mid \|A - \text{Id}\| < 2 - \sqrt{3}\}.$$

Soit H le sous groupe engendré par les éléments de $\Gamma_\varepsilon(x) \cap U$. Le lemme 11 implique que H est abélien. Montrons qu'il est d'indice fini pour un ε bien choisi.

Soit V un voisinage compact de G_x et m le nombre de translatés de U nécessaires pour recouvrir V . On considère un voisinage symétrique $W = W^{-1}$ de G_x tel que $W^m \subset V$. Alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $g \in G$, $d(gx, x) < \varepsilon$ implique $g \in W$. C'est le ε qu'on cherche pour le théorème.

Montrons en effet que pour ce ε , $H = \langle \Gamma_\varepsilon(x) \cap U \rangle$ est d'indice fini. Soit E l'ensemble $\Gamma_\varepsilon(x)/H$. On veut montrer que le cardinal de E est fini. Or $\Gamma_\varepsilon(x)$ agit transitivement sur l'ensemble E . Et, par définition de ε , l'ensemble $S = \Gamma_\varepsilon(x) \cap W$ engendre $\Gamma_\varepsilon(x)$. Montrons que le lemme 12 implique que le cardinal de E est $\leq m$. Si on suppose le contraire, le cardinal de $S^m H/H$ est au moins $m + 1$. Or $S^m \subset W^m \subset V$. Donc, $S^m H/H \subset (V \cap \Gamma_\varepsilon(x))H/H$. Or V est recouvert par m translatés de U , donc le cardinal de $(V \cap \Gamma_\varepsilon(x))H/H$ est inférieur à m .

Nous avons donc construit un sous-groupe H abélien d'indice fini. Il reste à le rendre distingué. Mais pour ça, il suffit de remplacer H par l'intersection de ses conjugués (il n'y en a qu'un nombre fini). □

Mentionnons maintenant les généralisations de ces résultats. Tout d'abord, le lemme 11 est un cas particulier du théorème de Zassenhaus :

THÉORÈME 4 (Zassenhaus). *Soit G un groupe de Lie. Alors il existe un voisinage U de l'identité tel que tout groupe discret Γ de G engendré par des éléments de U est nilpotent.*

Le lemme de Margulis s'étend alors à un cadre plus général : on considère G un groupe de Lie, $X = G/K$ - avec K un sous-groupe compact - portant une métrique riemannienne G invariante. On reprend les notations de 3.

THÉORÈME 5 (Kazhdan-Margulis). *Il existe $\varepsilon > 0$ ne dépendant que de X tel que pour tout $x \in X$ et Γ sous-groupe discret de G , $\Gamma_\varepsilon(x)$ contient un sous-groupe d'indice fini nilpotent et distingué.*

Ce théorème se prouve comme le théorème 3, en considérant H le groupe engendré par $\Gamma_\varepsilon(x) \cap U$.

4. Décomposition fine-épaisse des variétés hyperboliques

On tire ici des conséquences topologiques de ces résultats pour les variétés hyperboliques. Soit $M = \Gamma \backslash \mathbf{H}^n$ une variété hyperbolique complète (éventuellement de volume ∞).

DÉFINITION 8. — *Si $x \in M$, le rayon d'injectivité de M en x est la borne supérieure des rayons des boules ouvertes centrées en x plongées dans M . On le note $r_M(x) = r(x)$.*

— *Pour $\varepsilon > 0$, la partie ε -épaisse de M est l'ensemble*

$$M_{\geq \varepsilon} = \{x \in M \mid r(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}\},$$

— *et la partie ε -fine de M est son complémentaire, soit l'ensemble*

$$M_{< \varepsilon} = \{x \in M \mid r(x) < \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Le lemme de Margulis implique que la partie fine a une forme standard dès que $\varepsilon \leq \varepsilon(n)$.

THÉORÈME 6. *On suppose $0 < \varepsilon \leq \varepsilon(n)$. Alors toute composante connexe de la partie ε -fine de M est isométrique au voisinage d'une géodésique courte ou au voisinage d'une pointe¹, ce dernier étant homéomorphe au produit d'une variété euclidienne par $]0, +\infty[$.*

DÉMONSTRATION. Pour $\gamma \in \Gamma$, on note $T(\gamma) = T_\varepsilon(\gamma)$ l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{H}^n \mid d(x, \gamma x) < \varepsilon\}.$$

Alors, si γ est loxodromique, $T(\gamma)$ est soit vide soit un voisinage ouvert de l'axe de γ . Si γ est parabolique, $T(\gamma)$ est une horoboule centrée en le point fixe de γ .

Notons p la projection de \mathbf{H}^n sur M . Alors on a :

$$p^{-1}(M_{< \varepsilon}) = \cup_{\Gamma \backslash \{\text{Id}\}} T(\gamma).$$

Cet ensemble est Γ -invariant et, comme pour tout γ , $\gamma T(\gamma) = T(\gamma)$, toute composante connexe T_0 de cet ensemble est de la forme :

$$T_0 = \cup_{J \backslash \{\text{Id}\}} T(\gamma),$$

où J est le stabilisateur de T_0 .

1. On dit souvent *cusps*.

Supposons que, pour 2 éléments de J , l'intersection $T(\gamma) \cap T(\gamma')$ est non vide. Il existe alors existe $x \in \mathbf{H}^n$ tel que $d(x, \gamma x)$ et $d(x, \gamma' x) < \varepsilon \leq \varepsilon(n)$. Le lemme de Margulis implique que le groupe engendré par γ et γ' contient un sous-groupe H abélien distingué et d'indice fini.

Considérons un élément non trivial $\alpha \in H$. Comme Γ est sans torsion, α est parabolique ou loxodromique. Comme le groupe $\langle \gamma, \gamma' \rangle$ normalise H , il fixe l'axe de α (si α est loxodromique) ou son point fixe à l'infini. Comme de plus c'est un groupe discret, γ et γ' sont du même type que α avec même axe ou même point fixe à l'infini. Par connexité de T_0 , tous les éléments de J ont le même type. On appelle ce type le type de T_0 .

Considérons maintenant l'image de T_0 dans M .

- (1) Si T_0 est hyperbolique, alors J est engendré par un unique élément et T_0 est un voisinage ouvert d'une géodésique de \mathbf{H}^n . M_0 est donc le voisinage ouvert de la projection de cette géodésique dans M (qui est de longueur $\leq \varepsilon$).
- (2) Si T_0 est parabolique, soit p son point à l'infini. Si $x \in \mathbf{T}_0$, toute la demi-géodésique reliant x à p est dans T_0 . Donc $T_0 \simeq \mathbf{R}^{n-1} \times]0, +\infty[$ et J agit sur la composante \mathbf{R}^{n-1} par isométries euclidiennes. Donc $M_0 \simeq (J \backslash \mathbf{R}^{n-1}) \times]0, +\infty[$.

□

Un corollaire intéressant est le suivant :

COROLLAIRE 3. *Il existe un minimum > 0 à l'ensemble des volumes des variétés hyperboliques compactes de dimension n .*

Ça soulève le problème intéressant de trouver toutes les variétés hyperboliques de volume minimal.

En dimension 3, on en déduit aussi la forme des variétés hyperboliques complètes non-compactes de volume fini :

COROLLAIRE 4. *Soit M une variété hyperbolique orientée complète de volume fini. Alors le complémentaire N de l'union des pointes de M est une variété compacte à bords toriques. M est homéomorphe à l'intérieur de N .*

Ce n'est pas l'objet de ce cours, mais il est difficile de parler de structures hyperboliques complètes de volume fini sans mentionner le théorème de rigidité de Mostow :

THÉORÈME 7 (Théorème de rigidité de Mostow). *Soient $n \geq 3$, $M_1 = \Gamma_1 \backslash \mathbf{H}^n$ et $M_2 = \Gamma_2 \backslash \mathbf{H}^n$ deux variétés hyperboliques complètes de volume fini. Si les groupes Γ_1 et Γ_2 sont isomorphes, alors les variétés M_1 et M_2 sont isométriques - autrement dit, Γ_1 et Γ_2 sont conjugués.*

Ce théorème indique qu'on ne peut pas déformer la représentation d'holonomie d'une structure hyperbolique complète de volume fini sur une variété. On verra dans deux chapitres que si la variété est de dimension 3, non-compacte (donc possède des pointes), alors la représentation d'holonomie peut-être déformée, mais après petite déformation c'est l'holonomie d'une structure hyperbolique *non complète* sur la variété. La géométrie qui en émergera sera passionnante !

Deuxième partie

Variétés des caractères et ses variantes

Variété des représentations, variété des caractères

1. La variété des représentations

1.1. Structure algébrique sur l'espace des représentations. Dans ce chapitre, on considère Γ un groupe de type fini et $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$. On s'intéresse aux représentations de Γ dans G :

DÉFINITION 9. $\mathcal{R}(\Gamma) = \{\text{morphisms } \Gamma \rightarrow G\}$ est appelé la variété des représentations.

Cet ensemble a la structure d'une variété algébrique affine. Décrivons cette structure : on fixe $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n | R \rangle$ une présentation \mathcal{P} de Γ . Alors, tout élément ρ de $\mathcal{R}(\Gamma)$ peut-être décrit par les matrices

$$\rho(\gamma_1) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \rho(\gamma_n) = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

Notons $\mathcal{R}(\Gamma)_{\mathcal{P}} \subset \mathbf{C}^{4n}$ l'image de $\mathcal{R}(\Gamma)$.

PROPOSITION 12. $\mathcal{R}(\Gamma)_{\mathcal{P}}$ est le lieu des zéros d'un idéal de polynômes.

DÉMONSTRATION. Considérons les n polynômes $a_i d_i - b_i c_i - 1$ pour garantir que les n matrices sont dans $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$. Sous cette condition, les inverses de $\rho(\gamma_i)$ s'écrivent avec des coefficients polynomiaux en les a_i, \dots : $\rho(\gamma_i)^{-1} = \begin{pmatrix} d_i & -b_i \\ -c_i & a_i \end{pmatrix}$. Donc pour tous $\gamma \in \Gamma$, les coefficients de $\rho(\gamma)$ sont des polynômes en les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i .

L'idéal recherché est celui engendré par les $a_i d_i - b_i c_i - 1$ et les 4 polynômes donnés par les coefficients de $\rho(r) - \mathrm{Id}$ pour $r \in R$. \square

De plus, la structure de variété algébrique affine ne dépend pas de la présentation :

PROPOSITION 13. Si \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont deux présentations à respectivement n et m générateurs, alors il existe un couple d'applications polynomiales $\varphi : \mathbf{C}^{4n} \rightarrow \mathbf{C}^{4m}$ et $\psi : \mathbf{C}^{4m} \rightarrow \mathbf{C}^{4n}$ telles que $\varphi(\mathcal{R}(\Gamma)_{\mathcal{P}}) \subset \mathcal{R}(\Gamma)_{\mathcal{P}'}$, $\psi(\mathcal{R}(\Gamma)_{\mathcal{P}'}) \subset \mathcal{R}(\Gamma)_{\mathcal{P}}$, $\psi \circ \varphi$ vaut l'identité sur $\mathcal{R}(\Gamma)_{\mathcal{P}}$ et $\varphi \circ \psi$ vaut l'identité sur $\mathcal{R}(\Gamma)_{\mathcal{P}'}$.

DÉMONSTRATION. Notons $\delta_1, \dots, \delta_m$ les générateurs de la deuxième présentation. Alors, les coefficients des δ_i sont des polynômes en ceux de γ_j : ça définit l'application φ . La deuxième application ψ est définie de manière symétrique. On vérifie alors facilement les propriétés. \square

A partir de maintenant, on considérera $\mathcal{R}(\Gamma)$ muni de cette structure de variété algébrique affine.

EXEMPLE(S) 1. — si $\Gamma = \mathbf{Z}$, $\mathcal{R}(\Gamma)$ s'identifie à $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$.

— si $\Gamma = \mathbf{F}_2$ est le groupe libre à 2 générateurs, $\mathcal{R}(\Gamma)$ s'identifie à $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$.

1.2. Espace tangent. On considère $\mathcal{R}(\Gamma) \subset \mathbf{C}^{4n}$, et I l'idéal des polynômes défini dans la proposition plus haut¹.

DÉFINITION 10. On dit qu'un vecteur $\xi \in \mathbf{C}^{4n}$ est Zariski-tangent en $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)$ si $\rho + t\xi$ annule à l'ordre 1 en t tous les polynômes définissant $\mathcal{R}(\Gamma)$. On note $T_\rho^Z(\mathcal{R}(\Gamma))$ l'espace tangent en ρ .

Considérons donc $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma) \subset \mathbf{C}^{4n}$ une représentation. Rappelons que l'espace tangent à $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ en un point σ est isomorphe à l'algèbre de Lie

$$\mathrm{sl}(2, \mathbf{C}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}.$$

Une carte locale autour de σ est donnée par l'application

$$\begin{cases} \mathrm{sl}(2, \mathbf{C}) & \rightarrow & \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \\ \xi & \mapsto & \exp(\xi)\sigma \end{cases}$$

Notons $\mathrm{sl}(2, \mathbf{C})_\rho$ le Γ -module donné par l'action de Γ sur $\mathrm{sl}(2, \mathbf{C})$ via $\rho : \gamma\xi = \rho(\gamma)\xi\rho(\gamma)^{-1}$.

DÉFINITION 11. On appelle 1-cocycle une application $c : \Gamma \rightarrow \mathrm{sl}(2, \mathbf{C})$ vérifiant pour tout $\gamma, \gamma', c(\gamma\gamma') = c(\gamma) + \gamma.c(\gamma')$. L'espace des 1-cocycles est noté $Z^1(\Gamma, \mathrm{sl}(2, \mathbf{C})_\rho)$.

Remarquons que la relation de cocycle nous indique qu'un c est entièrement déterminé par sa valeur sur les γ_i . Ainsi, nous pouvons envisager les cocycles comme des vecteurs de \mathbf{C}^{4n} .

PROPOSITION 14. L'espace Zariski tangent en ρ s'identifie à $Z^1(\Gamma, \mathrm{sl}(2, \mathbf{C})_\rho)$.

DÉMONSTRATION. D'abord, soit c un cocycle. Définissons $\rho_t(\gamma) = e^{tc(\gamma)}\rho(\gamma)$ pour tout γ dans Γ . Alors, la relation de cocycle implique que

$$\rho_t(\gamma)\rho_t(\gamma') = e^{tc(\gamma)}\rho(\gamma)e^{tc(\gamma')}\rho(\gamma') = e^{tc(\gamma)}e^{t\gamma.c(\gamma')}\rho(\gamma\gamma')$$

Les relations de l'exponentielle de matrice à l'ordre 1 implique que $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)} + o(t)$. On peut donc continuer le calcul précédent et obtenir

$$\rho_t(\gamma)\rho_t(\gamma') = e^{t(c(\gamma) + \gamma.c(\gamma'))}\rho(\gamma\gamma') + o(t) = e^{tc(\gamma\gamma')}\rho(\gamma\gamma') + o(t).$$

Donc ρ_t est bien une représentation à l'ordre 1 : le vecteur $\xi_i = c(\gamma_i)\rho(\gamma_i) \in \mathbf{C}^{4n}$ est bien tangent à $\mathcal{R}(\Gamma)$.

Inversement, soit $\xi = (\xi_i\rho(\gamma_i)) \in \mathrm{sl}(2, \mathbf{C})^n$ un vecteur tangent. Alors, la famille de matrices $(e^{t\xi_i}\rho(\gamma_i))$ vérifie les polynômes définissant $\mathcal{R}(\Gamma)$ à l'ordre 1. Autrement dit, on définit une représentation à l'ordre 1 ρ_t en posant

$$\rho_t \left(\prod_k \gamma_{i_k}^{n_k} \right) = \prod_k (e^{t\xi_{i_k}} \gamma_{i_k})^{n_k} + o(t)$$

Soit donc c l'application de Γ dans $\mathrm{sl}(2, \mathbf{C})$ telle que $c(\gamma)$ est le vecteur vérifiant $\rho_t(\gamma) = e^{tc(\gamma)}\rho(\gamma)$. Un calcul similaire à celui effectué ci dessus implique que c est un cocycle. \square

1. En réalité, cette présentation repose plutôt sur une vision de $\mathcal{R}(\Gamma)$ comme schéma et non variété algébrique. Nous n'entrerons pas dans cette discussion de manière précise et renvoyons par exemple à [Heu16] pour un traitement plus rigoureux et de fascinants exemples.

2. Caractères

Un outil crucial pour étudier les représentations à conjugaison près sont les caractères, c'est-à-dire les nombres construits en considérant $\text{tr}(\rho(\gamma))$. Commençons par un peu de vocabulaire :

DÉFINITION 12. *Pour tout $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)$ et $\gamma \in \Gamma$, on note $\chi_\rho(\gamma) = \text{tr}(\rho(\gamma))$. La fonction χ_ρ est appelée caractère de ρ . A γ fixé, on note t_γ la fonction $\rho \rightarrow \chi_\rho(\gamma)$.*

Le but de cette section est de décrire que le caractère χ_ρ contient presque toute l'information sur la classe de conjugaison de la représentation ρ . Commençons par isoler deux classes distinctes de représentations :

DÉFINITION 13. *Une représentation $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)$ est dite réductible si son image laisse invariante une droite de \mathbf{C}^2 . Une représentation qui n'est pas réductible est dite irréductible.*

Remarquons qu'une représentation est réductible si et seulement si on peut la conjuguer à une représentation à valeurs dans le groupe triangulaire supérieur de $\text{SL}(2, \mathbf{C})$.

Le premier résultat que nous obtenons est que le caractère détecte si une représentation est réductible. On note $[\Gamma, \Gamma]$ le groupe engendré par les commutateurs $[\gamma_1, \gamma_2] = \gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}$.

PROPOSITION 15. *Une représentation est réductible si et seulement si $\chi_\rho(\delta) = 2$ pour tout $\delta \in [\Gamma, \Gamma]$.*

DÉMONSTRATION. Voir [CS83, Lemme 1.2.1] □

Maintenant, pour les représentations irréductibles, le caractère détecte la classe de conjugaison.

PROPOSITION 16. *Soit ρ, ρ' deux représentations irréductibles qui ont le même caractère. Alors elles sont conjuguées.*

On le démontre pour des représentations à valeurs dans $\text{SL}(N, \mathbf{C})$. Sous cette forme, c'est un résultat de Selberg.

DÉMONSTRATION. Considérons R le sous-espace de $\mathcal{M}_N(\mathbf{C})$ engendré par $\rho'(\Gamma)$. Alors R est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_N(\mathbf{C})$ et, comme ρ' est irréductible, \mathbf{C}^N est un R -module simple. Le lemme de Burnside [Lan02, XVII, cor. 3.4] implique que $R = \mathcal{M}_N(\mathbf{C})$.

On fixe donc $\gamma_1, \dots, \gamma_{N^2}$ dans Γ tels que la famille des $\rho'(\gamma_i)$ est une base de $\mathcal{M}_N(\mathbf{C})$.

Considérons l'application Ψ de $\mathcal{M}_N(\mathbf{C})$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbf{C})$ donnée par

$$\Psi\left(\sum \lambda_k \rho'(\gamma_k)\right) = \sum \lambda_k \rho(\gamma_k).$$

On va montrer que c'est un automorphisme d'algèbre. Un résultat général impliquera qu'il est donné par une conjugaison ce qui prouvera la proposition.

Il est clair que Ψ est un morphisme d'algèbre, il suffit de montrer qu'il est injectif. Soit donc $X = \sum \lambda_k \rho'(\gamma_k) \in \mathcal{M}_N(\mathbf{C})$ et supposons que $\Psi(X) = 0$. Pour

tout autre élément $Y = \sum \mu_k \rho'(\gamma_k) \in \mathcal{M}_N(\mathbf{C})$, l'égalité des caractères implique :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(XY) &= \operatorname{tr}\left(\sum_{k,l} \lambda_k \mu_l \rho'(\gamma_k \gamma_l)\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\sum_{k,l} \lambda_k \mu_l \rho(\gamma_k \gamma_l)\right) \\ &= \operatorname{tr}(\Psi(X)\Psi(Y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or la trace est une forme bilinéaire non dégénérée, donc on a $X = 0$: Ψ est bien un automorphisme d'algèbre. Si γ est un élément quelconque de Γ , on peut écrire

$$\rho'(\gamma) = \sum \lambda_k \rho'(\gamma_k) \in \mathcal{M}_N(\mathbf{C})$$

et l'argument ci-dessus appliqué à $X = \rho'(\gamma) - \sum \lambda_k \rho'(\gamma_k)$, montre que

$$\rho(\gamma) = \sum \lambda_k \rho(\gamma_k).$$

L'automorphisme Ψ conjugue donc les représentations ρ et ρ' et la proposition découle du lemme général suivant :

LEMME 13. *Tout automorphisme d'algèbre Ψ de $\mathcal{M}_N(\mathbf{C})$ est intérieur.*

DÉMONSTRATION. On note E_{ij} les matrices élémentaires et $p_i = \Psi(E_{ii})$. Les p_i vérifient : $p_i^2 = p_i$, $p_i p_j = 0$ si $i \neq j$ et $\sum p_i = \operatorname{Id}$. Donc les p_i sont des projecteurs sur n droites indépendantes et quitte à conjuguer, on peut supposer $p_i = E_{ii}$.

Donc on a $E_{kk} \Psi(E_{ij}) = 0$ si $k \neq i$ et $\Psi(E_{ij}) E_{kk} = 0$ si $k \neq j$. Donc il existe $a_{ij} \in \mathbf{C}^*$ tel que $\Psi(E_{ij}) = a_{ij} E_{ij}$. Les a_{ij} vérifient les relations $a_{ij} a_{jk} = a_{ik}$; on en déduit que $a_{ij} = \frac{b_i}{b_j}$. Dans ce cas, Ψ est la conjugaison par la matrice $(\delta_i^j b_i)$. \square

L'automorphisme Ψ qu'on a construit est donc une conjugaison par une matrice A qu'on peut choisir dans $\operatorname{SL}(N, \mathbf{C})$. Ça implique $\rho = A \rho' A^{-1}$. \square

La dernière propriété importante autour de ces traces est que la donnée d'un nombre fini de valeurs du caractère détermine le caractère entièrement. On décrit ce résultat en utilisant plutôt les fonctions t_γ :

PROPOSITION 17. *L'anneau T_0 engendré par les $(t_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est de type fini.*

DÉMONSTRATION. Le point crucial est l'égalité suivante, valable dans $\operatorname{SL}(2, \mathbf{C})$:

$$\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(AB^{-1}).$$

En effet, le théorème de Cayley-Hamilton peut s'écrire $\operatorname{tr}(A)\operatorname{I} = A + A^{-1}$. Il suffit de multiplier cette égalité pour A et B , puis de prendre la trace (dans $\operatorname{SL}(2, \mathbf{C})$, $\operatorname{tr}(A^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$).

Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ une famille génératrice de Γ . Montrons que l'anneau engendré par tous les t_γ est égal à l'anneau T engendré seulement par les t_γ pour

$$\gamma = \gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_k}, \text{ avec } k \leq n \text{ et } i_1, \dots, i_k \text{ distincts.}$$

Soit donc un élément $\delta = \gamma_{i_1}^{m_1} \dots \gamma_{i_r}^{m_r}$ de Γ (avec bien sûr $m_j \neq 0$).

Premier cas : Montrons que si les i_j sont distincts, alors $t_\delta \in T$:

On le fait par récurrence sur l'entier $q = \sum_{j=1}^r \max(m_j - 1, -m_j)$. Si $q = 0$, alors par définition $t_\delta \in T$. Si $q \geq 1$, on peut conjuguer δ de sorte que $m_r \neq 1$. Si $m_r < 0$, on écrit, grâce à l'équation sur les traces :

$$t_\delta = t_{\delta\gamma_{i_r}} t_{\gamma_{i_r}^{-1}} - t_{\delta\gamma_{i_r}^2}.$$

Or l'hypothèse de récurrence implique que $t_{\delta\gamma_{i_r}}$ et $t_{\delta\gamma_{i_r}^2}$ sont dans T et $t_{\gamma_{i_r}^{-1}} = t_{\gamma_{i_r}}$ est dans T . Donc t_δ est dans T .

Si $m_r > 1$, on fait le même raisonnement en multipliant par $\gamma_{i_r}^{-1}$ au lieu de γ_{i_r} .

Cas général On travaille maintenant par récurrence sur r . D'après le cas particulier déjà traité on a $r \geq 2$ et (quitte à conjuguer) il existe $1 \leq j < r$ tel que $i_j = i_r$. Posons

$$\alpha = \gamma_{i_1}^{m_1} \dots \gamma_{i_j}^{m_j} \text{ et } \beta = \gamma_{i_{j+1}}^{m_{j+1}} \dots \gamma_{i_r}^{m_r}.$$

On conclut la preuve de la proposition grâce à la relation (encore donnée par la relation sur les traces) :

$$t_\delta = t_{\alpha\beta} = t_\alpha t_\beta - t_{\alpha\beta^{-1}}.$$

□

EXEMPLE(S) 2. *La preuve donne que si Γ est engendré par deux éléments a, b (par exemple $\Gamma = \mathbf{F}_2$), alors les fonction t_a, t_b et t_{ab} engendrent toutes les fonctions traces. Dit de manière plus terre à terre, pour tout γ de Γ , il existe un polynôme P_γ en trois variables tel que pour toute représentation ρ , on a :*

$$\text{tr}(\rho(\gamma)) = P(\text{tr}(\rho(a)), \text{tr}(\rho(b)), \text{tr}(\rho(ab)))$$

3. Variété des caractères

Soit toujours Γ un groupe de type fini et $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ une famille finie telle que les fonctions $\rho \rightarrow \text{tr}(\rho(\gamma_i))$ engendrent l'anneau des fonctions traces.

DÉFINITION 14. *On note $\chi(\Gamma) \subset \mathbf{C}^N$ l'image de $\mathcal{R}(\Gamma)$ par l'application $\rho \mapsto (\text{tr}(\rho(\gamma_i)))_{1 \leq i \leq N}$. On l'appelle la variété des caractères.*

3.1. Structure algébrique.

EXEMPLE(S) 3. *Si $\Gamma = \mathbf{F}_2$ est le groupe libre à 2 générateurs a et b , les traces de a, b et ab suffisent à déterminer toutes les traces. De plus, pour tout x, y, t dans \mathbf{C}^3 , on choisit u et v tels que $u + u^{-1} = x$ et $v + v^{-1} = y$, puis w tel que $t = uv + u^{-1}v^{-1} + w$. Alors, la représentation :*

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} u & 1 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} v & 0 \\ w & v^{-1} \end{pmatrix}$$

vérifie $\rho(a) = x, \rho(b) = y, \rho(ab) = t$.

On en déduit que $\chi(\mathbf{F}_2) = \mathbf{C}^3$.

Le point important (et non trivial) est que c'est une variété algébrique affine :

PROPOSITION 18. *L'ensemble $\chi(\Gamma)$ porte la structure d'une variété algébrique affine, et le choix d'un autre ensemble de traces fondamentales mène à une variété algébrique affine isomorphe.*

DÉMONSTRATION. L'indépendance par rapport à l'ensemble de traces choisies est très similaire à la preuve de la proposition 13.

Pour le caractère algébrique, en tant qu'image par une application polynomiale de la variété algébrique $\mathcal{R}(\Gamma)$, $\chi(\Gamma)$ est a priori seulement un ouvert de Zariski de sa clôture de Zariski. On trouve une preuve de la fermeture spécifique au cas étudié dans l'article fondateur [CS83].

Une autre approche, plus théorisée et plus apte aux généralisations, utilise la Théorie Géométrique des Invariants. On renvoie aux notes d'un cours de M2 de Julien Marché.

Remarquons (comme vu en cours), que pour les groupes à deux générateurs, on peut le faire à la main, à partir du fait que $\chi(\mathbf{F}_2) \simeq \mathbf{C}^3$ est fermé et du lemme suivant :

LEMME 14. *Si on a un morphisme surjectif $p : \Delta \twoheadrightarrow \Gamma$, l'application de $\mathcal{R}(\Gamma)$ dans $\mathcal{R}(\Delta)$ définie par $\rho \mapsto \rho \circ p$ descend en une injection $\chi(\Gamma) \hookrightarrow \chi(\Delta)$.*

□

EXEMPLE(S) 4. *On peut calculer que $\chi(\mathbf{Z}^2)$ peut-être décrit comme le sous-ensemble de $\mathbf{C}^3 = \chi(\mathbf{F}_2)$:*

$$\chi(\mathbf{Z}^2) = \{x, y, t \in \mathbf{C}^3 \mid x^2 + y^2 + t^2 - xyt - 4 = 0\}.$$

Une autre façon de voir cette variété de caractère est de considérer les valeurs propres u et v de l'image des deux générateurs, définie à inversion près : $\chi(\mathbf{Z}^2)$ est aussi $(\mathbf{C}^)^2 / (u, v) \rightarrow (u^{-1}, v^{-1})$.*

L'isomorphisme entre les deux versions est donné par

$$u, v \mapsto (u + u^{-1}, v + v^{-1}, uv + u^{-1}v^{-1}).$$

3.2. Espace tangent. Au moins sur les caractères de représentations irréductibles, on peut décrire l'espace tangent à $\chi(\Gamma)$. Pour ça, on définit le sous-espace des cobords dans $Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})_\rho) : B^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})_\rho)$ est l'ensemble des cocycles qui s'écrivent, pour un certain $\xi \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ sous la forme $c_\xi(\gamma) = \xi - \gamma \cdot \xi$.

PROPOSITION 19. *Soit $\mathbf{R}^{\text{irr}}(\Gamma)$ le sous-espace des représentations irréductibles. L'action de $\text{PSL}(2, \mathbf{C})$ sur cet ensemble est libre et propre, et la projection $\mathbf{R}^{\text{irr}}(\Gamma) \rightarrow \chi(\Gamma)$ est l'application de quotient par cette action.*

L'espace Zariski-tangent en le caractère χ d'une représentation irréductible s'identifie à :

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})_\rho) := Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})_\rho) / B^1(\Gamma, \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})_\rho, ho).$$

DÉMONSTRATION. Pour la liberté de l'action : soit $\rho \in \mathbf{R}^{\text{irr}}(\Gamma)$. On veut montrer que le centralisateur de ρ dans $\text{SL}(2, \mathbf{C})$ est $\{\pm \text{Id}\}$. Or le centralisateur de ρ dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ est $\text{End}_{\mathbf{C}[\Gamma]}(\mathbf{C}_\Gamma^2)$, où \mathbf{C}_Γ^2 est le $\mathbf{C}[\Gamma]$ -module défini par ρ . ρ est irréductible donc ce module est simple et le lemme de Schur implique que $\text{End}_{\mathbf{C}[\Gamma]}(\mathbf{C}_\Gamma^2)$ est composé des homothéties.

Pour la propreté : On fixe le compact $K \subset \mathcal{R}^{\text{irr}}(\Gamma)$ et une suite (σ_n) d'éléments de tels que $\sigma_n K \cap K \sigma_n \neq \emptyset$. Par définition, il existe deux suites (ρ_n) et (ρ'_n) d'éléments de K telles que $\sigma_n \rho_n = \rho'_n \sigma_n$. Comme K est compact, on suppose que $\rho_n \rightarrow \rho_\infty$ et $\rho'_n \rightarrow \rho'_\infty$. Quitte à extraire, faisons converger la suite $[\sigma_n]$ vers $[\sigma_\infty]$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathcal{M}_2(\mathbf{C}))$ (qui est compact). Alors σ_∞

est non nul et vérifie $\sigma_\infty \rho_\infty = \rho'_\infty \sigma_\infty$. L'irréductibilité de ρ_∞ implique que σ_∞ est inversible. On peut donc le choisir dans $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$. Or, comme on l'a vu plus haut et toujours grâce à l'irréductibilité, seules les homothéties commutent à ρ_∞ ou à ρ'_∞ . Donc tout σ tel que $\sigma \rho_\infty = \rho'_\infty \sigma$ est proportionnel à σ_∞ . Cela implique que $\sigma_n \rightarrow \pm \sigma_\infty$ et montre que E_K est compact.

Enfin pour l'espace tangent : fixons encore une fois $\rho \in \mathcal{R}^{\mathrm{irr}}(\Gamma)$. La différentielle de l'application

$$\begin{cases} \mathrm{PSL}(2, \mathbf{C}) & \rightarrow & \mathcal{R}^{\mathrm{irr}}(\Gamma) \\ \sigma & \mapsto & \sigma \circ \rho \circ \sigma^{-1} \end{cases}$$

est

$$\begin{cases} \mathrm{sl}(2, \mathbf{C}) & \rightarrow & Z^1(\Gamma, \mathrm{sl}(2, \mathbf{C})_\rho) \\ \xi & \mapsto & c_\xi \end{cases}.$$

□

4. Variété des caractères décorés

La variété des caractères, telle que définie au dessus, est un objet qui peut avoir des singularités sauvages : [KM17] montre essentiellement que localement les singularités peuvent être celles de n'importe quelle variété algébrique sur \mathbf{Q} . Pour domestiquer ces phénomènes et pouvoir travailler plus facilement dans les variétés de caractères, nous allons *décorer* les représentations par une donnée géométrique additionnelle.

Dans cette section, nous fixons M une variété hyperbolique de dimension 3 à ν pointes, et le groupe Γ sera son groupe fondamental. Rappelons qu'on a défini plus haut l'ensemble \mathcal{P} des pointes du revêtement universel. On choisit pour toute cette section, un ensemble fondamental p_1, \dots, p_ν de l'action de Γ sur \mathcal{P} . Remarquons que dans le groupe Γ , le stabilisateur de chaque pointe $p \in \mathcal{P}$ est un sous-groupe isomorphe à \mathbf{Z}^2 . Nous choisissons, là aussi une fois pour toutes, une base $(m_i, l_i)_{1 \leq i \leq \nu}$ des stabilisateurs des pointes fondamentales p_1, \dots, p_ν .

4.1. Représentations décorées.

DÉFINITION 15. Une représentation décorée (ρ, φ) est un couple formé d'une représentation $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ et d'une application $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{CP}^1$ qui est ρ -équivariante :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall p \in \mathcal{P}, \quad \varphi(\gamma \cdot p) = \rho(\gamma) \cdot \varphi(p).$$

On note $\mathrm{Dec}\mathcal{R}(\Gamma)$ l'espace des représentations décorées de Γ .

On peut remarquer que la condition d'équivariance a deux conséquences. D'une part, pour tout $p \in \mathcal{P}$, le point $\varphi(p)$ doit être invariant par $\mathrm{Stab}_\Gamma(p)$. D'autre part, il suffit de connaître l'image par φ des pointes fondamentales p_1, \dots, p_ν pour que φ soit entièrement déterminée.

EXEMPLE(S) 5. Si on considère une représentation d'holonomie ρ_{hyp} de la structure hyperbolique complète, alors pour toute pointe p , le groupe $\mathrm{Stab}_\Gamma(p)$ est composé d'éléments paraboliques et donc a un unique point fixe dans \mathbf{CP}^1 : c'est p lui-même.

Ainsi, la seule décoration de ρ_{hyp} est $\varphi = \mathrm{Id}$.

L'ensemble $\text{Dec}\mathcal{R}(\Gamma)$ possède naturellement une structure de sous-variété algébrique de $\mathcal{R}(\Gamma) \times (\mathbf{CP}^1)^\nu$: il suffit de choisir pour chaque pointe fondamentale un point de \mathbf{CP}^1 invariant par $\text{Stab}_\Gamma(p_i)$ (un tel point existe toujours, car un sous-groupe commutatif du groupe des homographies admet au moins un point fixe). Il y a donc de plus une application surjective d'oubli $\text{Dec}\mathcal{R}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma)$.

4.2. Caractères décorés. Le groupe $\text{SL}(2, \mathbf{C})$ agit par conjugaison sur les représentations et à gauche sur \mathbf{CP}^1 . Il agit donc sur les représentations décorées :

$$g \cdot (\rho, \varphi) = (g\rho g^{-1}, p \rightarrow g \cdot \varphi(p)).$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que $g \cdot (\rho, \varphi)$ est encore une représentation décorée.

On définit – sans entrer ici dans les détails sur la façon formelle de le faire – $\text{Dec}\chi(\Gamma)$ comme la variété algébrique "quotient" de $\text{Dec}\mathcal{R}(\Gamma)$ pour cette action : $\text{Dec}\chi(\Gamma)$ est le sous-ensemble de $\chi(\Gamma) \times (\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*)^\nu$ des familles $(\chi, (x_i, y_i))$ tels que pour tout $1 \leq i \leq \nu$, on a $\chi(m_i) = x_i + x_i^{-1}$ et $\chi(l_i) = y_i + y_i^{-1}$. De manière imagée, dans la représentation du groupe $\text{Stab}_\Gamma(p_i) \simeq \mathbf{Z}^2$, la décoration permet de privilégier une valeur propre, autrement dit permet de choisir une préimage dans le quotient $(\mathbf{C}^*)^2 \rightarrow \chi(\mathbf{Z}^2)$.

On résume les discussions de ce chapitre dans le diagramme commutatif suivant (ici, on suppose qu'on a une seule pointe, soit $\nu = 1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Dec}\mathcal{R}(\Gamma) & \rightarrow & \text{Dec}\chi(\Gamma) & \rightarrow & (\mathbf{C}^*)^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R}(\Gamma) & \rightarrow & \chi(\Gamma) & \rightarrow & \chi(\mathbf{Z}^2) \end{array}$$

Variétés hyperboliques triangulées

Le but est maintenant de rapprocher les deux points de vue – géométrique à travers les structures géométriques et algébrique à travers les variétés de caractères – dans l'exemple précis des variétés de dimension 3 à pointes triangulées.

On fixe dans tout ce chapitre une variété M qui est l'intérieur d'une variété N compacte à bords toriques. On considère une structure supplémentaire, de type topologique/combinatoire : une triangulation idéale de la variété.

1. Triangulation idéale

DÉFINITION 16. *Un complexe quasi-simplicial K est un CW complexe dont toutes les cellules sont des simplexes et les applications de recollement sont simpliciales injectives¹.*

En dimension 3 on parlera de recollements de tétraèdres.

On évoquera quelques concepts reliés à la topologie algébrique des complexes simpliciaux (en particulier la caractéristique d'Euler). C'est un excellent exercice de vérifier que les définitions ne posent pas de problèmes dans ce cas quasi-simplicial. Une bonne référence est la partie "Quotients de polyèdres" du site Analysis Situs.

On fixe ici K un complexe de tétraèdre fermé et orienté. On tire quelques conséquences de la définition. On note $K^{(0)}$ le 0-squelette (les sommets), $K^{(1)}$ le 1-squelette (les arêtes), etc ; on note $|K^{(0)}|$, etc leurs image dans $|K|$.

PROPOSITION 20. *$|K| \setminus |K^{(0)}|$ est une variété topologique. Localement un voisinage dans K d'un sommet $s \in |K^{(0)}|$ est isomorphe au cône sur une surface orientée triangulée appelée étoile de s et notée $S(s)$. On notera g_s son genre.*

DÉMONSTRATION. Brièvement : le voisinage d'une arête (moins les sommets) est un nombre fini de "quartier" de simplexes, donc est homéomorphe à un cylindre.

Un petit voisinage d'un sommet se décompose en l'intersection avec les tétraèdres où le sommet apparaît : son bord est une surface triangulée, orientée car $|K|$ est orientée. \square

EXEMPLE(S) 6. *Une collection de tétraèdres avec des identifications de faces qui renversent l'orientation est un tel complexe de tétraèdres.*

Un exemple, traité en cours, est celui du complémentaire dans \mathbf{S}^3 du nœud de huit. On renvoie au TD ou à [BP92, E.5.19].

PROPOSITION 21. *La caractéristique d'Euler $\chi(K)$ vaut $\sum_s g_s$.*

1. Mais pas de plongements des simplexes dans l'espace topologique résultant $|K|$.

DÉMONSTRATION. Notons, pour chaque sommet s :

- a_s le nombre de fois que s apparaît comme sommet d'une arête de K (compté avec multiplicité : si une arête fait un lacet basé en s dans $|K|$, on le compte 2 fois).
- f_s le nombre de fois (avec multiplicité) que s apparaît comme sommet d'une face de K .
- t_s le nombre de fois (avec multiplicité) que s apparaît comme sommet d'un tétraèdre de K .

Notons que a_s, f_s, t_s sont respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de triangles de la triangulation de $S(s)$. Comme chaque arête est partagée par 2 triangles et chaque triangle a 3 arêtes, on a $2f_s = 3t_s$.

On écrit la caractéristique d'Euler de $|K|$ en faisant apparaître les sommets de chaque cellule et en compensant pour que chaque cellule ne soit comptée qu'une fois :

$$\chi(K) = \sum_s 1 - \frac{a_s}{2} + \frac{f_s}{3} - \frac{t_s}{4} = \sum_s 1 - \frac{1}{2}(a_s - f_s + t_s).$$

Comme $2g_s = 2 - \chi(S(s)) = 2 - (a_s - f_s + t_s)$, l'égalité annoncée en découle. \square

2. Recollements de tétraèdres hyperboliques idéaux

On s'intéresse dans un premier temps à comment construire des structures géométriques grâce aux triangulations. Pour ça, il faut mieux décrire les tétraèdres hyperboliques idéaux.

2.1. Tétraèdres hyperboliques idéaux. Le groupe $SL(2, \mathbf{C})$ agit simplement 3-transitivement sur \mathbf{CP}^1 : étant donné 4 points distincts (a, b, c, d) , il existe un unique $t \in \mathbf{C}$ et un unique $g \in SL(2, \mathbf{C})$ tel que l'image par g de (a, b, c, d) soit $(\infty, 0, 1, t)$. Un petit calcul montre que $t = \frac{a-c}{a-d} \frac{b-d}{b-c}$. Ce nombre est appelé birapport des quatre points, noté $[a, b, c, d]$. Un simple calcul montre la proposition suivante :

PROPOSITION 22. *Etant donnés quatre points distincts (a, b, c, d) , on a :*

- $[a, b, c, d] = [b, a, d, c] = [c, d, a, b] = [d, c, b, a]$.
- $[a, c, d, b] = \frac{1}{1 - [a, b, c, d]}$ et $[a, d, b, c] = 1 - \frac{1}{[a, b, c, d]}$.

Autrement dit, un tétraèdre hyperbolique idéal de sommets a, b, c, d est décrit par trois birapports z, z', z'' , attachés respectivement aux arêtes (ab) , (ac) et (ad) (et leur arête opposée). De plus, l'argument du birapport attaché à une arête est l'angle dièdre entre les deux faces. Remarquons que ça implique que les angles dièdres associés à deux arêtes opposés sont les mêmes. Exercice : trouver une preuve géométrique de ce fait !

2.2. Variétés hyperboliques triangulées. Soit $M = |K| \setminus |K^{(0)}|$ une variété à pointes triangulée, et pour chaque tétraèdre T_i de K sa réalisation comme tétraèdre hyperbolique idéal. On peut considérer les birapports associés à chaque arête de chaque tétraèdre. On suppose que le tétraèdre est bien orienté et non dégénéré : Chaque birapport t s'écrit $t = e^u$ avec $0 < \text{Im}(u) < \pi$ (exercice : cette condition est automatiquement vérifiée pour toutes les arêtes en même temps d'un tétraèdre).

On a alors une structure hyperbolique sur $M \setminus |K^{(1)}|$. En effet pour les points de M à l'intérieur des tétraèdres, la carte locale est donnée par la

structure hyperbolique sur le tétraèdre. Pour les points sur une face, une carte locale sur un voisinage est donné par le recollement des deux tétraèdres hyperboliques le long de la face.

PROPOSITION 23. *Considérons une arête de K . Elle est identifiée à un nombre fini d'arêtes de tétraèdres hyperboliques, de birapport $t_1 = e^{u_1}, \dots, t_n = e^{u_n}$.*

La structure hyperbolique s'étend à cette arête si et seulement si $\sum_1^n u_i = 2i\pi$.

DÉMONSTRATION. Si cette condition est vérifiée, on peut recoller les tétraèdres hyperboliques le long de l'arête, pour obtenir une carte hyperbolique sur un voisinage de l'arête. Donc la structure hyperbolique s'étend.

Si la structure s'étend, on recolle les tétraèdres hyperboliques le long de l'arête pour calculer l'holonomie du tour de l'arête – en normalisant que les extrémités de l'arête soient 0 et ∞ dans le modèle du demi plan. L'holonomie (dans $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$) du tour d'arête est alors $\begin{pmatrix} \prod_i t_i & \\ & 1 \end{pmatrix}$. Comme la structure s'étend, l'holonomie est triviale ; on obtient $\prod_i t_i = 1$. De plus, l'angle autour de l'arête doit être 2π . Or cet angle est la somme des angles dièdres des tétraèdres : on obtient la condition $\text{Im}(\sum_1^n u_i) = 2\pi$. \square

Remarquons que si M est munie d'une telle structure hyperbolique, alors l'étoile $S(s)$ de chaque sommet de la triangulation est muni d'une structure de similitude – c'est-à-dire une $(\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}, \mathbf{C})$ -structure : en effet, chaque triangle obtenu en coupant un tétraèdre près du sommet s a la structure d'un triangle dont les 3 angles sont les 3 angles dièdres des arêtes du tétraèdres (voir aussi les notes de Thurston, pp 45-49). On peut utiliser cette structure de similitude pour étudier mieux la structure hyperbolique de M :

PROPOSITION 24. *Soit M une variété hyperbolique obtenue comme recollement de tétraèdres hyperboliques. Alors l'étoile de tout sommet est un tore.*

De plus le nombre d'arêtes de la triangulation est égal au nombre de tétraèdres.

DÉMONSTRATION. On reprend les notations de la preuve de la proposition 21 et on fixe un sommet s . On peut calculer la somme des angles pour la structure de similitude autour des sommets de la triangulation de l'étoile $S(s)$ de deux manières différentes : chaque sommet contribue de 2π , ou bien chaque triangle contribue de π . Donc $2\pi a_s = \pi t_s$. Comme on a de plus $2f_s = 3t_s$, la caractéristique d'Euler de $S(s)$ vaut :

$$a_s - f_s + t_s = \frac{t_s}{2} - \frac{3t_s}{2} + t_s = 0.$$

L'étoile est donc un tore.

De plus, le nombre d'arêtes totales est $A = \frac{1}{2} \sum_s a_s$, quand le nombre de tétraèdres est $T = \frac{1}{4} \sum_s t_s$: la relation entre a_s et t_s mène à l'égalité $A = T$. \square

Nous concluons cette section par une condition pour que la structure soit complète :

PROPOSITION 25. *Soit M une variété hyperbolique obtenue comme recollement de tétraèdres hyperboliques. La structure hyperbolique est complète si*

et seulement si les structures de similitudes sur les étoiles des sommets est une structure de translation.

DÉMONSTRATION. L'implication directe est une conséquence de la structure des variétés hyperboliques complètes : les voisinages des pointes sont des produits d'un tore euclidien par $[1, \infty[$.

Pour la réciproque, je renvoie ici aux notes de Thurston (sections 3.9 et 3.10), qui traitent plus précisément le cas plus intuitif des surfaces. \square

Pour conclure cette section, mentionnons un théorème de Luo-Schleimer-Tillman [LST08] qui assure que toute variété hyperbolique complète à pointes de dimension 3 admet un revêtement fini pour lequel la structure hyperbolique est construite en recollant des tétraèdres hyperboliques idéaux : ce procédé de construction est suffisamment souple et général.

3. Représentation d'holonomie

On fixe à nouveau $M = |K| \setminus |K^{(0)}|$ une variété à pointes triangulée, et pour chaque tétraèdre T_i de K sa réalisation comme tétraèdre hyperbolique idéal. On peut considérer les birapports associés à chaque arête de chaque tétraèdre. On suppose que le tétraèdre est bien orienté et non dégénéré : Chaque birapport t s'écrit $t = e^u$ avec $0 < \text{Im}(u) < \pi$ (exercice : cette condition est automatiquement vérifiée pour toutes les arêtes en même temps d'un tétraèdre).

Nous avons vu que $M' = |K| \setminus |K^{(1)}|$ est alors muni d'une structure hyperbolique. Nous nous proposons ici de calculer l'holonomie de cette structure. Soit donc c un chemin dans M' , dont on peut supposer sans perte de généralité qu'il ne fait pas demi-tour dans un tétraèdre : à chaque fois qu'il entre dans un tétraèdre, il en ressort par une autre face.

Ainsi, on peut coder c par la suite (F_0, F_2, \dots, F_n) des faces qu'il rencontre. On oriente chaque face F comme bord du tétraèdre dans lequel c rentre. De plus, on choisit dans chaque face un sommet privilégié initial : $F = (s, s', s'')$. Alors l'holonomie de c est le produit $g_n \cdots g_1$ où chaque g_i est l'unique élément de $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ qui envoie la face F_{i-1} sur la face F_i (en préservant l'orientation et les sommets privilégiés).

Ainsi, l'holonomie d'un chemin se calcule grâce à trois pas élémentaires :

- La matrice $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui change le sommet privilégié dans une face : $\infty, 0, 1 \mapsto 0, 1, \infty$;
- La matrice $G(z) = \begin{pmatrix} z & \\ & 1 \end{pmatrix}$ qui envoie la face $\infty, 0, 1$ sur la face $\infty, 0, z$: c'est le tour de la première arête - de birapport z dans le tétraèdre - de la face ;
- La matrice $D(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1-z \\ & z \end{pmatrix}$ qui envoie la face $\infty, 0, 1$ sur la face $\infty, 1, z$: c'est le tour de la troisième arête - de birapport z dans le tétraèdre - de la face ;

PROPOSITION 26. *Cette représentation d'holonomie descend en une représentation de $\Gamma = \pi_1(M)$ si et seulement si, pour chaque arête de K , le produit des birapports autour de cette arête vaut 1.*

DÉMONSTRATION. La preuve est incluse dans celle de la proposition 23 : l'holonomie du tour d'une arête vaut l'identité si et seulement si le produit des birapports autour de cette arête vaut 1. \square

Remarquons que la condition additionnelle de la proposition 23 sur la somme des angles dièdres valant 2π n'apparaît pas quand on ne regarde que la représentation.

On peut réinterpréter la condition de complétude dans ce cadre : si le chemin c dont on veut calculer l'holonomie est homotope à un chemin dans l'étoile d'un sommet, alors son image par la représentation d'holonomie est conjuguée à un produit de matrices G et D . On suppose (quitte à conjuguer) que c'est égal à ce produit de G et D : c'est une matrice triangulaire supérieure. Ainsi l'image de c est :

$$\begin{pmatrix} \prod_{\text{tour à gauche } t_i} & \star \\ 0 & \prod_{\text{tour à droite } t_j} \end{pmatrix}$$

où c , vu depuis le sommet, est une suite de tours vers la gauche autour d'un sommet de $S(s)$ correspondant aux birapports t_i et de tours vers la droite autour d'un sommet de $S(s)$ correspondant aux birapports t_j .

D'après la section précédente, la structure est complète si et seulement si toutes ces holonomies sont paraboliques, c'est à dire

$$\prod_{\text{tour à gauche } t_i} t_i \prod_{\text{tour à droite } t_j} t_j^{-1} = 1$$

Ainsi, pour chercher une structure hyperbolique, il suffit de chercher une solution aux équations dites d'arêtes, décrites dans la proposition 23 et à deux équations du type ci-dessus par pointe (une pour chaque générateur du groupe fondamental de la pointe).

4. Triangulations décorées et variété des déformations

Nous allons maintenant faire abstraction de la construction de structures hyperboliques sur M pour nous concentrer sur la construction de représentations. Soit donc à nouveau $M = |K| \setminus |K^{(0)}|$. Le revêtement universel est lui aussi triangulé, par \tilde{K} .

DÉFINITION 17. Une décoration de K est une application $\varphi : \tilde{K}^{(0)} \rightarrow \mathbf{CP}^1$ telle que si $T = (a, b, c, d)$ et $T' = (a', b', c', d')$ sont deux tétraèdres envoyés l'un sur l'autre par un élément de $\pi_1(M)$, alors il existe un élément de $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$ qui envoie $\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \varphi(d)$ sur $\varphi(a'), \varphi(b'), \varphi(c'), \varphi(d')$.

Une décoration est dite générique si de plus pour tout tétraèdre de K , les images de ses quatres sommets sont deux à deux distinctes.

Remarquons qu'une décoration générique définit un jeu de birapports à chaque tétraèdre de M , par la propriété d'invariance.

De plus, une représentation décorée (ρ, φ) de M définit une décoration de K : les sommets de \tilde{K} sont exactement les pointes \mathcal{P} de \tilde{M} , et $\varphi : |\tilde{K}^{(0)}| = \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{CP}^1$ est une décoration K . Le but de cette section est de munir l'espace des décorations génériques d'une structure de variété algébrique affine, étroitement reliée à la variété des représentations décorées et de comprendre le quotient par l'action de $\text{PGL}(2, \mathbf{C})$.

4.1. Variété des déformations. Le groupe des homographies $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ agit sur l'espace des décorations de K par $g \cdot \varphi g \circ \varphi$. Cette action préserve clairement le sous-ensemble des décorations génériques.

PROPOSITION 27. *Deux décorations génériques φ et φ' sont dans la même orbite sous $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ si et seulement si pour tout tétraèdre $T = (a, b, c, d)$ de \tilde{K} , on a*

$$[\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c), \varphi(d)] = [\varphi'(a), \varphi'(b), \varphi'(c), \varphi'(d)].$$

DÉMONSTRATION. Le sens direct est clair : le birapport est invariant sous l'action d'une homographie.

Dans l'autre sens, considérons $T_0 = (a_0, b_0, c_0, d_0)$ un tétraèdre de \tilde{K} . Par hypothèse, il existe une unique homographie g qui envoie le quadruplet

$$(\varphi(a_0), \varphi(b_0), \varphi(c_0), \varphi(d_0)) \quad \text{sur} \quad (\varphi'(a_0), \varphi'(b_0), \varphi'(c_0), \varphi'(d_0)).$$

Maintenant, si on prend un tétraèdre T qui est recollé par une des faces (disons a_0, b_0, c_0) à T_0 , le quatrième sommet e de T est envoyé par φ' sur l'unique point tel que $[\varphi'(e), \varphi'(a_0), \varphi'(b_0), \varphi'(c_0)]$. Or par hypothèse on a l'égalité :

$$[\varphi'(e), \varphi'(a_0), \varphi'(b_0), \varphi'(c_0)] = [\varphi(e), \varphi(a_0), \varphi(b_0), \varphi(c_0)].$$

Par unicité et les égalités $\varphi'(a_0) = g \circ \varphi(a_0) \dots$, le seul choix possible pour $\varphi'(e)$ doit vérifier $[\varphi'(e), g\varphi(a_0), g\varphi'(b_0), g\varphi'(c_0)] = [\varphi(e), \varphi(a_0), \varphi(b_0), \varphi(c_0)]$. On obtient donc $\varphi'(e) = g\varphi(e)$.

On fait grossir comme ça l'ensemble des sommets sur lesquels $\varphi' = g \circ \varphi$ jusqu'à avoir tout $|K^{(0)}|$. \square

Par ailleurs, par invariance, les birapports d'un tétraèdre de \tilde{K} ne dépendent que de sa projection dans K .

PROPOSITION 28. *On considère une décoration générique de K . Alors, le produit des birapport autour d'une arête de $|K^{(1)}|$ vaut 1.*

DÉMONSTRATION. Notons p le produit des tétraèdres autour d'une arête.

Quand on recolle, comme dans la preuve précédente, les tétraèdres autour de l'arête, on finit après un tour par retomber sur le même point. Si on part du tétraèdre $\infty, 0, 1, t$ et qu'on tourne autour de $(\infty 0)$, on arrive au bout d'un tour complet sur $\infty, 0, p, pz$. Il faut donc $p = 1$. \square

Réciproquement, si un jeu de birapports vérifie toutes les conditions précédentes pour toutes les arêtes, alors on construit une décoration générique qui a ces birapports : on part du tétraèdre $\infty, 0, 1, t$ et on recolle comme dans la preuve de la proposition 27.

Enfin, une décoration générique φ de K définit une *représentation d'holonomie* ρ : on fixe toujours le tétraèdre T_0 et $\rho(\gamma)$ est l'unique g qui identifie $\varphi(T_0)$ et $\varphi(\gamma \cdot T_0)$. Par construction, (ρ, φ) est une représentation décorée. On peut remarquer que la représentation d'holonomie de $g \cdot \varphi$ est $g\rho g^{-1}$. On note aussi que la représentation d'holonomie peut se calculer comme dans le cas hyperbolique à partir des matrices $G(z)$, $D(z)$ et T .

On fixe une fois pour toute un ordre sur les sommets de chaque tétraèdre de K , de sorte qu'un jeu de birapports est donné par t, t', t'' avec $t' = \frac{1}{1-t}$ et $t'' = 1 - \frac{1}{t}$ (voir la section 2.1). De plus, on note T_1, \dots, T_N les tétraèdres de K .

DÉFINITION 18. *On définit la variété des déformations $\mathcal{D}(M)$ est le quotient de l'espace des décorations génériques par l'action de $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$. Elle s'identifie à :*

$$\left\{ (t_i, t'_i, t''_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbf{C}^{3N} \mid \begin{array}{l} t'_i = \frac{1}{1-t_i}, \quad t''_i = 1 - \frac{1}{t_i}, \\ \text{toutes les équations d'arêtes sont vérifiées} \end{array} \right\}$$

De plus, on a vu qu'on a une application de $\mathrm{Dec}\mathcal{R}(\Gamma)$ dans l'espace des décorations. Elle descend en une application d'un ouvert de $\mathrm{Dec}\chi(\Gamma)$ dans $\mathcal{D}(M)$ et l'application d'holonomie décrite au dessus fournit un inverse.

4.2. Voisinage de l'holonomie hyperbolique. On suppose que M est une variété hyperbolique de dimension 3 à pointes, triangulée par K et telle que la structure hyperbolique est obtenue en recollant des structures de tétraèdres hyperboliques idéaux sur les tétraèdres de K .

On a vu dans ce chapitre et le précédent que la représentation d'holonomie ρ_0 admet une unique décoration φ_0 et donc correspond à un unique point dans $\mathrm{Dec}\chi(\Gamma)$. De plus, ça définit une unique décoration de K , qui est générique. Donc à nouveau, il y a un unique point $Z_0 \in \mathcal{D}(M)$ associé à la structure hyperbolique.

De plus, la discussion de la section précédente explique que l'application d'holonomie $\mathcal{D}(M) \rightarrow \mathrm{Dec}\chi(\Gamma)$ est un homéomorphisme sur son image, notamment au voisinage du point hyperbolique. De plus, au voisinage du point hyperbolique, l'application $\mathrm{Dec}\chi(\Gamma) \rightarrow \chi(\Gamma)$ est un revêtement ramifié. Il en découle que pour étudier la variété des caractères $\chi(\Gamma)$ au voisinage de $\chi_0 = [\rho_0]$ on peut aussi bien utiliser les modèles $\mathrm{Dec}\chi(\Gamma)$ ou $\mathcal{D}(M)$.

Utilisons ce principe pour démontrer :

PROPOSITION 29. *Au voisinage de χ_0 , tout caractère est le caractère d'une structure hyperbolique (non-complète) sur M*

DÉMONSTRATION. On travaille plutôt au voisinage de Z_0 dans DM . Z_0 est un point $(t_i, t'_i, t''_i)_{1 \leq i \leq N}$ tel que toutes les parties imaginaires sont strictement positives et autour de chaque arête, la somme des logarithmes des birapports vaut $2i\pi$. Choisissons un voisinage connexe de Z_0 dans $\mathcal{D}(M)$ tel que les birapports soient toujours de partie imaginaire positive. Notamment, le logarithme des birapports est toujours défini dans ce voisinage.

Soit $Z = (z_i, z'_i, z''_i)_{1 \leq i \leq N}$ dans ce voisinage. Par définition de $\mathcal{D}(M)$ le produit des birapports autour des arêtes vaut 1. Donc la somme de leur logarithmes est un multiple entier de $2i\pi$. Par connexité, il vaut $2i\pi$: Z correspond à une structure hyperbolique. \square

En utilisant ces considérations, on peut démontrer :

THÉORÈME 8. *Le point χ_0 est un point lisse de la variété des caractères $\chi(\Gamma)$. La dimension du composant de $\chi(\Gamma)$ qui contient χ_0 est égale au nombre de pointes de M .*

Nous ne démontrons pour l'instant ce résultat que dans le cas où M a une seule pointe, et en utilisant le théorème de Mostow. J'insiste sur le fait (nous y reviendrons) qu'une analyse plus précise de $\mathcal{D}(M)$ permet de montrer le théorème sans utiliser le théorème de Mostow.

Dans le cas où le nombre de pointes est 1, il suffit de démontrer que la dimension locale de $\chi(\Gamma)$ est 1. Ca repose sur les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 30. *Tous les composants de $\mathcal{D}(M)$ sont de dimension au moins 1.*

PROPOSITION 31. *Si M a une seule pointe, autour de χ_0 , $\text{Dec}\chi(\Gamma)$ est de dimension au plus 1.*

Il est clair que mises ensembles, ces deux propositions prouvent le théorème. Le lecteur pourra constater qu'on travaille effectivement dans deux modèles différents pour chaque proposition, justifiant la construction de ces différentes variantes de la variété des caractères.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 30. $\mathcal{D}(M)$ est une sous-variété de \mathbf{C}^{3N} définie par $3N$ équations (rappelons que K a autant d'arêtes que de tétraèdres). Montrons que les équations d'arêtes sont liées.

L'équation d'arête associée à l'arête a est de la forme $p_a = 1$ où p_a est le produit des birapports autour de l'arête. Ainsi le produit des p_a sur toutes les arêtes est le produit des birapports de chaque arête dans chaque tétraèdre. Or chaque birapport t_i, t'_i, t''_i apparaît deux fois dans chaque tétraèdre, sur les arêtes opposées.

Ainsi, $\prod_a p_a = \prod_1^N (t_i t'_i t''_i)^2$. Or d'après les relations entre t_i, t'_i, t''_i on a $(t_i t'_i t''_i = -1)$. Ainsi le produit $\prod_a p_a$ égal à 1, donc les équations sont liées.

On en déduit que chaque composant de $\mathcal{D}(M)$ est de dimension au moins 1. \square

REMARQUE 1. *Cette proposition semble anodine, mais démontre en fait un résultat géométriquement non trivial : on peut effectivement déformer l'holonomie hyperbolique ρ_0 de M en une représentation qui ne lui est pas conjuguée – et qui est la représentation d'holonomie d'une autre structure hyperbolique.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 30. On fixe m et l dans $\pi_1(M)$ qui engendrent le stabilisateur d'une pointe $p \in \mathcal{P}$.

La décoration de χ_0 est de la forme $\chi_0, (M_0, L_0)$ où $M_0 = \pm 1$ et $L_0 = \pm 1$. Soit $\chi, (M, L)$ un caractère décoré proche. Si $M = M_0$, alors on peut le relever en une unique décoration décorée ρ, φ avec ρ proche de ρ_0 et telle que $\varphi(p) = \infty$ et

$$\rho(m) = \begin{pmatrix} M_0 & 1 \\ 0 & M_0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\rho(l)$ commute à $\rho(m)$, il doit être parabolique. Donc $L = L_0$. En échangeant les rôles de L et M , on obtient une équivalence $M = 1 \Leftrightarrow L = 1$.

Donc les solutions proches de $\chi_0, (M_0, L_0)$ à l'équation $M = M_0$ sont des représentations d'holonomies de structures hyperboliques et telles que le stabilisateur de p est parabolique : la structure est donc complète et d'après le théorème de Mostow, cette solution est $\chi_0, (M_0, L_0)$. Donc l'équation algébrique $M = M_0$ a une unique solution : la variété algébrique $\text{Dec}\chi(\Gamma)$ est localement de dimension au plus 1. \square

Concluons ce chapitre en décrivant une relation supplémentaire entre L et M . Nous notons $\lambda = L/L_0$ et $\mu = M/M_0$. Nous avons localement $\mu = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

PROPOSITION 32. *Il existe une fonction analytique u définie sur un voisinage du point hyperbolique dans $\text{Dec}\chi(\Gamma)$ telle que $\lambda = \mu^u$. De plus, la valeur de u en le point hyperbolique est le module τ de la structure euclidienne sur le tore périphérique pour la structure hyperbolique complète.*

DÉMONSTRATION. On doit poser $u = \frac{\ln \lambda}{\ln \mu}$. D'après l'équivalence décrite, c'est bien défini sauf a priori en le point hyperbolique, pour lequel les deux logarithmes s'annulent.

Mais, choisissons le relevé ρ_0, φ_0 comme représentation décorée tel que (avec les notations de la preuve précédente $\varphi_0(p) = \infty$). Alors, un point $(\chi, (M, L))$ proche se relève de manière unique en (ρ, φ) tel que $\varphi(p) = \infty$ et

$$\rho(m) = \begin{pmatrix} M & 1 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix}.$$

Par commutation, on en déduit :

$$\rho(l) = \begin{pmatrix} L & \frac{L-L^{-1}}{M-M^{-1}} \\ 0 & L^{-1} \end{pmatrix}.$$

Quand $M \rightarrow M_0$ et $L \rightarrow L_0$, on obtient la représentation limite ρ_0 :

$$\rho_0(m) = \begin{pmatrix} M_0 & 1 \\ 0 & M_0^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\rho_0(l) = \begin{pmatrix} L_0 & \frac{M_0}{L_0} \tau \\ 0 & L_0^{-1} \end{pmatrix}.$$

de sorte que l'action par translation sur \mathbf{C} soit engendrée par $1, \tau$ On obtient donc :

$$\frac{L-L^{-1}}{M-M^{-1}} = \frac{M_0}{L_0} \frac{\lambda - \lambda^{-1}}{\mu - \mu^{-1}} \rightarrow \frac{M_0}{L_0} \tau$$

Or, en faisant un développement limité en 1 de $\lambda = (1 + \ln(\lambda) + \dots)^u$ et $\mu = (1 + \ln(\mu) + \dots)$, on obtient $u \rightarrow \tau$. Donc u se prolonge par continuité et vaut τ en le point hyperbolique. □

Troisième partie

Chirurgies de Dehn hyperboliques

Chirurgies de Dehn et complétion métrique

Par manque de temps, la rédaction de ce chapitre est lacunaire et repose fortement sur les références utilisées pour le cours. Principalement les notes de Thurston, chapitre 4 et le mémoire de M2 de Miguel Acosta.

Nous définissons dans ce chapitre un procédé *topologique* – appelé chirurgie de Dehn – pour construire à partir d’une variété M à pointes des variétés compactes puis nous utilisons les outils développés dans les chapitres précédentes pour montrer que ce procédé coïncide presque tout le temps avec un procédé géométrique : déformer la structure hyperbolique sur M en une structure non-complète et considérer le complété métrique.

1. Chirurgie de Dehn, définition topologique

On note \mathbb{T}^2 le tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ et T le tore plein $D^2 \times \mathbb{S}^1$. Un recollement r est un difféomorphisme $r : \mathbb{T}^2 \rightarrow \partial T$ qui préserve l’orientation. Un tel recollement induit un morphisme surjectif $r_* : \pi_1(\mathbb{T}^2) \rightarrow \pi_1(T)$, dont le noyau est isomorphe à \mathbf{Z} .

PROPOSITION 33. *Si r et r' sont deux recollements tels que $\ker(r_*) = \ker(r'_*)$, alors il existe un difféomorphisme isotope à l’identité $\varphi : T \rightarrow T$ tel que $r' = \varphi \circ r$.*

DÉMONSTRATION. Si r et r' sont isotopes, on peut prolonger cette isotopie à T .

Sinon, notons m le générateur du noyau commun. On peut choisir l tel que (m, l) engendrent $\pi_1(\mathbb{T}^2)$. On peut supposer que r est l’identité, en pré-composant par un difféomorphisme de \mathbb{T}^2 . Alors r' est de la forme $(e^{it}, e^{is}) \rightarrow (e^{i(t+ks)}, e^{is})$. On peut prendre $\varphi(re^{it}, e^{is}) = (re^{i(t+ks)}, e^{is})$. \square

A partir de maintenant, on fixe une variété N à bords toriques $\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_N$, et pour chacun on marque une base (m_i, l_i) du groupe fondamental. On note M l’intérieur de N .

DÉFINITION 19. *Une chirurgie de Dehn sur M est une variété obtenue en recollant des tores pleins sur certaines composantes de bord de N , puis en prenant l’intérieur.*

D’après la discussion préliminaire, elle est définie à isotopie près par la donnée pour chaque tore rempli d’un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que le noyau du recollement soit engendré par $pm + ql$.

THÉOREME 9 (Likorish-Wallace). *Toute variété compacte sans bord de dimension 3 est obtenue comme chirurgie de Dehn sur le complémentaire d'un entrelacs dans la sphère.*

2. Invariants de Dehn

On suppose maintenant que M est une variété à pointe hyperbolique triangulée, et dont la structure hyperbolique est obtenue en recollant des tétraèdres hyperboliques idéaux. On travaille au voisinage du point hyperbolique Z_0 dans $\mathcal{D}(M)$. On choisit (localement) des logarithmes des birapport z_i avec argument dans $]0, \pi[$.

On rappelle que pour tout point $Z \in \mathcal{D}(M)$, pour tous les générateurs m_i, l_i , on peut calculer le rapport de la similitude de l'holonomie ce générateur pour la structure de similitude sur le tore correspondant, et que c'est un produit $\prod z_i \prod z_j^{-1}$ (dans le premier produit, apparaissent les birapports des arêtes autour desquelles le chemin tourne à gauche, dans le deuxième ceux où il tourne à droite).

On définit $\mu_i = \sum \log(z_i) - \sum \log(z_j)$ pour le chemin m_i et λ_i de manière similaire pour le chemin l_i . Localement, en dehors du point Z_0 , le couple μ_i, λ_i engendre \mathbf{C} comme \mathbf{R} -espace vectoriel : leur rapport tend vers τ_i , le module de la structure euclidienne sur le tore donnée par la structure hyperbolique complète sur M .

On note p_i, q_i les nombres réels tels que $p_i \mu_i + q_i \lambda_i = 2i\pi$. Ces nombres sont appelés *invariants de Dehn (généralisés)*. On peut énoncer un premier théorème qui explique comment on peut compléter certaines structures non complètes sur M :

THÉOREME 10. *Sur un voisinage de Z_0 , la structure hyperbolique sur M se complète en une structure hyperbolique sur une variété si et seulement si pour toute pointe p_i, q_i est un couple d'entier premier entre eux (ou ∞). De plus, dans ce cas, le complété métrique est la chirurgie de Dehn de paramètre $\frac{p_i}{q_i}$. est homéomorphe à la chirurgie de Dehn de coefficient*

DÉMONSTRATION. Je renvoie (par manque de temps) aux pages 24-28 du mémoire de M2 de Miguel Acosta, dont la présentation est celle suivie en cours. \square

Nous pouvons maintenant montrer le théorème de chirurgie de Dehn hyperbolique de Thurston :

THÉOREME 11. *Soit M une variété hyperbolique complète à v pointes. Alors il existe un voisinage de $(\infty, \infty, \dots, \infty)$ dans $\mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$ tel que pour tout v -uplet (r_1, \dots, r_v) , avec $r_i = \infty$ ou (p_i, q_i) un couple d'entiers premiers entre eux, dans ce voisinage, la chirurgie de Dehn ayant les paramètres r_i porte une structure hyperbolique, obtenue comme complétion d'une structure hyperbolique sur M .*

Remarquons que dans le cas d'une seule pointe, le théorème dit que toutes les chirurgies de Dehn sauf un nombre fini portent une structure hyperbolique.

Prouvons-le dans le cas de M à une pointe. On a vu que le nombre μ définit un paramètre local sur la variété $\mathcal{D}(M)$ et que λ vérifie $\lambda = u\mu$, avec

u analytique, $u(0) = \tau$ non réel. Définissons κ l'application de \mathbf{C} dans $\mathbf{R}^2 \cup \infty$ qui à μ associe les invariants de Dehn (p, q) généralisés et qui envoie 0 sur ∞ . Notons que dans $\mathcal{D}(M)$ on a l'application $\mu \rightarrow -\mu$ qui consiste à choisir l'autre décoration de la même structure, et qui envoie λ sur $-\lambda$: u est paire, sa dérivée en 0 vaut 0.

PROPOSITION 34. *κ est un homéomorphisme local entre un voisinage de 0 et un voisinage de ∞ .*

DÉMONSTRATION. Je renvoie (par manque de temps) à la preuve du théorème 5.15 (p 25) dans le mémoire de M2 de Miguel Acosta, dont la présentation est celle suivie en cours. \square

On conclut la preuve du théorème : pour toute paire d'entiers $(p, q) = \kappa(\mu)$ premier entre eux dans l'image de κ , la construction du complété métrique de la structure hyperbolique correspondant à μ est une structure hyperbolique sur la chirurgie de Dehn $M_{\frac{p}{q}}$.

Bibliographie

- [BG04] N. Bergeron and T. Gelander. A note on local rigidity. *Geom. Dedicata*, 107 :111–131, 2004.
- [BP92] Riccardo Benedetti and Carlo Petronio. *Lectures on hyperbolic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [CS83] Marc Culler and Peter B. Shalen. Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 117(1) :109–146, 1983.
- [Gol88] William M. Goldman. Geometric structures on manifolds and varieties of representations. In *Geometry of group representations (Boulder, CO, 1987)*, volume 74 of *Contemp. Math.*, pages 169–198. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [Heu16] M. Heusener. $SL(n, \mathbb{C})$ -representations of knot groups. 2016. Available here.
- [KM17] Michael Kapovich and John J. Millson. On representation varieties of 3-manifold groups. *Geom. Topol.*, 21(4) :1931–1968, 2017.
- [Lan02] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.
- [LST08] Feng Luo, Saul Schleimer, and Stephan Tillmann. Geodesic ideal triangulations exist virtually. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(7) :2625–2630, 2008.
- [Thu97] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.